PARTE III

La Rivisitazione

CAPITOLO VIII

OPTION PRICING: UN APPROCCIO DETERMINISTICO NON LINEARE COMPLESSO

1. INTRODUZIONE

In letteratura é, più o meno recentemente, apparso un crescente numero di risultati empirici relativi all'indagine delle ipotesi classicamente soggiacenti alle leggi di evoluzione dei prezzi, tradizionalmente

$$r_1(t + \Delta t) = P(t + \Delta t) - P(t) \sim N(\mu \Delta t,\ \sigma^2 \Delta t) \tag{1.1}$$

e

$$r_2(t + \Delta t) = \ln[P(t + \Delta t)] - \ln[P(t)] \sim N(\mu \Delta t,\ \sigma^2 \Delta t). \tag{1.2}$$

L'evidenza empirica della parziale inadeguatezza di queste ipotesi, unitamente agli specifici risultati empirici conseguiti, ha condotto molti autori a congetturare ed a proporre ipotesi alternative.
Ad esempio, le costanti presenze di leptocurtosi, di asimmetria e di instabilità della varianza nelle distribuzioni di frequenza delle variazioni sia dei prezzi che dei loro logaritmi, hanno condotto molti autori a congetturare per queste ultime una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile ([Cootner P.,

1963], [Fama E. F., 1963], [Mandelbrot B. B., 1963b], [Fielitz B. D. *et al.*, 1972], [Leitch R. A. *et al.*, 1975], [Rozelle J. *et al.*, 1980], [Simkowitz M. *et al.*, 1980], [Fielitz B. D. *et al.*, 1983], [Akgiray V. *et al.*, 1988], [Walter C., 1990], [Canestrelli E. *et al.*, 1991b], [Brasolin A. *et al.*, 1992], [Corazza, M. *et al.*, 1993b], e **CAPITOLO V**) o una distribuzione data da una mistura di distribuzioni di probabilità Gaussiane e/o Pareto-Lévy stabili ([Fielitz B. D. *et al.*, 1983] e [Helms B. P. *et al.*, 1985]). Altri autori, rigettando l'ipotesi di efficienza in forma debole dei mercati finanziari mediante la conduzione di tests sull'ipotesi di dipendenza (non solo lineare) delle variazioni sia dei prezzi che delle loro trasformazioni logaritmiche ([Greene M. T. *et al.*, 1977], [Greene M. T. *et al.*, 1979], [Lo A. W., 1991], [Peters E. E., 1991b], [Booth G. G. *et al.*, 1992], [Corazza M. *et al.*, 1993a], [Corazza M. *et al.*, 1993c], [Helms B. P. *et al.*, 1984], [Peters E. E., 1994] e **CAPITOLO VI**), hanno congetturato la non-markovianità per i processi stocastici che generano tali variazioni.

A tali ipotesi alternative, ottenute dall'assunzione delle congetture proposte in ambito stocastico, si sono recentemente affiancate delle ipotesi alternative proposte in ambito deterministico, ipotesi che assumono leggi delle variazioni sia dei prezzi che dei loro logaritmi descrivibili da dinamiche deterministiche non-lineari complesse o caotiche ([Gori F. *et al.*, 1989], [Scheinkman J. A. *et al.*, 1989], [Hsieh D. A., 1991], [Peters E. E., 1991a], [Peters E. E., 1991b], [Malliaris A. G. *et al.*, 1992] e [Peters E. E., 1994]). È da notare come anche le congetture soggiacenti a queste ultime ipotesi alternative siano indotte da un crescente numero di risultati empirici relativi alla determinazione del valore di alcuni opportuni indicatori di non-linearità complessa o caoticità ([Hinich M. J. *et al.*, 1989], [Brasolin A. *et al.*, 1992], [Corazza M. *et al.*, 1993b], [Peters E. E., 1991a], [Peters E. E., 1991b], [Peters E. E., 1994] e **CAPITOLO VII**).

Questo capitolo propone la determinazione di una formula per la valutazione del valore di equilibrio (parziale) di una opzione call di tipo europeo nell'ipotesi in cui la legge degli incrementi dei logaritmi dei prezzi sia descrivibile da una dinamica deterministica non lineare complessa o caotica. In particolare, nelle sezioni 2. e 3., rispettivamente, si illustrano sinteticamente gli aspetti teorici e gli assunti economico-finanziari necessari per la determinazione di tale formula; nella sezione 4. si ricava un'equazione differenziale alle derivate parziali che descrive la dinamica del valore di equilibrio della opzione call di tipo europeo; nella sezione 5. si determina la soluzione della equazione differenziale alle derivate parziali precedentemente ricavata; nella sezione 6. si presentano delle osservazioni e considerazioni finali.

2. ASPETTI TEORICI

Gli aspetti teorici necessari per determinare quanto prospettato nella sezione 1. riguardano, oltre a quanto trattato nel **CAPITOLO IV**, un risultato che permette di identificare una classe di sistemi dinamici. In particolare, poichè in letteratura non esiste uniformità di pareri sugli aspetti definitori degli "oggetti" inerenti alle dinamiche caotiche, in questo capitolo ci si rifà alle definizioni ed ai risultati verso i quali c'è più diffuso consenso[1].

(2.A) Classe di sistemi dinamici caotici: sia dato un sistema dinamico continuo $f : I \to I$, con $I \subset \mathbf{R}$, e siano dati tre punti $a, b, c \in I$, tali che $b = f(a)$, $c = f^2(a)$ e $d = f^3(a)$, i quali soddisfino

$$d \leq a < b < c \quad (o \quad d \geq a > b > c). \tag{2.4}$$

Allora

(2.A.1) in corrispondenza di ogni numero intero $k > 0$ esiste un punto periodico di periodo k appartenente a I;

(2.A.2) esiste un insieme $S \subset I$, non numerabile e non contenente punti periodici, che soddisfa le seguenti condizioni:

(2.A.2.1) per tutti i punti x, $y \in S$, tali che $x \neq y$, si ha

$$\limsup_{n \to +\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0 \tag{2.5}$$

[1] È da porre in evidenza come, per le esigenze specifiche, tali definizioni e risultato siano relativi all'ambito uni-dimensionale.

e

$$\liminf_{n \to +\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0; \tag{2.6}$$

(2.A.2.2) per ogni punto $x \in S$ e per ogni punto periodico $z \in I$ si ha

$$\limsup_{n \to +\infty} |f^n(x) - f^n(z)| > 0. \tag{2.7}$$

Questo risultato, dovuto a Li T.-Y. e Yorke J. A. ([Li T.Y. *et al.*, 1975]), permette di identificare come classe di sistemi dinamici caotici nel senso specificato nel **CAPITOLO IV** quella i cui componenti siano continui (in I) e abbiamo un punto periodico di periodo 3. In particolare, in tale classe è anche contenuta una delle sotto-famiglie di sistemi dinamici caotici più indagate in letteratura, quella delle mappe uni-dimensionali, uni-modali, non lineari, ad un parametro $f : [0,1] \to [0,1]$, tali che

$$f(\mu; 0) = f(\mu; 1) = 0 \tag{2.8}$$

dove
$\mu \in [\mu_{min}, \mu_{max}]$: parametro
e

$$f(\mu; c) = \max_{0 < x(t) < 1} \{f[\mu; x(t)]\}. \tag{2.9}$$

È da porre in evidenza come il "regime dinamico" o, equivalentemente, il luogo d'equilibrio associato alle mappe appartenenti a tale sotto-famiglia, sia univocamente determinato dal valore assunto dal parametro μ, il quale, dunque, ricopre un ruolo cruciale. In particolare, all'aumentare del valore di tale parametro, il corrispondente "regime dinamico" o, equivalentemente, il corrispondente luogo d'equilibrio, diventa progressivamente più "complesso" fino al raggiungimento del "regime caotico" o, equivalentemente, del luogo d'equilibrio strano (per maggiori dettagli si veda [May R. M., 1976], [May R. M. *et al.*, 1976] e [Medio A., 1992])[2].

[2] Per questa ricchezza dei "regimi dinamici" assumibili, tali mappe sono anche denominate sistemi dinamici (deterministici) non lineari complessi.

3. IPOTESI ECONOMICO-FINANZIARIE

Le ipotesi economico-finanziarie necessarie per determinare quanto prospettato nella sezione 1. si sostanziano, dapprima, nella legge delle variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi; successivamente, nella definizione di un criterio di formazione del valore dei prezzi; infine, nelle loro conseguenti implicazioni sulla ipotesi di efficienza del mercato dei capitali (nelle sue varie forme).

(3.A) Legge delle variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi: si assume che tale legge sia descrivibile da una dinamica deterministica non lineare complessa; in particolare, si assume che sia descrivibile da una mappa uni-dimensionale, uni-modale, non lineare, ad un parametro appartenente alla classe introdotta in (2.A). È da porre in evidenza come una tale assunzione permetta di rappresentare una vasta gamma di "regimi dinamici", partendo da quelli semplici caratterizzati da un attrattore quale il punto fisso, passando per quelli complessi caratterizzati da un attrattore quale il ciclo limite e giungendo a quelli caotici caratterizzati da un attrattore quale l'attrattore strano. Poichè la determinazione di un dato "regime dinamico" è univocamente dovuta al valore assunto dal parametro μ, questo ultimo si può intendere come una sorta di misura sintetica delle situazioni esogene alla specifica realtà finanziaria considerata, situazioni quali, ad esempio, quelle economiche, latamente finanziarie, politiche, sociali, ... In particolare, poichè tali situazioni esogene sono mutabili nel tempo, anche lo stesso parametro μ (che ne è una sorta di misura sintetica) risulta variabile col tempo o, equivalentemente, $\mu = \mu(t)$, con $\mu(t) : [0, +\infty[\rightarrow [\mu_{min}, \mu_{max}]$ e con $\mu(\cdot) \in C^1$. Da ciò si ha la seguente legge delle variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi:

$$x(t) = f[\mu(t); x(t-1)]. \tag{3.1}$$

È da notare come, poichè $x(t) \in [0,1]$ e poichè, in generale, $r_2(t) \in [r_{2,min}, r_{2,max}]$, con $r_{2,min} < r_{2,max}$, risulti evidente la necessità di specificare la seguente biezione tra la variabile $x(t)$ e la variabile $r_2(t)$:

$$x(t) = \frac{r_2(t) - r_{2,min}}{r_{2,max} - r_{2,min}}. \tag{3.2.1}$$

In particolare, se con evidente significato finanziario, si pone $r_{2,min} = -1$ e $r_{2,max} = 1$ dalla (3.2.1) si ha

$$x(t) = \frac{r_2(t) + 1}{2}. \tag{3.2.2}$$

o, equivalentemente,

$$r_2(t) = 2x(t) - 1 \tag{3.2.3}$$

e si ha

$$P(t) = P(t-1)\exp\left\{2f\left\{\mu(t); \frac{\ln[P(t-1)] - \ln[P(t-2)] + 1}{2}\right\} - 1\right\} \stackrel{def}{\equiv} \tag{3.3.1}$$

$$\stackrel{def}{\equiv} G[\mu(t); P(t-1), P(t-2)] \stackrel{def}{\equiv} \tag{3.3.2}$$

$$\stackrel{def}{\equiv} F[\mu(t); P(t-1)] \tag{3.3.3}$$

dove
$G[\cdot; \cdot, \cdot]$, $F[\cdot; \cdot]$: funzioni che preservano la non linearità complessa della $f\{\cdot; \cdot\}$ (per la dimostrazione si veda l'APPENDICE A).
È anche da porre in evidenza come l'assunzione di una legge deterministica, anzichè stocastica, per le variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi non si traduca *sic et simpliciter* nell'automatico annullamento dell'incertezza relativa alla conoscenza dei valori delle variazioni stesse. Infatti, in questo approccio si hanno, almeno, le due seguenti fonti di incertezza[3]:
(3.A.1) quella associabile alla conoscenza imprecisa del parametro $\mu(t)$ a causa della sua natura di misura sintetica delle situazioni esogene alla specifica realtà finanziaria considerata;
(3.A.2) quella associabile alla conoscenza imprecisa del valore della condizione iniziale $x(t_0) = [r_2(t_0) + 1]/2$ a causa di quanto si specifica nella sezione 4. del **CAPITOLO IV**.

[3] Tali fonti di incertezza possono essere formalizzate mediante, ad esempio, i metodi e gli strumenti propri dell'ambito stocastico, della logica sfocata, ...

In particolare, la prima fonte di incertezza ha un uguale "impatto" sulla conoscenza dei valori delle variazioni dei logaritmi dei prezzi quale che sia il "regime dinamico" (semplice o complesso o caotico) dello specifico sistema finanziario considerato, mentre l'analogo "impatto" della seconda fonte di incertezza è minimo per un "regime dinamico" semplice (caratterizzato da un $\Lambda < 0$)[4], è medio per un "regime dinamico" complesso (caratterizzato da un $\Lambda = 0$), è massimo per un "regime dinamico" caotico (caratterizzato da un $\Lambda > 0$), unico regime in corrispondenza del quale il sistema dinamico mostra dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.

(3.B) Definizione di un criterio di formazione del valore del prezzo: si assume che tale criterio sia definibile in funzione di un dato insieme di informazioni e si assume che quest'ultimo insieme possa variare in funzione dell'"ente economico" che lo detiene, a causa del differente grado di accessibilità alle informazioni disponibili (sia pubbliche che private) che ognuno di questi "enti" ha. In particolare, poichè l'insieme completo delle informazioni disponibili non è noto, anche il prezzo "vero" della specifica attivitá finanziaria considerata risulta non noto, da cui si ha

$$P^*(t) = g^*[\Phi^*(t-1)] \tag{3.4}$$

dove
$P^*(t)$: prezzo "vero", non noto, della specifica attività finanziaria al momento t,
$\Phi^*(t-1)$: insieme completo delle informazioni rilevanti disponibili al momento $t-1$, con $\Phi^*(t-1) \supseteq \cup_{i=1}^{N} \Phi^i(t-1)$, con N numero degli "enti" operatori economici e con $\Phi^i(t-1)$ insieme delle informazioni aggiuntive rilevanti disponibili all'i-esimo operatore al momento $t-1$ (per maggiori dettagli si veda il proseguio);
$g^*[\cdot]$: funzione di formazione del prezzo "vero", non nota.
Relativamente all'"ente economico" mercato, ovvero a quell'istituto le cui determinazioni vengono assunte come punti di riferimento dagli operatori economici, si ha il seguente criterio di formazione del valore dei prezzi:

$$P^M(t) = g^M[\Phi^M(t-1)] \tag{3.5}$$

[4] Tale impatto è nullo asintoticamente.

dove
$P^M(t)$:prezzo di mercato, noto, della specifica attività finanziaria considerata al momento t,
$\Phi^M(t-1) \subset \Phi^*(t-1)$: insieme, noto, delle informazioni rilevanti disponibili al mercato al momento $t-1$,
$g^M[\cdot]$: funzione di formazione del prezzo di mercato, nota.
È quasi superfluo porre in evidenza come, per la specificazione $\Phi^M(t-1) \subset \Phi^*(t-1)$, ovvero per l'impossibilità che ha l'"ente economico" mercato ad accedere a tutte le informazioni rilevanti disponibili, si abbia

$$P^*(t) - P^M(t) = d^M(t), \; t \in [0, +\infty[\tag{3.6}$$

dove
$d^M(t) \in [d^M_{min}, 0[\cup]0, d^M_{max}]$.
A loro volta, gli "enti" operatori economici, assunte come punto di riferimento le determinazioni del mercato ($P^M(t)$, $\Phi^M(t-1)$ e $g^M[\cdot]$), definiscono razionalmente il seguente criterio di formazione del valore dei prezzi:

$$P^i(t) = g^i[\Phi^M(t-1) \cup \Phi^i(t-1)] \tag{3.7}$$

dove
$P^i(t)$: prezzo dell'i-esimo operatore della specifica attività finanziaria considerata al momento t,
$\Phi^i(t-1)$: insieme delle informazioni aggiuntive rilevanti disponibili all'i-esimo operatore al momento $t-1$, con $\Phi^i(t-1) \not\subseteq \Phi^M(t-1)$,
$g^i[\cdot] = h\{g^M[\cdot], \Phi^i(t-1)\}$: funzione di formazione del prezzo dell'i-esimo operatore.
In particolare, se $\Phi^i(t-1) = \emptyset$, ovvero se l'i-esimo operatore non dispone di informazioni aggiuntive, allora

$$P^i(t) = P^M(t) \tag{3.8}$$

o, equivalentemente,

$$g^i[\Phi^M(t-1)] = g^M[\Phi^M(t-1)], \tag{3.9}$$

se, invece, $\Phi^i(t-1) \neq \emptyset$ e $\Phi^i(t-1) \subset \Phi^*(t-1)$ e $\Phi^i(t-1) \neq \Phi^*(t-1) \backslash \Phi^M(t-1)$, ovvero l'$i$-esimo operatore dispone di alcune informazioni aggiuntive, allora si ha

$$P^*(t) - P^i(t) = d^i(t), \; t \in [0, +\infty[\tag{3.10}$$

dove
$d^i(t) \in [d_{min}, d_{max}]$, con $d^M_{min} < d^i_{min} \leq 0 \leq d^i_{max} < d^M_{max}$
e, per la razionalità degli operatori economici, ovvero per la loro capacità di formare dei valori del prezzo non "peggiori" all'aumentare della quantità di informazioni aggiuntive rilevanti loro disponibili, si ha

$$\Phi^i(t-1) \subset \Phi^j(t-1) \iff |d^i(t)| > |d^j(t)|, \; t \in [0, +\infty[\tag{3.11}$$

con $i \neq j$,
e se, infine, $\Phi^i(t-1) \neq \emptyset$ e $\Phi^i(t-1) \subset \Phi^*(t-1)$ e $\Phi^*(t-1) = \Phi^*(t-1) \backslash \Phi^M(t-1)$, ovvero l'$i$-esimo operatore dispone di tutte le informazioni aggiuntive, allora si ha

$$P^*(t) - P^i(t) = \min_{\Phi^i}(|d^i(t)|) \geq 0, \; t \in [0, +\infty[\tag{3.12}$$

È da porre in evidenza come le varie funzioni di formazione del prezzo precedentemente introdotte ($g^*[\cdot]$, $g^M[\cdot]$ e $g^i[\cdot]$) determinino, seppur implicitamente, anche i valori di tutte quelle quantità utili per la formazione del prezzo stesso, quantità quali, ad esempio, $\mu(t)$. È anche da porre in evidenza come la definizione di un tale criterio di formazione del prezzo comporti la conoscenza imprecisa del valore della condizione iniziale per la (3.1) da parte dell'i-esimo investitore, cioè come si abbia

$$x^i(t_0) - x(t_0) = c^i(t_0) \tag{3.13}$$

dove
$x^i(t_0)$: valore della condizione iniziale disponibile all'i-esimo investitore,
$c^i(t_0) = \ln\{[P^*(t_0) - d^i(t_0)][P^*(t_0-1)]/[P^*(t_0-1) - d^i(t_0-1)][P^*(t_0)]\}/2$
(per la dimostrazione si veda l'APPENDICE B).

La seconda di queste due ultime specificazioni quantifica l'incertezza di cui al punto (3.A.2).

(3.C) Implicazioni sulla ipotesi di efficienza del mercato dei capitali: le implicazioni su tale ipotesi conseguenti dagli assunti introdotti in (3.A) ed in (3.B) si possono variamente sostanziare. In particolare, se, banalmente, $\Phi^i(t-1) = \emptyset$ per ogni $i \in \{1, \ldots, N\}$, dove N è la numerosità degli operatori economici, ovvero se ogni operatore non dispone di informazioni aggiuntive, allora, per le (3.7), (3.9) e (3.5), si ha

$$P^i(t) = g^i[\Phi^M(t-1) \cup \emptyset] = g^i[\Phi^M(t-1)] = g^M[\Phi^M(t-1)] = P^M(t) \quad (3.14)$$

o, equivalentemente, si ha l'accettazione dell'ipotesi di efficienza del mercato dei capitali; se, invece più realisticamente, $\Phi^i(t-1) \neq \emptyset$ per almeno un $i \in \{1, \ldots, N\}$, ovvero se almeno un operatore dispone di alcune o di tutte le informazioni aggiuntive, allora per quell'i-esimo operatore, per le (3.7), (3.10) e (3.5), si ha

$$P^i(t) = g^i[\Phi^M(t-1) \cup \Phi^i(t-1)] \neq g^M[\Phi^M(t-1)] = P^M(t) \qquad (3.15)$$

o, equivalentemente, si ha il rifiuto dell'ipotesi di efficienza del mercato dei capitali. È da porre in evidenza come si abbia l'accettazione od il rifiuto dell'ipotesi di efficienza del mercato dei capitali nella forma (o debole o semi-forte o forte) implicata dalla tipologia delle informazioni contenute in a $\Phi^M(t-1)$.

4. DINAMICA DEL VALORE DI EQUILIBRIO DI UNA OPZIONE CALL DI TIPO EUROPEO

In questa sezione si ricava un'equazione differenziale alle derivate parziali che descrive la dinamica del valore d'equilibrio (parziale) di una opzione call di tipo europeo nell'ipotesi in cui la legge delle variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi sia descrivibile da una dinamica appartenente alla classe introdotta in (3.A). In particolare, per la determinazione di tale equazione, oltre agli assunti economico-finanziari introdoti in (3.A), (3.B) e (3.C), sono anche necessari i seguenti assunti "classici" relativi agli aspetti topici delle attività finanziarie, delle opzioni e del mercato:

(4.A) si assume che le attività finanziarie non producano flussi derivati quali, ad esempio, i dividendi,

(4.B) si assume l'assenza dei costi di transazione e dell'imposizione fiscale sia per le attività finanziarie che per le opzioni,

(4.C) si assume la impossibilità di effettuare arbitraggi,

(4.D) si assume che le contrattazioni avvengano con continuità nel tempo,

(4.E) si assume che l'intensità istantanea di rendimento di una attività finanziaria priva di rischio sia noto e sia costante nel tempo,

(4.F) si assume che sia possibile ricevere in prestito ammontari di danaro al tasso di interesse di una attività finanziaria priva di rischio,

(4.G) si assume la possibilità di vendere allo scoperto le attività finanziarie.

Dato quanto da ultimo premesso, dalla (3.3.3) si ha la seguente dinamica del valore del prezzo[5]:

$$dP(t) = dF = \frac{\partial F}{\partial \mu(t)} d\mu(t) + \frac{\partial F}{\partial P(t-1)} dP(t-1). \tag{4.1}$$

È da porre in evidenza come, nella deduzione della (4.1), il parametro $\mu(t)$ sia stato considerato come una variabile; ciò per la sua natura di misura sintetica delle situazioni esogene alla specifica realtà finanziaria considerata e, dunque, mutabile col tempo, come specificato in (3.A). Invece, relativamente alla legge che definisce il valore della opzione call di tipo europeo, si ha (ad esempio si veda [Cox J. C. *et al.*, 1985])

$$C_t = C[t, P(t)] = C\{t, F[\mu(t); P(t-1)]\}, \tag{4.2}$$

[5] Da qui in poi, per una maggiore semplicità di notazione, si omettono gli argomenti della $F[\mu(t); P(t-1)]$, peraltro reintroducendoli ogni qual volta tale omissione possa generare ambiguità.

dove
$C\{\cdot,\cdot\}$: funzione che preserva la non linearità complessa della $F[\cdot;\cdot]$, con $C\{\cdot,\cdot\} \in C^1$ e, classicamente, con $\partial C_t/\partial t < 0$ e $\partial C_t/\partial P(t) > 0$,
dalla quale è possibile ottenere la seguente dinamica:

$$dC_t = \frac{\partial C_t}{\partial t}dt + \frac{\partial C_t}{\partial P(t)}dP(t) = \frac{\partial C_t}{\partial t}dt + \frac{\partial C_t}{\partial P(t)}dF. \tag{4.3}$$

Sostituendo la (4.1) nella (4.3) si ha

$$dC_t = \frac{\partial C_t}{\partial t}dt + \frac{\partial C_t}{\partial P(t)}\left[\frac{\partial F}{\partial \mu(t)}d\mu(t) + \frac{\partial F}{\partial P(t-1)}dP(t-1)\right]. \tag{4.4}$$

Ora, si considera un portafoglio composto da N_P lotti minimi di acquisto della specifica attività finanziaria considerata, con N_P non noto, e da N_C lotti minimi di acquisto di opzioni call relative alla stessa attività finanziaria, con N_C noto, portafoglio per il quale si ha il seguente valore:

$$W_t = N_P\, P(t) + N_C\, C_t. \tag{4.5}$$

Dalla (4.5) è possibile ottenere la seguente dinamica

$$dW_t = N_P\, dP(t) + N_C\, dC_t. \tag{4.6}$$

Sostituendo la (4.1) e la (4.3) nella (4.6) si ha

$$\begin{aligned} dW_t &= N_P\left[\frac{\partial F}{\partial \mu(t)}d\mu(t) + \frac{\partial F}{\partial P(t-1)}dP(t-1)\right] + \\ &\quad + N_C\left\{\frac{\partial C_t}{\partial t}dt + \frac{\partial C_t}{\partial P(t)}\left[\frac{\partial F}{\partial \mu(t)}d\mu(t) + \frac{\partial F}{\partial P(t-1)}dP(t-1)\right]\right\} = && (4.7.1) \\ &= N_C\frac{\partial C_t}{\partial t}dt + \left[N_P\frac{\partial F}{\partial \mu(t)} + N_C\frac{\partial C_t}{\partial P(t)}\frac{\partial F}{\partial \mu(t)}\right]d\mu(t) + \\ &\quad + \left[N_P\frac{\partial F}{\partial P(t-1)} + N_C\frac{\partial C_t}{\partial P(t)}\frac{\partial F}{\partial P(t-1)}\right]dP(t-1). && (4.7.2) \end{aligned}$$

Questa dinamica del valore del portafoglio dipende funzionalmente anche dalle due fonti di incertezza introdotte, rispettivamente, in (3.A.1), ovvero dalla conoscenza imprecisa del parametro $\mu(t)$, ed in (3.A.2), ovvero dalla conoscenza imprecisa del valore della condizione iniziale $x(t_0)$ a causa della conoscenza imprecisa del prezzo "vero" $P^*(t_0)$ da parte dell'i-esimo investitore. Al fine di annullare l'impatto su tale dinamica di una delle due fonti di incertezza, si determina il numero di lotti minimi di acquisto della specifica attività finanziaria da detenere nel portafoglio stesso per azzerare il coefficiente che pesa la variazione della prescelta fonte di incertezza. In particolare, per azzerare il coefficiente che pesa la variazione del parametro $\mu(t)$, tale determinazione si ottiene ponendo

$$N_P \frac{\partial F}{\partial \mu(t)} + N_C \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} \frac{\partial F}{\partial \mu(t)} = 0 \tag{4.8}$$

da cui si ha la seguente soluzione:

$$N_P^{d\mu(t)} = -N_C \frac{\partial C_t}{\partial P(t)}, \tag{4.9}$$

mentre, per azzerare il coefficiente che pesa la variazione del prezzo $P(t-1)$, tale determinazione si ottiene ponendo

$$N_P \frac{\partial F}{\partial P(t-1)} + N_C \frac{\partial C_t}{\partial P(t)} \frac{\partial F}{\partial P(t-1)} = 0 \tag{4.10}$$

da cui si ha la seguente soluzione:

$$N_P^{dP(t-1)} = -N_C \frac{\partial C_t}{\partial P(t)}, \tag{4.11}$$

È da porre in evidenza come le due distinte determinazioni $N_P^{d\mu(t)}$ e $N_P^{dP(t-1)}$ siano identiche, da cui sostituendo la (4.9) o, equivalentemente, la (4.11) nella (4.5), mediante alcuni elementari passaggi algebrici, si ha

$$W_t = N_C \left[-\frac{\partial C_t}{\partial P(t)} P(t) + C_t \right] \tag{4.12}$$

e, sostituendo la (4.9) o, equivalentemente, la (4.11) nella (4.7.2), mediante alcuni elementari passaggi algebrici, si ha

$$dW = N_C \frac{\partial C_t}{\partial t} dt. \tag{4.13}$$

Ora, la dinamica del portafoglio così immunizzato deve replicare la dinamica di una attività finanziaria priva di rischio, cioé si deve avere

$$\frac{dW_t}{W_t} = \delta dt \tag{4.14}$$

dove
δ: intensità istantanea di rendimento di una attività finanziaria priva di rischio.
Sostituendo la (4.12) e la (4.13) nella (4.14), mediante alcuni elementari passaggi, si ha

$$\frac{(\partial C_t/\partial t)dt}{-P(t)(\partial C_t/\partial P(t)) + C_t} = \delta dt \tag{4.15}$$

da cui, infine, mediante altri elementari passaggi, si ha la seguente dinamica del valore d'equilibrio (parziale) di una opzione call di tipo europeo:

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} = \delta C_t - \delta P(t)\frac{\partial C_t}{\partial P(t)} \quad \left(o \quad \frac{\partial C_t}{\partial t} - \delta C_t + \delta P(t)\frac{\partial C_t}{\partial P(t)} = 0 \right). \tag{4.16}$$

È da porre in evidenza come tale equazione differenziale alle derivate parziali differisca da quella proposta per la stessa dinamica da Black F. e da Scholes M. ([Black F. *et al.*, 1973]) per l'ulteriore "presenza addizionale" in questa ultima di un termine di secondo grado ed è anche da porre in evidenza come, in particolare, valga la seguente relazione:

$$\lim_{\sigma \to 0}\left\{ \frac{\partial C_t}{\partial t} - \delta C_t + \delta P(t)\frac{\partial C_t}{\partial P(t)} - \frac{1}{2}\sigma^2 [P(t)]^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial [P(t)]^2} \right\} = \frac{\partial C_t}{\partial t} - \delta C_t + \delta P(t)\frac{\partial C_t}{\partial P(t)} = 0 \tag{4.17}$$

dove

$\lim_{\sigma \to 0}\{\cdot\}$: limite il cui argomento specifica la dinamica derivata da Black F. e da Scholes M.,
σ: scarto quadratico medio di un processo stocastico del tipo moto Browniano standard che, secondo le ipotesi assunte da Black F. e da Scholes M., descrive le variazioni delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi.

5. SOLUZIONE DELLA (4.16)

In questa sezione si determina la soluzione della equazione differenziale quasi lineare non omogenea alle derivate parziali del primo ordine (4.16) che descrive la dinamica del valore d'equilibrio (parziale) di una opzione di tipo europeo. A tal fine è opportuno riesprimere la (4.16) stessa nella seguente forma:

$$Q[C_t, P(t), t] = R[C_t, P(t), t]\frac{\partial C_t}{\partial P(t)} + S[C_t, P(t), t]\frac{\partial C_t}{\partial t} \tag{5.1}$$

dove
$Q[C_t, P(t), t] = \delta C_t$,
$R[C_t, P(t), t] = \delta P(t)$,
$S[C_t, P(t), t] = 1$.
Ora, assunta la continuità della $Q[C_t, P(t), t] = \delta C_t$ in $[0, T] \times \mathbf{R}_0^+$, data, per le (3.1) e (3.3.1), la continuità della $R[C_t, P(t), t] = \delta P(t)$ in $\mathbf{R}_0^+$, data, banalmente, la continuità della $S[C_t, P(t), t] = 1$ e dato, per la terza specificazione della (5.1), il non simultaneo annullamento delle $Q[\cdot,\cdot,\cdot]$, $R[\cdot,\cdot,\cdot]$ e $Q[\cdot,\cdot,\cdot]$, mediante la integrazione del sistema ausiliario di Lagrange di equazioni differenziali ordinarie, si ha la seguente soluzione generale della (4.16) espressa in forma esplicita rispetto alla C_t (per maggiori dettagli si veda [Elsgolts L. E., 1981]):

$$C_t = H\{P(t)\exp[\delta(T-t)]\}\exp[-\delta(T-t)] \tag{5.2}$$

dove

$H[\cdot]$: funzione arbitraria.
È da porre in evidenza come, al momento $t = T$, debba essere rispettata la seguente condizione finale:

$$C_T = H[P(T)] = \max\{0, P(T) - X\} \tag{5.3}$$

dove
C_T: valore della opzione call di tipo europeo al momento T,
X: prezzo di esercizio della opzione call di tipo europeo.
È anche da porre in evidenza come sia possibile determinare una interessante soluzione particolare della (4.16) calcolando, in analogia a quanto posto in evidenza nella (4.17), il limite, per σ che tende a 0, della soluzione particolare determinata da Black F. e Scholes M. per la loro equazione differenziale alle derivate parziali. Dal calcolo di tale limite si ha

$$C_t = \begin{cases} 0 & \text{se } P(t) < X\exp[-\delta(T-t)] \\ P(t) - X\exp[-\delta(T-t)] & \text{se } P(t) > X\exp[-\delta(T-t)] \end{cases} \tag{5.4}$$

(per la dimostrazione si veda l'APPENDICE C) che determina la specificazione lineare della $H[\cdot]$ arbitraria, specificazione lineare le cui solo apparenti semplicità ed ovvietà non devono trarre in inganno, date le peculiarità della dinamica (caotica) che descrive la legge di evoluzione del prezzo $P(t)$.

6. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI

In questa sezione si presentano le seguenti osservazioni e considerazioni finali relative sia agli assunti economico-finanziari che ai risultati:

(6.A) l'assunzione di un criterio di formazione del valore del prezzo definibile in funzione di un dato insieme di informazioni, insieme variabile in funzione dell'"ente economico" che lo detiene e, dunque, l'assunzione dell'ipotesi di non omogeneità informativa degli operatori economici, risulta rappresentare questo specifico aspetto della realtà economico-finanziaria più realisticamente di quanto non lo sia dalla "classica" assunzione dell'ipotesi di omogeneità informativa;

(6.B) le implicazioni sulla ipotesi di efficienza del mercato dei capitali conseguenti dagli assunti economico-finanziari introdotti in (3.A) ed in (3.B) si possono variamente sostanziare ("classica" accettazione o "più realistico" rifiuto della ipotesi stessa), la qual cosa risulta evidenziare la generalità di un tale sistema di assunti, sistema che permette di rappresentare distinte e alternative modalità di uno stesso aspetto della realtà economico-finanziaria;

(6.C) interessanti particolarizzazioni della arbitraria funzione $H[P(t)]$, soluzione generale della (4.16), sono quelle che possono permettere il "controllo" (in forma, ovviamente, non banale) dell'impatto della dinamica caotica e, dunque, in sostanza, della sua dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, che descrive la legge di evoluzione del prezzo $P(t)$ sul valore della opzione C_t.

APPENDICE A

Sostituendo la prima delle due specificazioni della (3.1) nella stessa (3.1) si ha

$$\frac{\ln[P(t)] - \ln[P(t-1)] + 1}{2} = f\left\{ \mu(t); \frac{\ln[P(t-1)] - \ln[P(t-2)] + 1}{2} \right\}, \tag{A.1}$$

dalla quale, mediante alcuni elementari passaggi, si ha

$$\ln\left[\frac{P(t)}{P(t-1)}\right] = 2f\left\{ \mu(t); \frac{\ln[P(t-1)] - \ln[P(t-2)] + 1}{2} \right\} - 1, \tag{A.2}$$

dalla quale infine, mediante alcuni altri elementari passaggi, si ha

$$P(t) = P(t-1)\exp\left\{ 2f\left\{ \mu(t); \frac{\ln[P(t-1)] - \ln[P(t-2)] + 1}{2} \right\} - 1 \right\}. \tag{A.3}$$

APPENDICE B

Sostituendo la prima delle due specificazioni della (3.1) nella (3.14) si ha

$$c^i(t_0) = \frac{[r_2^i(t_0)+1]}{2} - \frac{[r_2(t_0)+1]}{2} = \frac{1}{2}[r_2^i(t_0) - r_2(t_0)] \tag{B.1}$$

dove
$r_2^i(t_0)$: valore della variazione iniziale delle trasformazioni logaritmiche dei prezzi.
Sostituendo la (1.2) nella (B.1) si ha

$$c^i(t_0) = \frac{1}{2}\{\ln[P^i(t_0)] - \ln[P^i(t_0-1)] - \ln[P^*(t_0)] + \ln[P^*(t_0-1)]\}. \tag{B.2}$$

Dalla (3.10) è possibile ottenere la seguente relazione

$$P^i(t_0) = P^*(t_0) - d^i(t_0). \tag{B.3}$$

Ora, sostituendo la (B.3) nella (B.2) si ottiene la seconda specificazione della (3.14), cioè si ha

$$\begin{aligned} c^i(t_0) &= \frac{1}{2}\{\ln[P^*(t_0) - d^i(t_0)] - \ln[P^*(t_0-1) - d^i(t_0)] - \ln[P^*(t_0)] + \ln[P^*(t_0-1)]\} = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{[P^*(t_0) - d^i(t_0)]P^*(t_0-1)}{[P^*(t_0-1) - d^i(t_0-1)]P^*(t_0)}\right\}. \end{aligned} \tag{B.4}$$

APPENDICE C

Data la soluzione particolare determinata da Black F. e Scholes M. per la loro equazione differenziale alle derivate parziali

$$C_t = \Phi_N(d_1)P(t) - \Phi_N(d_2)X\exp[-\delta(T-t)] \tag{C.1}$$

dove
$\Phi_N(\cdot)$: funzione di ripartizione di una variabile casuale normale standardizzata,
$d_1=\{\ln[P(t)/X]+(\delta+\sigma^2/2)(T-t)\}/\sigma\sqrt{T-t}=\{\ln[P(t)/X]+\delta(T-t)\}/\sigma\sqrt{T-t}+(\sigma/2)\sqrt{T-t}$,
$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$,
si ha, mediante alcuni elementari passaggi,

$$\lim_{\sigma\to 0} C_t = \lim_{\sigma\to 0} \Phi_N(d_1)P(t) - \lim_{\sigma\to 0} \Phi_N(d_1-\sigma\sqrt{T-t})X\exp[-\delta(T-t)]. \quad (C.2)$$

In particolare, calcolando il limite del primo addendo del secondo membro, si ha

$$\lim_{\sigma\to 0} \Phi_N(d_1)P(t) = \lim_{\sigma\to 0} \Phi_N\left\{\frac{\ln[P(t)/X]+\delta(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}+\frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t}\right\}P(t) =$$
$$=\begin{cases}\Phi_N(-\infty)P(t) & \text{se } \ln[P(t)/X]+\delta(T-t)<0\\ \Phi_N(+\infty)P(t) & \text{se } \ln[P(t)/X]+\delta(T-t)>0\end{cases} =$$
$$=\begin{cases}0P(t)=0 & \text{se } \ln[P(t)/X]+\delta(T-t)<0\\ 1P(t)=P(t) & \text{se } \ln[P(t)/X]+\delta(T-t)>0\end{cases} \quad (C.3)$$

dove
$\ln[P(t)/X]+\delta(T-t)<0 \Rightarrow P(t)<X\exp[-\delta(T-t)]$,
$\ln[P(t)/X]+\delta(T-t)>0 \Rightarrow P(t)>X\exp[-\delta(T-t)]$,
mentre, calcolando il limite del secondo addendo del secondo membro, si ha

$$\lim_{\sigma\to 0} \Phi_N(d_1-\sigma\sqrt{T-t})X\exp[-\delta(T-t)] = \lim_{\sigma\to 0} \Phi_N(d_1)X\exp[-\delta(T-t)] =$$
$$=\begin{cases}\Phi_N(-\infty)X\exp[-\delta(T-t)] & \text{se } \ln[P(t)/X]+\delta(T-t)<0\\ \Phi_N(+\infty)X\exp[-\delta(T-t)] & \text{se } \ln[P(t)/X]+\delta(T-t)>0\end{cases} =$$
$$=\begin{cases}0X\exp[-\delta(T-t)]=0 & \text{se } \ln[P(t)/X]+\delta(T-t)<0\\ 1X\exp[-\delta(T-t)]=X\exp[-\delta(T-t)] & \text{se } \ln[P(t)/X]+\delta(T-t)>0\end{cases}. \quad (C.4)$$

Ora, sostituendo le (C.3) e (C.4) nella (C.2) si ottiene la (5.4).

BIBLIOGRAFIA

[1] AKGIRAY, V. e BOOTH, G. (1988) The Stable-Law Model of Stock Returns, *Journal of Business & Economic Statistics*, 6, 51-57.

[2] ALLEVI, E., DOLCI, P. V. e ZAMBRUNO, G. M. (1993) Market Efficiency and Chaotic Behaviour, lecture presentata all'*EURO Working Group on Financial Modelling*, 14th Meeting, Mantova.

[3] AMBROSE, B. W., ANCEL, E. W. e GRIFFITHS, M. D. (1993) Fractal Structure in the Capital Market Revisited, *Financial Analysts Journal*, May-June, 73-77.

[4] APTECH SYSTEMS, Inc. (1991) *The GAUSS System Version 2.2.* Aptech Systems, Inc., Washington.

[5] BACHELIER, L. (1900) Theory of Speculation, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, in COOTNER, P. H. (ed.) (1964) *The Random Character of Stock Market Prices*, 17-78, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusets.

[6] BADII, R. e POLITI, A. (1985) Statistical Description of Chaotic Attractors: The Dimension Function, *Journal of Statistical Physics*, 40, 5/6, 725-750.

[7] BALDI, P. (1984) *Equazioni Differenziali Stocastiche e Applicazioni. Quaderni dell'Unione Matematica Italiana.* Pitagora Editrice, Bologna.

[8] BALMER, D. W., BOULTON, M. e SACK, R.A. (1974) Optimal Solutions in Parameters Estimation Problems for the Cauchy Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 69, 345, 238-245.

[9] BARNETT, W. e CHEN, P. (1988) Deterministic Chaos and Fractal Attractors as Tools for Nonparametric Dynamical Econometric

Inference: with an Application to the Divisia Monetarty Aggegates, *Mathl. Comput. Modelling*, 10, 4, 275-296.

[10] BARTLETT, M. S. (1990) Chance or Chaos ? (con discussione), *J. R. Statist. Soc. A*, 153, 3, 321-347.

[11] BENHABIB, J. e DAY, R. H. (1981) Rational Choice and Erratic Behaviour, *Review of Economic Studie*, XLVIII, 459-471.

[12] BENETTIN, G., GALGANI, L. e STRELCYN, J.-M. (1976) Kolmogorov Enropy and Numerical Experiments, *Physical Review A*, in HAO, B.-L. (ed.) (1984) *Chaos*, 411-418, World Scientific Publishing, Singapore.

[13] BERGÉ, P., POMEAU, Y. e VIDAL, C. (1986) *Order within Chaos. Towards a Deterministic Approach to Turbulence.* J. Wiley & Sons, New York.

[14] BLACK, F. e SCHOLES, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.

[15] BOOTH, G. G., KAEN, F. R. e KOVEOS, P. E. (1982) R/S Analysis of Foreign Exchange Rates under Two International Monetary Regimes, *Journal of Monetary Economics*, 10, 407-415.

[16] BOOTH, G. G., MARTIKAINEN, T., SARKAR, S. S., VIRTANEN, I. e YLI-OLLI, P. (1992) Nonlinear Dependence in Finnish stock Returns, lecture presentata all'*EURO Working Group on Financial Modelling*, 12th Meeting, Helsinki.

[17] BRASOLIN, A., CORAZZA, M. e NARDELLI, C. (1992) Autosimilarità e Comportamento Non Lineare di un Indice Azionario nel Mercato Italiano, *Atti del XVI Convegno A.M.A.S.E.S.*, Treviso, 155-170.

[18] BROCK, W. A. (1986) Distinguish Random and Deterministic Systems: Abridged Version, *Journal of Economic Theory*, 40, 168-195.

[19] BROCK, W. A., HSIEH, D. A. e LeBARON, B.(1991) *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence.* The MIT Press, Cambridge.

[20] BROCK, W. A. e MALLIARIS, A. G. (1989) *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics.* North-Holland, Amsterdam.

[21] BUTLER, A. (1990) A Methodological Approach to Chaos: are Economists Missing the Point?, *Federal Reserve Bank of St. Louis*, 72, 2, 36-48.

[22] CANESTRELLI, E., CIPRIANI, M. C. e CORAZZA, M. (1993a) Determinazione dei Parametri di una Funzione di Distribuzione Pareto-Lévy Stabile, *Rendiconti del Comitato per gli Studi Economici*, XXX/XXXI, 111-134.

[23] CANESTRELLI, E., CIPRIANI, M. C. e CORAZZA, M. (1993b) Pacchetto Software per la Determinazione dei Parametri di una Funzione di Distribuzione Pareto-Lévy Stabile, Università degli Studi di Venezia, Venezia.

[24] CANESTRELLI, E. e NARDELLI, C. (1991a) *Criteri per la Selezione del Portafoglio*. G. Giappichelli Editore, Torino.

[25] CANESTRELLI, E. e NARDELLI, C. (1991b) Distribuzioni Stabili di Lévy dei rendimenti nel mercato azionario italiano, *Atti del XV Convegno A.M.A.S.E.S.*, Grado, 145-158.

[26] CAPPUCCIO, N. e ORSI, R. (1991) *Econometria*. Società Editrice il Mulino, Bologna.

[27] CASALEGGIO, A., CORANA, A. e ROLANDO C. (1993) Metodi di Quantificazione del Caos Deterministico in Serie Temporali e Valutazione dei Parametri, in BELARDINELLI, E. e CERUTTI, S. (eds.) (1993) *Biosistemi e Complessità*, 113-134, Pàtron Editore, Bologna.

[28] CASTAGNOLI, E. (1988) *Aspetti introduttivi delle Opzioni Finanziarie*. Cooperativa di Cultura "Lorenzo Milani", Milano.

[29] CERUTTI, S. e SIGNORINI M. G. (1993) Il Segnale di Variabilità Cardiaca: tra Ritmi, Caso e Caos, in BELARDINELLI, E. e CERUTTI, S. (eds.) (1993) *Biosistemi e Complessità*, 159-180, Pàtron Editore, Bologna.

[30] CHAMBERS, J. M., MALLOWS, C. L. e STUCK, B. W. (1976) A Method for Simulating Stable Random Variables, *Journal of the American Statistical Association*, 71, 354, 340-344.

[31] CHEUNG, Y.-W. e LAI K. S. (1993) Do Gold Market Returns Have Long Memory?, *The Financial Review*, 28, 2, 181-202.

[32] COOTNER, P. (1963) Comments on the Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, in COOTNER, P. H. (ed.) (1964) *The Random Character of Stock Market Prices*, 333-337, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.

[33] CORAZZA M. (1989/90) *Approccio alle Serie Storiche con Dinamiche Nonlineari Complesse.* Tesi di Laurea, Università degli Studi di Venezia, Venezia.

[34] CORAZZA, M., MALLIARIS, A. G. e NARDELLI, C. (1993a) Searching for Fractal Structure in Agricultural Futures Market, lecture presentata all' *EURO Working Group on Financial Modelling*, Mantova, 14th Meeting.

[35] CORAZZA, M. e NARDELLI, C. (1993b) Analisi della Struttura Frattale del Mercato Finanziario Italiano, *Rendiconti del Comitato per gli Studi Economici*, XXX/XXXI, 171-186.

[36] CORAZZA, M. e NARDELLI, C. (1993c) Fenomeno della Dipendenza a Lungo Termine nel Mercato Finanziario Italiano, *Atti del XVII Convegno A.M.A.S.E.S.*, Ischia, 359-382.

[37] CORAZZA, M. e NARDELLI, C. (1993d) Looking for Fractal Structure in the Italian Capital Market, lecture presentata all' *International Conference on Predictability and Nonlinear Modelling in Natural Sciences and Economics*, Wageningen.

[38] CORAZZA, M. e NARDELLI, C. (1993e) Pacchetto Software per la Determinazione dell'Esponente di Hurst, Università degli Studi di Venezia, Venezia.

[39] CORAZZA, M. e NARDELLI, C. (1994) Un Approccio Deterministico Non Lineare Complesso alla Valutazione delle Opzioni Finaziarie, *Quaderno del Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica dell'Università degli Studi di Venezia*, 1-23.

[40] COX, J. C. e RUBINSTEIN, M. (1985) *Options Markets.* Prentice-Hall, Inc., Englewood.

[41] CRAMER, F. (1994) *Caos e Ordine. La complessa Struttura del Vivente.* Bollati Boringhieri, Torino.

[42] CRUTCHFIELD, J. P., FARMER, J. D., PACKARD, N. H. e SHAW, R. S. (1987) Il caos, *Le Scienze*, XX, 222, 10-21.

[43] CUTLAND, N. J., KOPP, P. E. e WILLINGER, W. (1993) Stock Price Return and the Joseph Effect: Fractional Version of the Black-Scholes Model, *Mathematics Research Reports. School of Mathematics. University of Hull.*, 6, 12, 1-29.

[44] DABONI, L. (1980) *Calcolo delle Probabilità ed Elementi di Statistica.* U.T.E.T., Torino.

[45] DAVIES, R. B. e HARTE D. S. (1987) Tests for Hurst Effect, *Biometrika*, 74, 1, 95-101.

[46] DeCOSTER, G. P., LABYS, W. C. e MITCHELL, D. W. (1992) Evidence of Chaos in Commodity Futures Prices, *The Journal of Futures Markets*, 12, 3, 291-305.

[47] DEVANEY, R. L. (1986) *An Introduction to Chaotic Dynamical System.* The Benjamin/Cummings Publishing, Menlo Park.

[48] DEVANEY, R. L. (1990) *Caos e Frattali. Matematica dei Sistemi Dinamici e Applicazioni al Calcolatore.* Addison-Wesley, Milano.

[49] DuMOUCHEL, W. H. (1975) Stable Distribution in Statistical Inference: 2. Information from Stably Distributed Samples, *Journal of the American Statistical Association*, 70, 350, 386-393.

[50] DuMOUCHEL, W. H. (1983) Estimating the Stable Index α in order to Measure Tail Thickness: a Critique, *The Annals of Statistics*, 11, 1019-1031.

[51] ECKMANN, J.-P., OLIFFSON KAMPHORST, S., RUELLE, D. e CILIBERTO, S. (1986) Liapunov Exponents from Time Series, *Physical Review A*, 34, 6, 4971-4979.

[52] ECKMANN, J.-P. e RUELLE, D. (1985) Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors, *Review of Modern Physics*, 57, 3, I, 617-655.

[53] ELSGOLTS, L. E. (1981) *Equazioni Differenziali e Calcolo delle Variazioni.* Editori Riuniti, Roma.

[54] FALCONER, K. (1990) *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications.* John Wiley & Sons, Chichester.

[55] FAMA, E. F. (1963) Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis, *Journal of Business*, in COOTNER, P. H. (ed.) (1964) *The Random Character of Stock Market Prices*, 297-306, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.

[56] FAMA, E. F. (1991) Efficient Capital Markets: II, *The Journal of Finance*, XLVI, 5, 1575-1617.

[57] FAMA, E. F. e ROLL, R. (1971) Parameter Estimates for Symmetric Stable Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 66, 334, 331-338.

[58] FELLER, W. (1971) *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 1-2. J. Wiley & Sons, New York, New York.

[59] FIELITZ, B. D. e SMITH, E. W. (1972) Asymmetric Stable Distributions of Stock Price Changes, *Journal of the American Statistical Association*, 67, 340, 813-814.

[60] FIELITZ, B. D. e ROZELLE, J. P. (1983) Stable Distributions and the Mixtures of Distributions Hypotheses for Common Stock Returns, *Journal of the American Statistical Association*, 78, 381, 28-36.

[61] FOX, R. e TAQQU, M. S. (1986) Large-Sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series, *The Annals of Statistics*, 14, 2, 517-532.

[62] FRANK, M. e STENGOS, T. (1988) Chaotic Dynamics in Economics Time-Series, *Journal of Economic Surveys*, 2, 2, 103-133.

[63] FREZZA S. (1993/94) *Anomalie di Calendario nel Mercato Azionario Italiano.* Tesi di Laurea, Università degli Studi di Venezia, Venezia.

[64] GARBADE, K. (1991) *Teoria dei Mercati Finanziari.* Società editrice il Mulino, Bologna.

[65] GIORELLO, G. e MORINI, S. (1982) Teoria/Modello, in *Enciclopedia*, XV, 662-676, Casa Editrice Einaudi, Torino.

[66] GLASNERT, E. e WEISS, B. (1993) Sensitive Dependence on Initial Conditions, *Nonlinearity*, 6, 1067-1075.

[67] GORI, F. e RINALDI, F. (1989) Comportamenti Caotici e Biforcazioni in un Modello Dinamico Discreto del Mercato Azionario, *Quaderno del Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica dell'Università degli Studi di Venezia*, 1-46.

[68] GRASSBERGER, P. e PROCACCIA, I. (1983a) Measuring the Strangeness of Strange Attractors, *Physica 9D*, 189-208.

[69] GRASSBERGER, P. e PROCACCIA, I. (1983b) Estimation of the Kolmogorov Entropy from a Chaotic Signal, *Physical Review A*, 28,

2591-2593.

[70] GREENE, M. T. e FIELITZ, B. D. (1977) Long-term Dependence in Common Stock Returns, *J. of Fin. Econ.*, 4, 339-349.

[71] GREENE, M. T. e FIELITZ, B. D. (1979) The Effect of Long-term Dependence on Risk-Return Models of Common Stocks, *Operations Research*, 27, 5, 944-951.

[72] HELMS, B. P., KAEN, F. R. e ROSENMAN, R. E. (1984) Memory in Commodity Futures Contracts, *The Journal of Future Market*, 4, 4, 559-567.

[73] HELMS, B. P. e MARTELL, T. F. (1985) An Examination of the Distribution of Futures Price Changes, *The Journal of Futures Markets*, 5, 2, 259-272.

[74] HINICH, M. J. e PATTERSON, D. M. (1989) Evidence of Nonlinearity in the Trade-by-Trade Stock Market Return generating Process, in BARNETT, W. A., GEWEKE, J. e SHELL, K. (eds.) (1989) *Economic Complexity. Chaos, Sunspots, Bubbles, and Nonlinearity.* Cambridge University Press, Cambridge.

[75] HSIEH, D. A. (1991) Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets *The Journal of Finance*, XLVI, 5, 1839-1877.

[76] JACOBSEN, B. (1994) Classical and Modified Rescaled Range Analysis: Some Evidence, in GRASMAN, J. e van STRATEN G. (eds.) *Predictability and Nonlinear Modelling in Natural Sciences and Economics*, 638-647, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

[77] KANTOROVIČ, L. V. e AKILOV, G. P. (1980) *Analisi Funzionale.* Editori Riuniti, Roma.

[78] KARATZAS, I. e SHREVE, S. E. (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, New York.

[79] KOUTROUVELIS, I. A. (1980) Regression-type Estimation of the Parameters of Stable Laws, *Journal of the American Statistical Association*, 75, 37, 918-928.

[80] KOUTROUVELIS, I. A. (1981) An Iterative Procedure for the Estimation of the Parameters of Stable Laws, *Comm. Statist. - Simula. Computa.*, B10(1), 29-39.

[81] KOUTROUVELIS, I. A. e BAUER, D. F. (1982) Asymptotic Distribution of Regression-type Estimators of Parameters of Stable Laws, *Commun. Statist. - Theor. Meth.*, 11(23), 2715-2730.

[82] KOUTROUVELIS, I. A. (1982) Estimation of Stable Location and Scale in Cauchy Distributions using the Empirical Characteristic Function, *Biometrika*, 69, 1, 205-213.

[83] LAMBERT, K. e BRITTAN, G. G. jr. (1981) *Introduzione alla Filosofia della Scienza.* Editore Boringhieri, Torino.

[84] LANDENNA, G. (1980) *Fondamenti di Statistica Descrittiva.* Società Editrice il Mulino, Bologna.

[85] LASOTA, A. e MACKEY, M. C. (1985) *Probabilistic Properties of Deterministic Systems.* Cambridge University Press, Cambridge.

[86] LEITCH, R. A. e PAULSON, A. S. (1975) Estimation of Stable Law Parameters: Stock Price Behavior Application, *Journal of the American Statistical Association*, 70, 351, 690-697.

[87] LeROY, S. (1989) Efficient Capital Markets and Martingales, *Journal of Economic Literature*, XXVII, 1583-1621.

[88] LI, T.-Y. e YORKE, J. A. (1975) Period Three implies Chaos, *American Mathematical Monthly*, in HAO, B.-L. (ed.) (1984) *Chaos*, 244-251, World Scientific Publishing, Singapore.

[89] LO, A. W. (1991) Long-term Memory in Stock Market Prices, *Econometrica*, 59, 5, 1279-1313.

[90] LORENZ, H. W. (1989) *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion.* Springer-Verlag, Berlin.

[91] MACCHIATI, A. (1992) *Decisioni Finanziarie e Mercati dei Capitali.* Società editrice il Mulino, Bologna.

[92] MACHONES, M., MASE, S., PLUNKETT, S. e THRASH, R. (1994) Price Prediction Using Nonlinear Techniques, *The Magazine of Artificial Intelligence in Finance*, Fall, 51-56.

[93] MAINIERI, R. (1993) On the Equality of Hausdorff and Box Counting Dimension, *Chaos*, 3, 2, 119-125.

[94] MALLIARIS, A. G. e BROCK, W. A. (1982) *Stochastic Methods in Economics and Finance.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

[95] MALLIARIS, A. G. e PHILIPPATOS, G. (1992) Random Walk vs. Chaotic Dynamics in Financial Economics, comunicazione personale.

[96] MANDELBROT, B. B. (1963a) New Methods in Statistical Economics, *The Journal of Political Economy*, LXXI, 5, 421-440.

[97] MANDELBROT, B. B. (1963b) The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, in COOTNER, P. H. (ed.) (1964) *The Random Character of Stock Market Prices*, 307-332, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusets.

[98] MANDELBROT, B. B. (1967) The Variation of Some Other Speculative Prices, *Journal of Business*, 15, 393-413.

[99] MANDELBROT, M. M. e Van NESS, J. W. (1968) Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications, *SIAM Review*, 10, 4, 422-437.

[100] MANDELBROT, B. B. (1972a) Statistical Methodology for Nonperiodic Cycles: from the Covariance to R/S Analysis, *Annals of Economic and Social Measurement*, 1, 250-290.

[101] MANDELBROT, B. B. (1972b) When Can Price Be Arbitraged Efficiently? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models, *The Review of Economics and Statistics*, 53, 225-236.

[102] MANDELBROT, B. B. e TAQQU, M. S. (1979) Robust R/S Analysis of Long Run Serial Correlation, lecture presentata all'*International Statistical Institute*, 42nd Session, Manila.

[103] MANDELBROT, B. B. (1987) *Gli Oggetti Frattali. Forma, Caso e Dimensione.* Casa editrice Einaudi, Torino.

[104] MANDELBROT, B. B. (1990) *La Geometria della Natura.* Edizioni Theoria s.r.l., Roma-Napoli.

[105] MANTEGNA, R. N. (1990) L'Indice MIB Generale Storico: un Processo Stocastico non Gaussiano, *La Borsa Valori*, 15, 11, 8-11.

[106] MANTEGNA, R. N. (1991a) Lévy Random Walks in Milan Stock Exchange, *Proceedings of the International Conference on Noise in Physical System and 1/f Fluctuations*, Kyoto, 515-518.

[107] MANTEGNA, R. N. (1991b) Lévy Walks and Enhanced Diffusion in Milan Stock Exchange, *Physica A*, 179, 232-242.

[108] MAY, R. M. (1976) Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics, *Nature*, in HAO, B.-L. (ed.) (1984) *Chaos*, 149-157, World Scientific Publishing, Singapore

[109] MAY, R. M. e OSTER, G. F. (1976) Bifurcations and Dynamic Complexity in Simple Ecological Models, *The American Naturalist*, 110, 974, 573-599.

[110] McCULLOCH, H. J. (1986) Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters, *Commun. Statist. - Simula.*, 15(4), 1109-1136.

[111] MEDIO, A. (1979) *Teoria Nonlineare del Ciclo Economico.* Società Editrice il Mulino, Bologna.

[112] MEDIO, A. (1992) *Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics.* Cambridge University Press, Cambridge.

[113] MEDIO, A., LINES, M. e DUFOUR, A. (1993) Chaos Theory and Prediction with Applications to Economics, lecture presentata all' *International Conference on Predictability and Nonlinear Modelling in Natural Sciences and Economics*, Wageningen.

[114] NARDELLI, C. (1991/92) *Approccio all'Indagine della Struttura Frattale e Caotica del Mercato Finanziario Italiano.* Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Brescia, Brescia.

[115] NICOLIS, G. e PRIGOGINE, I. (1991) *La complessità.* Giulio Einaudi Editore, Torino.

[116] ORNSTEIN, D. S. e WEISS, B. (1991) Statistical Properties of Chaotic Systems, *American Mathematical Society*, 24, 1, 11-116.

[117] PANTON, D. B. (1988) A Pascal Program for Simulating Stable Random Variates, *Commun. Statist. - Simula.*, 17(3), 837-842.

[118] PAULSON, A. S., HOLCOMB, E. W. e LEITCH, R. A. (1975) The Estimation of the Parameters of the Stable Laws, *Biometrika*, 62, 1, 163-169.

[119] PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H. e SAUPE, D. (1992) *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, New York.

[120] PERLI TRAVERSO, R. (1989/90) *Analisi Dinamica Non Lineare in Economia.* Tesi di Laurea, Università degli Studi di Venezia, Venezia.

[121] PETITOT, J. (1979) Locale/Globale, in *Enciclopedia*, VIII, 429-490, Casa Editrice Einaudi, Torino.

[122] PETERS, E. E. (1989) Fractal Structure in the Capital Markets, *Financial Analysts Journal*, July-August, 32-37.

[123] PETERS, E. E. (1991a) A Chaotic Attractor for the S&P 500, *Financial Analysts Journal*, March-April, 55-62 e 81.

[124] PETERS, E. E. (1991b) *Chaos and Order in the Capital Market.* J. Wiley, New-York.

[125] PETERS, E. E. (1994) *Fractal Market Analysis.* J. Wiley, New-York.

[126] PICCOLO, D. e VITALE, C. (1984) *Metodi Statistici per l'Analisi Economica.* Società editrice il Mulino, Bologna.

[127] PRIGOGINE, I. e STENGERS, I. (1985) *Order out of Chaos. Man's new Dialogue with Nature.* Flamingo, Glasgow.

[128] RINALDI, S. (1974) *Teoria dei Sistemi.* Ulrico Hoepli, Casa Editrice Libraria S.p.A., Milano.

[129] RINALDI, S. (1993a) Comportamento Asintotico dei Sistemi Dinamici, in BELARDINELLI, E. e CERUTTI, S. (eds.) (1993) *Biosistemi e Complessità*, 15-26, Pàtron Editore, Bologna.

[130] RINALDI, S. (1993b) Stabilità Strutturale e Biforcazioni, in BELARDINELLI, E. e CERUTTI, S. (eds.) (1993) *Biosistemi e Complessità*, 27-46, Pàtron Editore, Bologna.

[131] RINALDI, S. (1993b) Il Caos Deterministico, in BELARDINELLI, E. e CERUTTI, S. (eds.) (1993) *Biosistemi e Complessità*, 47-64, Pàtron Editore, Bologna.

[132] ROSSI, F. M. e SCACCIAVILLANI, F. (1992) Non-Semimartingale Behavior in Asset Pricing: Arbitrage, Fractional Brownian Motion and Self-Similar Processes, comunicazione personale.

[133] ROSSI, G. A. (1974a), Condizioni Necessarie per Funzioni Parametriche di Curve di Peano, *Atti della Accademia delle Scienze di Torino*, 108, 281-294.

[134] ROSSI, G. A. (1974b), Condizione Sufficiente perchè una Funzione Continua, Reale e di Variabile Reale, sia Funzione Parametrica di una Curva di Peano, *Atti della Accademia delle Scienze di Torino*, 108, 921-939.

[135] ROSSI, G. A. (1974c), Ancora sulle Curve di Peano: Considerazioni Critiche, *Atti della Accademia delle Scienze di Torino*, 109, 205-216.

[136] ROZELLE, J. e FIELITZ, B. (1980) Skewness in Common Stock Returns, *The Financial Review*, 15, 1, 1-23.

[137] RUELLE, D. (1979) Strange Attractors, *Mathematical Intelligencer*, 2, 126-137.

[138] SALZANO, M. (1993) La Struttura Frattale di Alcuni Indicatori Economici Italiani, lecture presentata al *XVII Convegno A.M.A.S.E.S.*, Ischia.

[139] SCHEINKMAN, J. A. e LeBARON, B. (1989) Nonlinear Dynamics and Stock Returns, *The Journal of Business*, 62, 3, 311-337.

[140] SHAW, R. (1984) *The Dripping Faucet as a Model Chaotic System.* Aerial Press, Inc., Santa Cruz.

[141] SIMKOWITZ, M. e BEEDLES, W. (1980) Asymmetric Stable Distribuited Security Returns, *Journal of the American Statistical Association*, 75, 306-312.

[142] SINAI, Y. G. (1976) Self-Similar Probability Distributions, *Theory of Probability and its Applications*, 21, 1, 64-80.

[143] SMITH, R. L. (1992) Optimal Estimation of Fractal Dimension CASDAGLI, M. e EUBANK, S. (eds.) (1989) *Nonlinear Modelling and Forecasting. SFI Studies in the Sciences of Complexity.* Addison-Wesley, Ney York.

[144] SMITH, R. L. (1992) Estimating Dimension in Noisy Chaotic Time Series, *J. R. Statist. Soc. B.*, 54, 2, 329-351.

[145] TAKENS, F. (1981) Detecting Strange Attractors in Turbolence, in RAND, D. e YOUNG, L. (eds.) (1981) *Dynamical Systems in Turbolence.* Springer-Verlag, Berlin.

[146] THEIL, H. (1977) *Principi di Econometria.* U.T.E.T., Torino.

[147] THEILER, J. (1988) Lacunarity in a Best Estimator of Fractal Dimension *Physics Letters A*, 133, 4/5, 195-200.

[148] THOM, R. (1985) *Modelli Matematici della Morfogenesi.* Giulio Einaudi Editore, Torino.

[149] VITALE, C. (1993) Non Linearità: Caos e Caso nei Fenomeni Dinamici, comunicazione personale.

[150] WALTER, C. (1990) Lévy Stable Distributions and Fractal Structure on the Paris Market, *1st A.F.I.R. International Colloquium*, 3, 242-259, Paris.

[151] WHITLEY, D. (1983) Discrete Dynamical Systems in Dimensions One and Two, *Bull. London Math. Soc.*, 15, 177-217.

[152] WORKING, H. (1934) A Random-Difference Series for Use in the Analysis for Time Series, *Journal of the American Statistical Association*, 29, 11-24.

[153] WOLF, A., SWIFT, J. B., SWINNEY, H. L. e VASTANO, J. A. (1985) Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, *Physica 16D*, 285-317.