

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA**

**Facoltà di ECONOMIA**

**Corso di Dottorato di Ricerca in MATEMATICA PER  
L'ANALISI DEI MERCATI FINANZIARI**

**VII Ciclo**

**Tesi di Dottorato**

**CASO E CAOS DETERMINISTICO: UN  
APPROCCIO ALL'ANALISI DELLE LEGGI DI  
EVOLUZIONE DEI PREZZI SPECULATIVI**

**Dottorando: Marco CORAZZA**

**Coordinatore: Ch.mo Prof. Guido A. ROSSI**

**Tutore: Ch.mo Prof. Guido A. ROSSI**

**Anno Accademico 1993-94**







# Ringraziamenti

Si ringraziano per le utili osservazioni e considerazioni il professor G. A. Rossi (Tutore) del Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata alle Scienze Umane dell'Università degli Studi di Torino, il professor G. Zambruno (membro del Collegio Docenti del Dottorato di Ricerca) del Dipartimento di Matematica e Statistica dell'Università degli Studi di Milano e il professor A. Ambrosetti della Scuola Normale di Pisa, il professor E. Canestrelli del Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica dell'Università degli Studi di Venezia, il professor M. Li Calzi del Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica dell'Università degli Studi di Venezia, il professor A. G. Malliaris del Department of Economics della Loyola University di Chicago, la dottoressa C. Nardelli del Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica dell'Università degli Studi di Venezia.



# INDICE

## CAPITOLO I

### INTRODUZIONE

1. PREMESSA . . . . .	1
2. CONTENUTI E STRUTTURA DELLA TESI . . . . .	5

## PARTE I - Gli Strumenti

### CAPITOLO II

#### DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI DI UNA DISTRIBUZIONE PARETO-LÉVY STABILE

1. INTRODUZIONE . . . . .	11
2. ASPETTI TEORICI . . . . .	12
3. ASPETTI ALGORITMICI . . . . .	15
3.A. Fase I . . . . .	17
3.A.1. Stime dei parametri $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	18
3.A.2. Stima del parametro $c$ . . . . .	21
3.A.3. Stima del parametro $\delta$ . . . . .	23
3.B Fase II . . . . .	25
3.C Fase III . . . . .	29
4. SIGNIFICATIVITÀ DELLE STIME DEI PARAMETRI . . . . .	30
5. ASPETTI APPLICATIVI E RISULTATI . . . . .	32
6. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI . . . . .	34

### CAPITOLO III

#### PROCESSI STOCASTICI "MOTI BROWNIANI FRAZIONARI" E ANALISI *RESCALED RANGE*

1. INTRODUZIONE . . . . .	37
2. ASPETTI TEORICI RELATIVI AI MOTI BROWNIANI FRAZIONARI . . . . .	38
3. ASPETTI ALGORITMICI E TEORICI RELATIVI ALL'ANALISI <i>RESCALED RANGE</i> . . . . .	43
4. VERIFICHE NUMERICHE . . . . .	53
5. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI . . . . .	55
Figure . . . . .	57

### CAPITOLO IV

#### DINAMICHE DETERMINISTICHE NON LINEARI COMPLESSE

1. INTRODUZIONE . . . . .	89
2. ASPETTI DEFINITORI . . . . .	91
3. CAOS DETERMINISTICO . . . . .	97
4. RILEVATORI DI "CAOTICITÀ DETERMINISTICA" . . . . .	100
5. SULLA PRECIDIBILITÀ DELLE DINAMICHE DETERMINISTICHE IN REGIME CAOTICO . . . . .	105
6. VERIFICHE NUMERICHE . . . . .	108
Figure . . . . .	111

## PARTE II - I Risultati Empirici

### CAPITOLO V

#### PARETO-LÉVY STABILITÀ E AUTO-SIMILARITÀ STATISTICA NEL MERCATO FINANZIARIO ITALIANO

1. INTRODUZIONE . . . . .	119
2. ASPETTI TEORICI . . . . .	121

3. DATI . . . . .	123
4. ASPETTI APPLICATIVI E RISULTATI . . . . .	125
4.A. <i>Fase I</i> . . . . .	126
4.B. <i>Fase II</i> . . . . .	131
4.C. <i>Fase III</i> . . . . .	137
5. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI . . . . .	142
6. CRITERIO DI SCELTA . . . . .	143
Figure . . . . .	145

## CAPITOLO VI

### DIPENDENZA A LUNGO TERMINE NEL MERCATO FINANZIARIO ITALIANO

1. INTRODUZIONE . . . . .	265
2. ASPETTI TEORICI . . . . .	267
3. ASPETTI APPLICATIVI E RISULTATI RELATIVI ALLA VERIFICA DELLA IPOTESI NULLA SPECIFICATA . . . . .	268
4. ASPETTI APPLICATIVI E RISULTATI RELATIVI ALLA VERIFICA EMPIRICA DELLA (2.B.3) . . . . .	273
5. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI . . . . .	276
Figure . . . . .	279

## CAPITOLO VII

### DETERMINISMO NON LINEARE COMPLESSO NEL MERCATO FINANZIARIO ITALIANO

1. INTRODUZIONE . . . . .	439
2. ASPETTI DEFINITORI E TEORICI . . . . .	440
3. METODI NUMERICI PER LA VERIFICA DELLA PRESENZA DI CAOS DETERMINISTICO . . . . .	442
4. ASPETTI APPLICATIVI E RISULTATI . . . . .	446
4.A. <i>Fase I</i> . . . . .	448
4.B. <i>Fase II</i> . . . . .	451
4.C. <i>Fase III</i> . . . . .	452

5. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI . . . . .	453
---	-----

## PARTE III - La Rivisitazione

### CAPITOLO VIII

#### OPTION PRICING: UN APPROCCIO DETERMINISTICO NON LINEARE COMPLESSO

1. INTRODUZIONE . . . . .	457
2. ASPETTI TEORICI . . . . .	459
3. IPOTESI ECONOMICO-FINANZIARIE . . . . .	461
4. DINAMICA DEL VALORE DI EQUILIBRIO DI UNA OPZIONE CALL DI TIPO EUROPEO . . . . .	466
5. SOLUZIONE DELLA (4.16) . . . . .	471
6. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI . . . . .	472
APPENDICE A . . . . .	473
APPENDICE B . . . . .	474
APPENDICE C . . . . .	474

### BIBLIOGRAFIA

# **PARTE I**

## **Gli Strumenti**



# CAPITOLO I

## INTRODUZIONE

### 1. PREMESSA

L'approccio classico relativo all'analisi dei vari aspetti inerenti al prezzo  $P(t)$  delle attività finanziarie (aspetti quali la natura dei processi generatori, la struttura delle leggi dinamiche di evoluzione, l'indagine delle serie temporali, la verifica delle implicazioni economico-finanziarie, ...), come si è venuto determinando in letteratura fino dai primi pionieristici lavori di Bachelier L. ([Bachelier L., 1900]) e di Working H. ([Working H., 1934]), si è sostanziato nell'impiego, nello sviluppo e nella elaborazione di ipotesi, di teorie, di metodi e di strumenti propri dell'ambito stocastico e tradizionalmente sintetizzabili nell'assunzione di indipendente ed identica distribuzione di probabilità delle variabili casuali  $P(t + \Delta t) - P(t)$ , con  $t = 1, 2, \dots, N - \Delta t$  per un prescelto valore di  $\Delta t$  (che, congiuntamente, specificano un opportuno processo stocastico) (ad esempio si veda [Fama E. F., 1963], [Mandelbrot B. B., 1963b], [Mantegna R. N., 1991], [Peters E. E., 1991b], [Corazza M. *et al.*, 1993a] e [Peters E. E., 1994]). In particolare, nelle moderne teorie economico-finanziarie, quali, ad esempio, quelle sul portafoglio, sull'impossibilità di effettuare l'arbitraggio e sul derivative pricing, si è venuta a determinare, quale paradigma, l'assunzione dell'ipotesi di una indipendente ed identica

distribuzione di probabilità Normale o, alternativamente, log-Normale (per maggiori dettagli si veda [Mandelbrot B. B., 1971], [LeRoy S., 1989], [Fama E. F., 1991], [Peters E. E., 1991b], [Rossi F. M. *et al.*, 1992], [Machones M. *et al.*, 1994] e [Peters E. E., 1994]).

Peraltro, in un crescente numero di analisi empiriche si è posta in evidenza la parziale inadeguatezza dell'assunzione di una tale ipotesi. Ad esempio, le costanti presenze di leptocurtosi, di asimmetria e di instabilità della varianza nelle distribuzioni di frequenza delle variazioni sia dei prezzi che dei loro logaritmi, hanno condotto molti autori a congetturare per queste ultime una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile ([Cootner P., 1963], [Fama E. F., 1963], [Mandelbrot B. B., 1963b], [Fielitz B. D. *et al.*, 1972], [Leitch R. A. *et al.*, 1975], [Rozelle J. *et al.*, 1980], [Simkowitz M. *et al.*, 1980], [Fielitz B. D. *et al.*, 1983], [Akgiray V. *et al.*, 1988], [Walter C., 1990], [Canestrelli E. *et al.*, 1991b], [Brasolin A. *et al.*, 1992] e [Corazza, M. *et al.*, 1993b]) o una distribuzione data da una mistura di distribuzioni di probabilità Gaussiane e/o Pareto-Lévy stabili ([Fielitz B. D. *et al.*, 1983] e [Helms B. P. *et al.*, 1985]). Altri autori, rigettando l'ipotesi di efficienza in forma debole dei mercati finanziari mediante la conduzione di tests sull'ipotesi di dipendenza (non solo lineare) delle variazioni sia dei prezzi che dei loro logaritmi ([Greene M. T. *et al.*, 1977], [Greene M. T. *et al.*, 1979], [Lo A. W., 1991], [Peters E. E., 1991b], [Booth G. G. *et al.*, 1992], [Corazza M. *et al.*, 1993a], [Corazza M. *et al.*, 1993c], [Helms B. P. *et al.*, 19..] e [Peters E. E., 1994]), hanno congetturato la non-markovianità per i processi stocastici che generano tali variazioni. A tali ipotesi alternative, ottenute dall'assunzione delle congetture proposte in ambito stocastico, si sono recentemente affiancate delle ipotesi alternative proposte in ambito deterministico, ipotesi che assumono leggi delle variazioni sia dei prezzi che dei loro logaritmi descrivibili da dinamiche deterministiche non-lineari complesse ([Gori F. *et al.*, 1989], [Scheinkman J. A. *et al.*, 1989], [Hsieh D. A., 1991], [Peters E. E., 1991a], [Peters E. E., 1991b], [Malliaris A. G. *et al.*, 1992] e [Peters E. E., 1994]). È da notare come anche le congetture soggiacenti a queste ultime ipotesi alternative siano indotte da un crescente numero di risultati empirici relativi alla determinazione del valore di alcuni opportuni indicatori di non-linearità complessa ([Hinich M. J. *et al.*, 1989], [Peters E. E., 1991a], [Peters E. E., 1991b], [Booth G. G. *et al.*,

1992], [Brasolin A. *et al.*, 1992], [Allevi E. *et al.*, 1993], [Corazza M. *et al.*, 1993b] e [Peters E. E., 1994]).

È da porre in evidenza come, in generale, l'impiego, lo sviluppo e l'elaborazione di ipotesi, di teorie, di metodi e di strumenti propri dell'ambito stocastico per l'analisi dei vari aspetti inerenti al prezzo  $P(t)$  delle attività finanziarie e, in particolare, l'assunzione di indipendenza ed identica distribuzione Normale o, alternativamente, log-Normale per il processo stocastico  $P(t + \Delta t) - P(t)$ , con  $t = 1, 2, \dots, N - \Delta t$  per un prescelto valore di  $\Delta t$ , si basino, sinteticamente, sulle seguenti classi di motivazioni:

(1.A) motivazioni di natura storico-psicologica, che hanno contribuito alla determinazione dell'antinomia determinismo/stocasticismo. *“Il fisico e matematico francese del diciannovesimo secolo Laplace formulò una famosa tesi: “Un’intelligenza che conosca tutte le forze che agiscono in natura in un dato istante e le posizioni istantanee di tutte le cose nell’universo, sarebbe in grado di comprendere in una sola formula il moto dei corpi più grandi e dei più piccoli atomi, purchè il suo intelletto fosse abbastanza potente da analizzare tutti i dati: per essa nulla sarebbe incerto, tanto il futuro quanto il passato sarebbero presenti ai suoi occhi.”* ([Lambert K. *et al.*, 1981]). Tale classe di assunzioni ha condotto all'allontanamento dall'ambito deterministico di tutti quei fenomeni le cui manifestazioni risultassero “evidentemente” irregolari e/o “difficilmente” predicibili quali, ad esempio, i prezzi delle attività finanziarie;

(1.B) motivazioni di natura “tradizionalista”, che hanno contribuito al mantenimento delle peculiarità caratterizzanti le linee di ricerca “inaugurate” nei primi pionieristici e fondamentali lavori di Bachelier L. ([Bachelier L., 1900]) e di Working H. ([Working H., 1934]). In particolare, si ha che *“Besides anticipating the empirical work that was to come more than a half a century later, Bachelier also developed many of the mathematical properties of Brownian motion (the continuous-time analogue of the random walk) which had been thought to have been first derived later in the physical sciences. In particular, Bachelier had anticipated many of the mathematical results developed in Albert Einstein’s 1905 paper.”* ([LeRoy S. F., 1989]) e si ha che *“In (1934) Holbrook Working argued that random walks - cumulated series of probabilistically independent shocks - characteristically developed patterns*

*that look like those commonly ascribed by market analysts to stock prices.*" ([LeRoy S. F., 1989]);

(1.C) motivazioni di natura economico-finanziaria, che, per l'esigenza di formalizzare modelli di equilibrio, sia parziale che generale, relativi ai mercati economico-finanziari, hanno contribuito a "centralizzare" il ruolo di quei processi, generatori dei prezzi, le cui peculiarità permettessero il conseguimento ed il successivo mantenimento di tale equilibrio, poichè "*the existence of equilibrium and the absence of arbitrage in speculative markets are intimately related to the nature of the stochastic processes governing the asset prices dynamic. The absence of arbitraging is a meaningful assumption if and only if prices can be described by martingales*" ([Rossi M. F. et al., 1992]). In particolare, si ha che "*Martingales and semimartingales are the "natural" processes to describe independently and identically distributed changes, that is the most unpredictable type of behaviour*" ([Rossi M. F. et al., 1992]) e si ha che "*If - in addition - the process  $P(t)$  is Gaussian [...] we see that a Gaussian martingale can only be a Gaussian random walk*" ([Mandelbrot B. B., 1972b]);

(1.D) motivazioni di natura "operativa", che, a causa della scarsa comparsa di nuovi paradigmi metodologici realmente innovativi, hanno "costretto" a caratterizzare lo stesso approccio metodologico relativo all'analisi delle dinamiche economico-finanziarie mediante i formalismi propri del paradigma linearista o, solo debolmente, non linearista. In generale, la carenza di metodi e di strumenti formalizzanti *ad hoc* ha condotto a "*cercare soluzioni approssimate di equazioni ritenute esatte (alla luce della teoria "generatrice") o, piuttosto, nel cercare soluzioni esatte per equazioni che si sanno approssimate (alla luce di data teoria): qualunque versione si adotti, è chiaro che il modello  $M$  costituisce "un impoverimento" della teoria generale  $T$* " ([Giorello G. et al., 1982]). Una tale "costrizione" è stata parzialmente rilassata dai recenti risultati relativi alla teoria delle equazioni alle differenze finite, alla teoria delle equazioni differenziali e, più in generale, alla teoria delle varietà differenziali, che hanno evidenziato un crescente interesse nei confronti delle dinamiche deterministiche non lineari complesse. In particolare, si ha che "*La forza di tale paradigma proviene dal fatto che offre la prima interpretazione [...] globale e coerente di un*

*fenomeno universale che la scienza classica ha sempre tentato di rifiutare e che la filosofia, al contrario, ha sempre fatto di tutto per conservare, cioè quello della trasformazione delle forme.*" ([Petitot J., 1979]).

L'insieme delle "limitazioni" insite in queste motivazioni ha condotto gli autori precedentemente citati, primi fra i quali, in assoluto, Fama E. F. ([Fama E. F., 1963]) e Mandelbrot B. B. ([Mandelbrot B. B., 1963a], [Mandelbrot B. B., 1963b] e [Mandelbrot B. B., 1972a]) e, in Italia, Rossi G. A. ([Rossi G. A., 1974a], [Rossi G. A., 1974b] e [Rossi G. A., 1974c]) e Gori F. e Rinaldi F. ([Gori F. *et al.*, 1989]), a utilizzare, a sviluppare e a elaborare ipotesi, teorie, metodi e strumenti alternativi a quelli impiegati nell'approccio classico.

## 2. CONTENUTI E STRUTTURA DELLA TESI

In generale, questa tesi (che si articola in tre parti) in un primo momento propone la specificazione, lo sviluppo e il coordinamento di metodiche e di strumenti alternativi a quelli impiegati nell'approccio classico; in un secondo momento propone l'utilizzo di tali metodiche e di tali strumenti al fine di analizzare empiricamente il mercato finanziario italiano; in un terzo e ultimo momento propone degli strumenti e dei modelli economico-finanziari "coerenti" con i risultati empirici ottenuti mediante la conduzione dell'analisi precedentemente specificata.

In particolare, nel **CAPITOLO II (DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI DI UNA DISTRIBUZIONE PARETO-LÉVY STABILE)** della **PARTE I (Gli Strumenti)** si considerano le distribuzioni di probabilità Pareto-Lévy stabili per la loro capacità di rappresentare distribuzioni di probabilità leptocurtiche, asimmetriche, con momenti del primo e/o del secondo ordine non esistenti in quanto infiniti. In questo capitolo si propone una procedura per la stima dei parametri di una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile mediante l'originale utilizzo coordinato di tecniche (già presenti in letteratura) che sono state autonomamente sviluppate e per ognuna delle quali si è effettuato un previo

ed originale affinamento al fine di ridurre gli effetti indesiderati derivanti dai limiti insiti in queste ultime. In particolare, i contributi originali presenti in questo capitolo si sostanziano nel coordinamento "a sistema" delle distinte tecniche di stima già presenti in letteratura (sezione 3.), nelle enunciazioni e dimostrazioni di alcune proposizioni relative alla procedura di stima (sezione 3.) e nella definizione di tests asintotici di tipo  $t$  per verificare la significatività delle stime dei parametri ottenute mediante l'utilizzo di questa ultima (sezione 4.).

Nel **CAPITOLO III (PROCESSI STOCASTICI "MOTI BROWNIANI FRAZIONARI" E ANALISI *RESCALED RANGE*)** della **PARTE I (Gli Strumenti)** si considerano sia i processi stocastici "moti Browniani frazionari" che l'analisi *rescaled range*, detta anche analisi R/S, per la capacità dei primi di rappresentare processi stocastici i cui generici incrementi siano stocasticamente dipendenti e per la capacità della seconda di testare l'ipotesi sulla presenza di indipendenza a lungo termine nelle realizzazioni dei processi stocastici e, nel caso di suo rigetto, di stimare l'"intensità" di tale dipendenza. In questo capitolo si propongono i principali aspetti teorici relativi ai processi stocastici "moti Browniani frazionari" e i principali aspetti algoritmici e alcuni risultati teorici originali relativi all'analisi R/S. In particolare, i contributi originali presenti in questo capitolo si sostanziano nel coordinamento di distinte tecniche di stima già presenti in letteratura (sezione 3.) e nelle enunciazioni e dimostrazioni di alcune proposizioni relative alla procedura di stima (sezione 3.).

Nel **CAPITOLO IV (DINAMICHE DETERMINISTICHE NON LINEARI COMPLESSE)** della **PARTE I (Gli Strumenti)** si considerano le dinamiche deterministiche non lineari complesse per la loro capacità sia di formalizzare processi deterministici le cui realizzazioni risultano empiricamente indistinguibili da quelle generate da processi stocastici che di manifestare delle proprietà formali analoghe a quelle caratterizzanti le dinamiche stocastiche. In questo capitolo si propongono i principali aspetti teorici relativi alle dinamiche deterministiche non lineari complesse.

Nel **CAPITOLO V (PARETO-LÉVY STABILITÀ E AUTO-SIMILARITÀ STATISTICA NEL MERCATO FINANZIARIO)**

**ITALIANO** della **PARTE II (I Risultati Empirici)** si utilizzano le metodiche e gli strumenti specificati nel **CAPITOLO II** al fine di analizzare empiricamente il mercato finanziario italiano, rappresentato da un insieme di indici finanziari e di titoli azionari opportunamente scelto. In questo capitolo si propone la verifica empirica della sua struttura frattale Pareto-Lévy stabile e auto-similare e si propone un criterio di scelta fra attività finanziarie i cui incrementi dei prezzi o, alternativamente, dei loro logaritmi si distribuiscano Pareto-Lévy stabilmente. In particolare, i contributi originali presenti in questo capitolo si sostanziano nell'intera analisi empirica (sezioni 3. e 4.) e nel criterio di scelta specificato (sezione 6.).

Nel **CAPITOLO VI (DIPENDENZA A LUNGO TERMINE NEL MERCATO FINANZIARIO ITALIANO)** della **PARTE II (I Risultati Empirici)** si utilizzano le metodiche e gli strumenti specificati nel **CAPITOLO III** al fine di analizzare empiricamente il mercato finanziario italiano, rappresentato da un insieme di indici finanziari e di titoli azionari opportunamente scelto. In questo capitolo si testa statisticamente l'ipotesi sulla presenza di indipendenza a lungo termine e, nel caso di suo rigetto, si stima l'"intensità" di tale dipendenza, e si verifica empiricamente la natura frattale del mercato stesso. In particolare, i contributi originali presenti in questo capitolo si sostanziano nell'intera analisi empirica (sezioni 3. e 4.).

Nel **CAPITOLO VII ( DETERMINISMO NON LINEARE COMPLESSO NEL MERCATO FINANZIARIO ITALIANO)** della **PARTE II (I Risultati Empirici)** si utilizzano le metodiche e gli strumenti specificati nel **CAPITOLO IV** al fine di analizzare empiricamente il mercato finanziario italiano, rappresentato da un insieme di indici finanziari e dei titoli azionari opportunamente scelto. In questo capitolo si verifica empiricamente la sua struttura deterministica non lineare complessa e la presenza, o meno, di caos deterministico. In particolare, i contributi originali presenti in questo capitolo si sostanziano nell'intera analisi empirica (sezione 4.).

Nel **CAPITOLO VIII (OPTION PRICING: UN APPROCCIO DETERMINISTICO NON LINEARE COMPLESSO)** della **PARTE III (La Rivisitazione)** si elabora un modello economico-finanziario "coerente" con i risultati empirici ottenuti mediante la conduzione delle

analisi precedentemente specificate. In questo capitolo si propone una formula per la valutazione del valore di equilibrio di una opzione call di tipo europeo nell'ipotesi in cui la legge degli incrementi dei logaritmi dei prezzi sia descrivibile da una dinamica deterministica non lineare complessa. In particolare, i contributi originali presenti in questo capitolo si sostanziano nell'intero modello (sezioni 3., 4., 5., APPENDICE A, APPENDICE B e APPENDICE C).

# PARTE I

## Gli Strumenti



# CAPITOLO II

## DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI DI UNA DISTRIBUZIONE PARETO-LÉVY STABILE

### 1. INTRODUZIONE

Risultati empirici relativi all'analisi delle serie temporali economico-finanziarie hanno evidenziato un crescente interesse nei confronti delle distribuzioni di probabilità Pareto-Lévy stabili ( [Cootner P., 1963], [Fama E. F., 1963], [Mandelbrot B. B., 1963b], [Fielitz B. D. *et al.*, 1972], [Leitch R. A. *et al.*, 1975], [Rozelle J. *et al.*, 1980], [Simkowitz M. *et al.*, 1980], [Fielitz B. D. *et al.*, 1983], [Akgiray V. *et al.*, 1988], [Walter C., 1990], [Canestrelli E. *et al.*, 1991b], [Brasolin A. *et al.*, 1992] e [Corazza M. *et al.*, 1993b]) dovuto alla loro capacità di rappresentare distribuzioni di probabilità leptocurtiche, asimmetriche, con momenti del primo e/o del secondo ordine non esistenti in quanto infiniti.

Questo capitolo propone una procedura per la stima dei parametri di una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile mediante l'originale utilizzo coordinato di tecniche (già presenti in letteratura) che sono state autonomamente sviluppate ([Fama E. F. *et al.*, 1971], [DuMouchel W. H., 1975], [Leitch R. A. *et al.*, 1975], [Paulson A. S. *et al.*, 1975], [Koutrouvelis I. A., 1981] e [McCulloch H. J., 1988]) e per ognuna delle quali si è effettuato

un previo ed originale affinamento al fine di ridurre gli effetti indesiderati derivanti dai limiti insiti in queste ultime.

In particolare, nella sezione 2. si illustrano sinteticamente gli aspetti teorici necessari all'impostazione ed allo sviluppo della procedura per la stima dei parametri; nella sezione 3. si propone in dettaglio la procedura stessa; nella sezione 4. si propongono dei tests asintotici di tipo  $t$  per verificare la significatività delle stime dei parametri ottenute mediante l'utilizzo di questa ultima; nella sezione 5. si presentano i risultati dell'applicazione della procedura di stima a serie temporali Pareto-Lévy stabili simulate; nella sezione 6. si presentano delle osservazioni e considerazioni finali.

## 2. ASPETTI TEORICI

Gli aspetti teorici necessari all'impostazione ed allo sviluppo della procedura per la stima dei parametri riguardano la nozione di quantile di ordine  $p$  di una variabile casuale continua, i concetti di variabile casuale Pareto-Lévy stabile e di processo stocastico Pareto-Lévy stabile e la conoscenza della funzione caratteristica, ovvero della trasformata di Fourier della funzione di densità, di una variabile casuale Pareto-Lévy stabile, sia nella sua versione teorica canonica che in quella campionaria.

(2.A) Quantile di ordine  $p$ : data una variabile casuale continua  $X$ , data la sua funzione di ripartizione  $F(x)$  e dato un prefissato valore reale  $p \in [0, 1]$ , si definisce quantile di ordine  $p$  un valore  $x_p$ , assumibile dalla variabile casuale, in corrispondenza del quale la sua funzione di ripartizione ha valore  $p$ . Formalmente, in base alla usuale notazione statistica, si ha:

$$F(x_p) = \Pr(X \leq x_p) = 1 - \Pr(X > x_p) = p, \quad p \in [0, 1]. \quad (2.A.1)$$

(2.B) Variabile casuale Pareto-Lévy stabile e processo stocastico Pareto-Lévy stabile: l'illustrazione di questi concetti necessita previamente della seguente definizione:

**Definizione 2.B.1.** ([Feller W., 1971]) *Siano date le variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite  $X$  e  $X_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ , aventi*

una comune funzione di ripartizione  $G(\cdot)$ . Tale funzione di ripartizione si definisce Pareto-Lévy stabile in senso ampio se, per ogni  $n$ , esistono delle costanti  $a_n \in \mathbf{R}_0^+$  e  $b_n \in \mathbf{R}$  tali che si abbia

$$\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{d}{=} a_n X + b_n \quad (2.B.1)$$

dove

$\stackrel{d}{=}$ : indica la uguaglianza delle distribuzioni di probabilità.

In particolare, se  $b_n = 0$  tale funzione di ripartizione si definisce Pareto-Lévy stabile in senso stretto.

Ora, è possibile illustrare il concetto di variabile casuale Pareto-Lévy stabile mediante la seguente definizione:

**Definizione 2.B.2.** ([Feller W., 1971]) Sia data una variabile casuale  $X$  avente funzione di ripartizione  $G(\cdot)$  Pareto-Lévy stabile in senso ampio/stretto. Tale variabile casuale si definisce Pareto-Lévy stabile in senso ampio/stretto.

Relativamente agli enti introdotti nella **Definizione 2.B.1.** e nella **Definizione 2.B.2.** si hanno i seguenti risultati teorici (per i cui maggiori dettagli si veda [Feller W., 1971]):

**Teorema 2.B.1.** Siano date le variabili casuali indipendenti ed identicamente Pareto-Lévy stabilmente distribuite  $X$  e  $X_i$ , con  $i = 1, \dots, n$  aventi una comune funzione di ripartizione  $G(\cdot)$ . Allora si ha

$$a_n = n^{1/\alpha} \quad (2.B.2)$$

dove

$\alpha \in ]0, 2]$ : esponente caratteristico, specifica la  $G(\cdot)$  (per maggiori dettagli si veda (2.C)).

**Teorema 2.B.2.** Siano date le variabili casuali indipendenti ed identicamente Pareto-Lévy stabilmente distribuite in senso stretto  $X$  e  $Y$  aventi una comune funzione di ripartizione  $G(\cdot)$  con esponente caratteristico  $\alpha$ . Allora, per ogni  $s, t \in \mathbf{R}_0^+$ , si ha

$$s^{1/\alpha} X + t^{1/\alpha} Y \stackrel{d}{=} (s+t)^{1/\alpha} Z \quad (2.B.3)$$

dove

$Z$ : variabile casuale Pareto-Lévy stabile in senso stretto (opportunamente determinata) avente funzione di ripartizione  $G(\cdot)$  con esponente caratteristico  $\alpha$ .

È da porre in evidenza come l'ipotesi di stabilità in senso stretto assunta nel precedente risultato non risulti particolarmente stringente per il seguente risultato teorico:

**Teorema 2.B.3.** ([Feller W., 1971]) Sia data una variabile casuale Pareto-Lévy stabile in senso ampio avente funzione di ripartizione  $G(\cdot)$  con esponente caratteristico  $\alpha$ . Se  $\alpha \neq 1$ , allora esiste una costante  $h \in \mathbf{R}$  tale che la variabile casuale  $(X + h)$  è Pareto-Lévy stabile in senso stretto.

Relativamente al concetto di processo stocastico Pareto-Lévy stabile si ha la seguente definizione:

**Definizione 2.B.3** ([Falconer K., 1988]) Sia dato un processo stocastico  $X(t) : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$ . Questo processo si definisce Pareto-Lévy stabile se i suoi incrementi  $X(t + \Delta t) - X(t)$  sono stazionari ed indipendenti.

È da porre in evidenza come per ognuna delle variabili casuali Pareto-Lévy stabili e come per ognuno dei processi stocastici Pareto-Lévy stabili sia possibile rappresentarne la distribuzione di probabilità mediante una funzione di densità di probabilità che, in generale e ad eccezione di pochi casi particolari, è possibile esprimere solamente nella forma integrale. Per questa ragione si preferisce rappresentare le specificate distribuzioni di probabilità mediante la funzione caratteristica.

(2.C) Funzione caratteristica di una variabile casuale Pareto-Lévy stabile: data una variabile casuale  $X$  avente funzione di ripartizione Pareto-Lévy stabile, si ha la seguente funzione caratteristica teorica espressa in forma canonica (ad esempio si veda [Feller W., 1971]):

$$\Phi(t) = \exp\{i\delta t - |ct|^\alpha [1 + i\beta \operatorname{sgn}(t) w(t, \alpha)]\} \quad (2.2)$$

dove

$\alpha \in ]0, 2[$ : esponente caratteristico, fornisce una misura della probabilità totalmente contenuta nelle parti estreme delle code della funzione di densità di probabilità (in particolare se  $\alpha = 2$  allora la funzione di densità risulta

essere una Normale; è da notare come la varianza della variabile casuale  $X$  esista, in quanto finita, solo in corrispondenza di questo ultimo valore di  $\alpha$ , mentre la media della stessa esista, in quanto finita, solo in corrispondenza dei valori di  $\alpha \in ]1, 2[$ );

$\beta \in [-1, 1]$ : parametro di asimmetria, fornisce una misura dell'asimmetria della funzione di densità di probabilità (in particolare se  $\beta = 0$  la funzione di densità è simmetrica, se  $\beta < (>)0$  la funzione di densità è asimmetrica verso sinistra (destra), cioè ha la coda sinistra (destra) più allungata);

$c \in ]0, +\infty[$ : parametro di scala, risulta legato agli indici di variabilità, quando esistono finiti; è da notare come alcuni autori ([Fielitz B. D. *et al.*, 1972], [Fielitz, B. D. *et al.*, 1983] e [Paulson A. S. *et al.*, 1975]) riformulino la funzione caratteristica considerando la seguente trasformazione del parametro di scala:  $\gamma = |c|^\alpha$  (in particolare se  $\alpha = 2$  la variabile casuale  $X$  ha varianza uguale a  $2\gamma$ );

$\delta \in ]-\infty, +\infty[$ : parametro di localizzazione, risulta legato agli indici di posizione, quando esistono finiti, (in particolare se  $\alpha \in ]1, 2[$ ) la variabile casuale  $X$  ha media uguale a  $\delta$  e se  $\beta = 0$  la variabile casuale  $X$  ha mediana uguale a  $\delta$ );

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \tan(\alpha\pi/2) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ (2/\pi) \log |t| & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} ;$$

$|\cdot|$ : indica la funzione valore assoluto;

$\text{sgn}(\cdot)$ : indica la funzione segno.

Dato l'insieme finito di variabili casuali  $\underline{X} = \{X_j, j = 1, \dots, N\}$  la cui realizzazione  $\underline{x} = \{x_j, j = 1, \dots, N\}$  specifica una data serie temporale, si ha la seguente funzione caratteristica campionaria:

$$\Phi_N(t, \underline{X}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp\{itX_j\} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\cos(tX_j) + i \sin(tX_j)]. \quad (2.3)$$

### 3. ASPETTI ALGORITMICI

Al fine di stimare i valori dei quattro parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c$  e  $\delta$ , come già ricordato nella sezione 1., sono state previamente affinate e successivamente coordinate

a sistema distinte tecniche ([Fama E. F. *et al.*, 1971], [Balmer D. W. *et al.*, 1974], [Paulson A. S. *et al.*, 1975], [Koutrouvelis I. A., 1980], [Koutrouvelis I. A., 1981], [DuMouchel W. H., 1983] e [McCulloch H. J., 1986]); la procedura di stima così approntata si articola, sinteticamente, nelle tre seguenti fasi:

(3.A) nella prima fase si ottengono le stime consistenti<sup>1</sup>  $\hat{\alpha}_0$ ,  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{c}_0$  e  $\hat{\delta}_0$  dei parametri mediante l'utilizzo di cinque predeterminati quantili campionari e di quattro predeterminate tabelle funzioni dei corrispondenti cinque quantili teorici;

(3.B) nella seconda fase, in un primo momento si utilizzano le stime ottenute come descritto nella fase precedente per trasformare la realizzazione  $\underline{x}$  nella seguente realizzazione standardizzata<sup>2</sup>:

$$\underline{x}' = \left\{ x'_j = \frac{x_j - \hat{\delta}_0}{\hat{c}_0}, \quad j = 1, \dots, N \right\}. \quad (3.1)$$

In un successivo momento, si utilizzano le funzioni caratteristiche teorica e campionaria (relative alle variabili casuali standardizzate) per ottenere due distinte relazioni funzioni di  $\alpha$  e di  $c$  la prima, di  $\beta$  e di  $\delta$  la seconda. In un terzo ed ultimo momento, si ottengono le stime  $\hat{\alpha}_{0,1}$  e  $\hat{c}_{0,1}$  dei parametri mediante una regressione lineare sulla prima relazione e si ottengono le stime  $\hat{\beta}_{0,2}$  e  $\hat{\delta}_{0,2}$  dei parametri mediante una opportuna iterazione di una regressione lineare sulla seconda relazione.

(3.C) nella terza ed ultima fase si ottengono le stime finali  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{c}$  e  $\hat{\delta}$  asintoticamente corrette<sup>3</sup>, consistenti ed efficienti<sup>4</sup> dei parametri

<sup>1</sup> Uno stimatore  $S_N(\underline{X})$  del parametro  $\vartheta$ , dove  $N$  indica l'ampiezza del campione, si dice che è consistente se  $\lim_{N \rightarrow +\infty} P\{|S_N(\underline{X}) - \vartheta| > \varepsilon\} = 0$ .

<sup>2</sup> È possibile verificare che, se la variabile casuale  $X$  ha una funzione di distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile di parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c$  e  $\delta$  allora la variabile casuale standardizzata  $X'$  avrà ancora una funzione di distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile ma di parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ , 1 e 0.

<sup>3</sup> Uno stimatore  $S_N(X)$  del parametro  $\vartheta$  si dice che è asintoticamente corretto se  $\lim_{N \rightarrow +\infty} E[S_N(X)] = \vartheta$ .

<sup>4</sup> Uno stimatore  $S_{1,N}(X)$  del parametro  $\vartheta$  si dice che è efficiente, relativamente allo stimatore  $S_{2,N}(X)$  dello stesso parametro, se  $\frac{E\{[S_{2,N}(X) - \vartheta]^2\}}{E\{[S_{1,N}(X) - \vartheta]^2\}} > 1$ .

della funzione di densità di probabilità associata alle variabili casuali non standardizzate, in sostanza, mediante l'applicazione iterata delle regressioni lineari descritte nel punto precedente e mediante una opportuna operazione di de-standardizzazione. In particolare, per determinare l'iterazione  $i^*$ -esima in corrispondenza della quale si ottengono le stime finali, in un primo momento si definisce la seguente quantità:

$$E_i = (\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_{i-1})^2 + (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{i-1})^2 + (\hat{c}_i - \hat{c}_{i-1})^2 + (\hat{\delta}_i - \hat{\delta}_{i-1})^2 \quad (3.2)$$

dove

$E_i$ : somma dei quadrati delle differenze fra le stime finali dei parametri ottenute, rispettivamente, alla iterazione  $i$ -esima ed alla iterazione  $(i - 1)$ -esima;

$\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{c}_i, \hat{\delta}_i$ : stime finali dei parametri della funzione di densità di probabilità associata alle variabili casuali non standardizzate ottenute alla iterazione  $i$ -esima;

ed in un secondo momento si determina l'iterazione  $i^*$ -esima come quella che soddisfa il seguente criterio di scelta:

$$C_i = \begin{cases} E_i < \varepsilon & \text{se } i \leq M \\ \min_{1 \leq i \leq M} E_i & \text{se } i = M + 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

dove

$\varepsilon$ : prefissato valore di soglia;

$M$ : prefissato massimo numero di iterazioni<sup>5</sup>.

Nel prosieguo della seguente sezione si illustreranno in dettaglio gli aspetti tecnici relativi all'impostazione ed allo sviluppo della procedura di stima.

### 3.A. Fase I

In questa fase in un primo momento si determinano come segue i valori dei cinque quantili campionari  $\hat{X}_{0.05}$ ,  $\hat{X}_{0.25}$ ,  $\hat{X}_{0.50}$ ,  $\hat{X}_{0.75}$  e  $\hat{X}_{0.95}$  a partire dalla realizzazione  $\underline{x}$  che specifica la serie temporale:

---

<sup>5</sup> La presenza in tale criterio di scelta di un secondo "ramo" così definito dipende dal fatto che, nel primo "ramo", la condizione relativa alla convergenza della sequenza  $\{E_i, i = 1, \dots\}$  al prefissato valore  $\varepsilon$  può risultare non soddisfatta.

Passo 1: si ordinano in senso crescente gli elementi della realizzazione  $\{x_j, j = 1, \dots, N\}$ , ottenendo la successione  $\tilde{x}$ ;

Passo 2: si determina il valore del generico quantile campionario  $\hat{X}_p$ ,  $p \in [0, 1]$  mediante l'utilizzo del seguente stimatore consistente:

$$\hat{X}_p = \begin{cases} \tilde{x}_1 & \text{se } p = 0 \\ \tilde{x}_{\tilde{N}} & \text{se } p \in ]0, 1[ \wedge \tilde{N} \in \mathbf{N} \\ \tilde{x}_* & \text{se } p \in ]0, 1[ \wedge \tilde{N} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N} \\ \tilde{x}_N & \text{se } p = 1 \end{cases} \quad (3.A.1)$$

dove

$$\tilde{N} = Np + \frac{1}{2};$$

$\tilde{x}_* = [\tilde{N} - \text{Int}(\tilde{N})][\tilde{x}_{\text{Int}(\tilde{N})+1} - \tilde{x}_{\text{Int}(\tilde{N})}] + \tilde{x}_{\text{Int}(\tilde{N})}$ , con  $\text{Int}(\cdot)$  che indica la funzione parte intera.

In un secondo momento si determinano come segue le stime dei parametri a partire dai cinque quantili campionari (ottenuti precedentemente) e da quattro predeterminate tabelle funzioni dei cinque corrispondenti quantili teorici.

### 3.A.1. Stime dei parametri $\alpha$ e $\beta$

Al fine di ottenere le stime dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ , si definiscono inizialmente le due seguenti quantità teoriche:

$$\nu_\alpha = \frac{X_{0.95} - X_{0.05}}{X_{0.75} - X_{0.25}} \quad (3.A.1.1)$$

e

$$\nu_\beta = \frac{X_{0.95} + X_{0.05} - 2X_{0.50}}{X_{0.95} - X_{0.05}}, \quad (3.A.1.2)$$

ognuna delle quali può essere espressa in funzione dei soli parametri  $\alpha$  e  $\beta$  e, dunque, indipendentemente sia dal parametro  $c$  che dal parametro  $\delta$ , relazioni che, dunque, possono essere indicate come segue:

$$\begin{cases} \nu_\alpha = \Phi_1(\alpha, \beta) \\ \nu_\beta = \Phi_2(\alpha, \beta) \end{cases} \quad (3.A.1.3)$$

I parametri  $\alpha$  e  $\beta$  si ottengono dalla risoluzione del sistema (3.A.1.3) mediante opportune interpolazioni lineari dei valori di  $\nu_\alpha$  e di  $\nu_\beta$  tabulati in [McCulloch H. J., 1986], soluzione formalmente indicabile come segue:

$$\begin{cases} \alpha = \Psi_1(\nu_\alpha, \nu_\beta) \\ \beta = \Psi_2(\nu_\alpha, \nu_\beta) \end{cases} \quad (3.A.1.4)$$

Evidentemente, al fine di ottenere dalla (3.A.1.4) le stime consistenti  $\hat{\alpha}_0$  e  $\hat{\beta}_0$ , è necessario predeterminare i valori campionari delle quantità (3.A.1.1) e (3.A.1.2) mediante l'utilizzo dei seguenti stimatori consistenti:

$$\hat{\nu}_\alpha = \frac{\hat{X}_{0.95} - \hat{X}_{0.05}}{\hat{X}_{0.75} - \hat{X}_{0.25}} \quad (3.A.1.5)$$

e

$$\hat{\nu}_\beta = \frac{\hat{X}_{0.95} + \hat{X}_{0.05} - 2\hat{X}_{0.50}}{\hat{X}_{0.95} - \hat{X}_{0.05}} \quad (3.A.1.6)$$

Infine, risulta possibile caratterizzare ulteriormente le quantità (3.A.1.1) e (3.A.1.2), mediante le seguenti proposizioni ed il seguente corollario:

**Proposizione 3.A.1.1.** (Corazza M. in [Canestrelli E. *et al.*, 1993]) *Sia data una variabile casuale avente distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica. Allora per questa si ha:*

$$\nu_\alpha = \frac{\delta - X_{0.05}}{\delta - X_{0.25}} = \frac{\delta - X_{0.05}}{X_{0.75} - \delta} = \frac{X_{0.95} - \delta}{\delta - X_{0.25}} = \frac{X_{0.95} - \delta}{X_{0.75} - \delta} \quad (3.A.1.7)$$

**Dimostrazione.** Nell'ipotesi di una variabile casuale avente una generica distribuzione di probabilità simmetrica si ha:

$$X_p = 2X_{0.50} - X_{(1-p)}, \quad p \in [0, 1] \quad (3.A.1.8)$$

dove

$X_{0.50}$ : mediana della generica distribuzione di probabilità simmetrica.

In particolare, dalla (3.A.1.8), nell'ipotesi di una variabile casuale avente una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica e, dunque, per la quale si verifica che la mediana  $X_{0.50}$  è uguale a  $\delta$ , si ha che:

$$X_p = 2\delta - X_{(1-p)}, \quad p \in [0, 1]. \quad (3.A.1.9)$$

Dalla (3.A.1.9) è possibile ottenere, fra le altre, le seguenti relazioni:

$$X_{0.05} = 2\delta - X_{0.95}, \quad (3.A.1.10.A)$$

$$X_{0.25} = 2\delta - X_{0.75}, \quad (3.A.1.10.B)$$

$$X_{0.75} = 2\delta - X_{0.25}, \quad (3.A.1.10.C)$$

$$X_{0.95} = 2\delta - X_{0.05}. \quad (3.A.1.10.D)$$

Sostituendo, alternativamente, la (3.A.1.10.A) e la (3.A.1.10.D) nel numeratore della (3.A.1.1) è possibile dare di questo ultimo le due seguenti formulazioni alternative:

$$X_{0.95} - X_{0.05} = \left\{ \begin{array}{l} 2(\delta - X_{0.05}) \\ 2(X_{0.95} - \delta) \end{array} \right. \quad (3.A.1.11)$$

In maniera analoga, sostituendo, alternativamente, la (3.A.1.10.B) e la (3.A.1.10.C) nel denominatore della (3.A.1.1) è possibile dare di questo ultimo le due seguenti formulazioni alternative:

$$X_{0.75} - X_{0.25} = \left\{ \begin{array}{l} 2(\delta - X_{0.25}) \\ 2(X_{0.75} - \delta) \end{array} \right. \quad (3.A.1.12)$$

Ora, costruendo tutti i possibili rapporti fra le due formulazioni alternative del numeratore (3.A.1.11) e le due del denominatore (3.A.1.12), si ottengono le quattro uguaglianze della (3.A.1.7). ■

**Corollario 3.A.1.2.** (Corazza M. in [Canestrelli E. *et al.*, 1993]) *Sia data una variabile casuale avente distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica con mediana appartenente all'asse delle ordinate del sistema cartesiano di riferimento. Allora per questa si ha:*

$$\nu_\alpha = \frac{X_{0.05}}{X_{0.25}} = -\frac{X_{0.05}}{X_{0.75}} = -\frac{X_{0.95}}{X_{0.25}} = \frac{X_{0.95}}{X_{0.75}}. \quad (3.A.1.13)$$

**Dimostrazione.** Nell'ipotesi di una variabile casuale avente una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica con mediana

appartenente all'asse delle ordinate del sistema cartesiano di riferimento si ha:

$$\delta = 0. \quad (3.A.1.14)$$

Ora, sostituendo la (3.A.1.14) nelle quattro uguaglianze della (3.A.1.7), mediante elementari passaggi algebrici si ottengono le quattro uguaglianze della (3.A.1.13). ■

**Proposizione 3.A.1.3.** (Corazza M. in [Canestrelli E. *et al.*, 1993]) Sia data una variabile casuale avente una generica distribuzione di probabilità simmetrica. Allora per questa si ha:

$$\nu_\beta = 0. \quad (3.A.1.15)$$

**Dimostrazione.** Dalla (3.A.1.8) si ha:

$$2X_{0.50} = X_p + X_{(1-p)}, \quad p \in [0, 1]. \quad (3.A.1.16)$$

Ora, sostituendo la (3.A.1.16) nella (3.A.1.2), mediante elementari passaggi algebrici si ha:

$$\nu_\beta = \frac{X_{0.95} + X_{0.05} - (X_{0.95} + X_{0.05})}{X_{0.95} - X_{0.05}} = \frac{0}{X_{0.95} - X_{0.05}} = 0. \quad (3.A.1.17)$$

### 3.A.2. Stima del parametro $c$

Al fine di ottenere la stima del parametro  $c$  si definisce inizialmente la quantità teorica:

$$\nu_c = \frac{X_{0.75} - X_{0.25}}{c} \quad (3.A.2.1)$$

da cui

$$c = \frac{X_{0.75} - X_{0.25}}{\nu_c}, \quad (3.A.2.2)$$

dove i valori di  $\nu_c$  sono ottenuti in funzione di opportune interpolazioni lineari dei valori di  $\alpha$  e di  $\beta$  tabulati in [McCulloch H. J., 1986]. Evidentemente, al fine di ottenere dalla (3.A.2.2) la stima consistente  $\hat{c}_0$ , è necessario predeterminare i valori campionari delle quantità  $X_{0.75}$ ,  $X_{0.25}$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  mediante

i loro corrispondenti stimatori consistenti precedentemente introdotti. È da notare come la stima di  $\nu_c$  possa risultare distorta in funzione delle distorsioni delle stime di  $\alpha$  e di  $\beta$  ed in particolare è da notare come gli specifici percentili utilizzati nella definizione della quantità (3.A.2.1) non garantiscano<sup>6</sup> anche l'efficienza della stima  $\hat{c}_0$ . A quest'ultimo fine risulta più opportuna la definizione della seguente generica quantità teorica:

$$\nu_c^* = \frac{X_f - X_{(1-f)}}{c} \quad (3.A.2.3)$$

dove

$$f = f(\alpha, \beta) \in [0, 1].$$

Infine, relativamente alla quantità (3.A.2.2), si danno la seguente proposizione ed il seguente corollario:

**Proposizione 3.A.2.1.** (Corazza M. in [Canestrelli E. *et al.*, 1993]) *Sia data una variabile casuale avente distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica. Allora per questa si ha:*

$$c = \frac{2(\delta - X_{0.25})}{\nu_c} = \frac{2(X_{0.75} - \delta)}{\nu_c}. \quad (3.A.2.4)$$

**Dimostrazione.** Dalla (3.A.1.9) è possibile ottenere, fra le altre, le relazioni (3.A.1.10.B) e (3.A.1.10.C) che, sostituite, alternativamente, nel numeratore della (3.A.2.2), danno di questo ultimo le due seguenti formulazioni alternative:

$$X_{0.75} - X_{0.25} = \begin{cases} 2(\delta - X_{0.25}) \\ 2(X_{0.75} - \delta) \end{cases}. \quad (3.A.2.5)$$

Ora, costruendo tutti i possibili rapporti fra le due formulazioni alternative del numeratore (3.A.2.5) ed il denominatore della (3.A.2.2), si ottengono le due uguaglianze della (3.A.2.4). ■

---

<sup>6</sup> Ciò potrebbe riflettersi negativamente sui valori della stima finale di  $c$  e di  $\delta$  ottenute nella terza fase che, come si illustrerà nel seguito, sono anche funzione del valore assunto dalla stima di  $c$  in questa prima fase.

**Corollario 3.A.2.2.** (Corazza M. in [Canestrelli E. *et al.*, 1993]) Sia data una variabile casuale avente distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica con mediana appartenente all'asse delle ordinate del sistema cartesiano di riferimento. Allora per questa si ha:

$$c = -\frac{2X_{0.25}}{\nu_c} = \frac{2X_{0.75}}{\nu_c}. \quad (3.A.2.7)$$

**Dimostrazione.** Nell'ipotesi di una variabile casuale avente una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica con mediana appartenente all'asse delle ordinate del sistema cartesiano di riferimento vale la (3.A.1.14).

Ora, sostituendo la (3.A.1.14) nelle due uguaglianze della (3.A.2.4), mediante elementari passaggi algebrici si ottengono le due uguaglianze della (3.A.2.7).

■

### 3.A.3. Stima del parametro $\delta$

Al fine di ottenere la stima del parametro  $\delta$  si definisce inizialmente la quantità teorica

$$\nu_\delta = \frac{\xi - X_{0.50}}{c} \quad (3.A.3.1)$$

dove i valori di  $\nu_\delta$  sono tabulati in [McCulloch H. J., 1986] in funzione di  $\alpha$  e di  $\beta$  e dove

$$\xi = \begin{cases} \delta + \beta c \tan(\pi\alpha/2) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \delta & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}, \quad (3.A.3.2)$$

da cui, sostituendo la (3.A.3.2) nella (3.A.3.1), mediante elementari passaggi algebrici si ha:

$$\delta = \begin{cases} c[\nu_\delta - \beta \tan(\pi\alpha/2)] + X_{0.50} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ c\nu_\delta + X_{0.50} & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}. \quad (3.A.3.3)$$

Evidentemente è ancora necessario predeterminare i valori campionari delle quantità  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c$  e  $X_{0.50}$  mediante i loro stimatori consistenti, al fine di ottenere dalla (3.A.3.3) la stima consistente  $\hat{\delta}_0$ .

Un tale approccio alla stima del parametro  $\delta$  è reso necessario dalla “sensibilità” di quest’ultimo alla discontinuità ammessa dalla funzione caratteristica (2.2) in corrispondenza del valore di  $\alpha$  uguale a 1. In particolare è da notare come lo stimatore proposto per  $\delta$  possa risultare distorto sia in funzione della distorsione della stima di  $\nu_\delta$  (a sua volta funzione delle distorsioni di  $\alpha$  e di  $\beta$ ) sia in funzione delle distorsioni di  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $c$  che compaiono nella definizione funzionale (3.A.3.3)<sup>7</sup>. In particolare date  $N$  variabili casuali  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , indipendenti e identicamente distribuite secondo la stessa funzione di densità Pareto-Lévy stabile di parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c$  e  $\delta$  è possibile dimostrare che la seguente variabile casuale

$$X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (3.A.3.4)$$

si distribuisce ancora secondo una funzione di densità Pareto-Lévy stabile i cui soli parametri  $\alpha$  e  $\beta$  sono uguali a quelli delle identiche funzioni di densità associate alle variabili casuali  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . È ancora possibile dimostrare che, se  $\alpha \neq 1$ , il parametro  $\delta$  delle identiche funzioni di densità associate alle variabili casuali  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , coincide con il valore di quel quantile delle stesse variabili che risulta invariante sotto la trasformazione (3.A.3.4). Il suindicato approccio alternativo alla stima di  $\delta$  si fonda su quanto da ultimo premesso.

Infine, relativamente alla quantità (3.A.3.3), si da la seguente proposizione:

**Proposizione 3.A.3.1.** (Corazza M. in [Canestrelli E. *et al.*, 1993]) *Sia data una variabile casuale avente distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica. Allora per questa si ha:*

$$\nu_\delta = 0. \quad (3.A.3.5)$$

**Dimostrazione.** Nell’ipotesi di una variabile casuale avente una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica si ha:

$$\beta = 0, \quad (3.A.3.6)$$

---

<sup>7</sup> Ciò potrebbe riflettersi negativamente sui valori della stima finale di  $\delta$ , quella ottenuta nella terza fase, che, come si illustrerà meglio nel seguito, è anche funzione del valore assunto dalla stima di  $\delta$  in questa prima fase.

$$X_{0.50} = \delta. \quad (3.A.3.7)$$

Sostituendo la (3.A.3.6) e la (3.A.3.7) nella (3.A.3.3) si ha:

$$\delta = \begin{cases} c [\nu_\delta - 0 \tan(\pi\alpha/2)] + \delta & \text{se } \alpha \neq 1 \\ c \nu_\delta + \delta & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}, \quad (3.A.3.8)$$

da cui, mediante elementari passaggi algebrici, si ha:

$$0 = \begin{cases} c \nu_\delta & \text{se } \alpha \neq 1 \\ c \nu_\delta & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}. \quad (3.A.3.9)$$

Ora, poichè il parametro di scala  $c \in ]0, +\infty[$ , la uguaglianza (3.A.3.9) si ottiene quando  $\nu_\delta = 0$ . ■

### 3.B. Fase II

In questa fase in un primo momento, utilizzando le stime ottenute nella fase precedente, si determina la realizzazione standardizzata (3.1).

In un secondo momento, utilizzando le funzioni caratteristiche teorica e campionaria si determinano due distinte relazioni, funzione dell'esponente caratteristico e del parametro di scala la prima e del parametro di asimmetria e del parametro di localizzazione la seconda. Al fine di determinare queste due relazioni si riformula come segue la generica funzione caratteristica teorica associata alle variabili casuali standardizzate:

$$\Phi(t) = \exp(-|ct|^\alpha) \{ \cos[f(\alpha, \beta, c, \delta)] + i \sin[f(\alpha, \beta, c, \delta)] \} \quad (3.B.1)$$

dove<sup>8</sup>

$$f(\alpha, \beta, c, \delta) = \delta t - |ct|^\alpha \beta \operatorname{sgn}(t) \omega(t, \alpha).$$

---

<sup>8</sup> Relativamente ai parametri della generica funzione caratteristica teorica, al fine di evitare inutili appesantimenti formali, si è utilizzata la stessa notazione utilizzata per i parametri relativi alla funzione di densità di probabilità associata alle variabili casuali non standardizzate.

Relativamente alla determinazione della prima relazione, dalla (3.B.1), mediante elementari passaggi, si ottiene la seguente trasformazione del suo modulo

$$\log(-\log(|\Phi(t)|^2)) = \log(2 c^\alpha) + \alpha \log(|t|), \quad (3.B.2)$$

che è funzione dei soli parametri  $\alpha$  e  $c$ .

Ora, utilizzando la funzione caratteristica campionaria (2.3), dalla (3.B.2) si ottiene la seguente relazione, lineare in  $\alpha$ , su cui effettuare la regressione:

$$y'_k = \mu + \alpha w_k + \varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, K \quad (3.B.3)$$

dove

$y'_k = \log(-\log(|\Phi_N(t_k, \underline{x}'_K)|^2))$ , con  $t_k$  quantità reale opportunamente definita in [Koutrouvelis I. A., 1980] come  $\pi k/25$  e con  $\underline{x}'_K = \{x'_j, j = 1, \dots, K \leq N\}$ ;

$\mu = \log(2 c^\alpha)$ ;

$w_k = \log |t_k| = \log |\pi k/25|$ ;

$\varepsilon_k$ : variabili casuali che rappresentano il termine di errore, per le quali è possibile verificare ([Koutrouvelis I. A., 1981] e [Koutrouvelis I. A. *et al.*, 1982]) che si distribuiscono indipendentemente ed identicamente con media uguale a 0;

$K$ : valore intero determinato mediante una opportuna interpolazione lineare dei valori tabulati in [Koutrouvelis I. A., 1980] in funzione della stima di  $\alpha$  ottenuta nella fase precedente e dell'ampiezza  $N$  della realizzazione.

Relativamente alla determinazione della seconda relazione, nel caso in cui  $\alpha$  sia diverso<sup>9</sup> da 1, dalla (3.B.1), mediante elementari passaggi, si ottiene la

---

<sup>9</sup> È da notare come una tale limitazione sui valori assumibili da  $\alpha$  non sia anche presente nella determinazione della prima relazione. In particolare è possibile verificare che se l'esponente caratteristico è uguale a 1 il parametro di asimmetria è uguale a 0. Relativamente alla determinazione delle stime dei parametri  $c$  e  $\delta$  di una tale funzione di densità Pareto-Lévy stabile (nella fattispecie detta funzione di densità di Cauchy) in [Koutrouvelis I. A., 1982] è stata opportunamente sviluppata e definita una procedura di stima.

seguinte trasformazione delle sue parti reale ed immaginaria:

$$\arctan^* \left( \frac{\Im(\Phi(t))}{\Re(\Phi(t))} \right) = -\beta |ct|^\alpha \operatorname{sgn}(t) \tan \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) + \delta t \quad (3.B.4)$$

dove

$\arctan^*(\cdot)$ : quantità reale opportunamente definita in [Koutrouvelis I. A., 1980] in funzione di  $\arctan(\cdot)$ ;

$\Im(\cdot)$ : indica la parte immaginaria di un numero complesso;

$\Re(\cdot)$ : indica la parte reale di un numero complesso.

Ora, utilizzando la funzione caratteristica campionaria (2.3) e ricordando che il valore teorico di  $c$  è uguale a 1 (questo per la standardizzazione della realizzazione  $\underline{x}$ ), dalla (3.B.4) si ottiene la seguente relazione, lineare in  $\delta$  ed in  $\beta$ , su cui effettuare la regressione:

$$z'_l = -\beta |u_l|^\alpha \operatorname{sgn}(u_l) \tan \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) + \delta u_l + \eta_l, \quad l = 1, \dots, L \quad (3.B.5)$$

dove

$z'_l = \arctan(\Im(\Phi_N(u_l, \underline{x}'_L))/\Re(\Phi_N(u_l, \underline{x}'_L))) - \pi k_N(u_l, \underline{x}'_L)$ , con  $u_l$  quantità reale opportunamente definita in [Koutrouvelis I. A., 1980] come  $\pi l/50$ , con  $\underline{x}'_L = \{x'_j, j = 1, \dots, L \leq N\}$  e con  $k_N(u_l, \underline{x}'_L)$  quantità intera opportunamente definita la quale rende possibile che  $z'_l$  sia uguale ad  $\arctan^*(\Im(\Phi_N(u_l, \underline{x}'_L))/\Re(\Phi_N(u_l, \underline{x}'_L)))$ ;

$\eta_l$ : variabili casuali che rappresentano il termine di errore, per le quali è possibile verificare ([Koutrouvelis I. A., 1981] e [Koutrouvelis I. A. *et al.*, 1982]) che si distribuiscono indipendentemente ed identicamente con media uguale a 0;

$L$ : valore intero determinato mediante una opportuna interpolazione lineare dei valori tabulati in [Koutrouvelis I. A., 1980] in funzione della stima di  $\alpha$  ottenuta nella fase precedente e dell'ampiezza  $N$  della realizzazione.

In un terzo momento, mediante una prima regressione lineare sulla (3.B.3) e una seconda regressione lineare sulla (3.B.5), si ottengono, rispettivamente, le stime  $\hat{\alpha}_{0,1}$  e  $\hat{c}_{0,1}$  e le stime  $\hat{\beta}_{0,2}$  e  $\hat{\delta}_{0,2}$  dei parametri. Relativamente alla regressione lineare sulla (3.B.3), in un primo momento si ottengono le stime

$\hat{\alpha}_{0,1}$  e  $\hat{\mu}$ . In un secondo momento, ricordando la posizione  $\mu = \log(2 c^\alpha)$ , si determina la stima  $\hat{c}_{0,1}$  in funzione della stima di  $\alpha$  secondo la seguente relazione:

$$\hat{c}_{0,1} = \hat{c}_{0,1}(\hat{\mu}, \hat{\alpha}_{0,1}) = \left[ \frac{\exp(\hat{\mu})}{2} \right]^{(1/\hat{\alpha}_{0,1})}. \quad (3.B.6)$$

È da notare come la stima  $\hat{c}_{0,1}$  possa risultare distorta in funzione della distorsione della stima di  $\alpha$ .

Relativamente alla regressione lineare sulla (3.B.5), si ottengono come segue le stime  $\hat{\beta}_{0,2}$  e  $\hat{\delta}_{0,2}$ :

Passo 1: si utilizza la stima  $\hat{c}_{0,1}$ , ottenuta come descritto dalla (3.B.3), per definire la seguente trasformazione della realizzazione standardizzata (3.1):

$$\tilde{\underline{x}}''_s = \left\{ x''_{j,s} = \frac{x'_j}{\hat{c}_{0,1}} - \lambda_{0,s} = \frac{x_j - \hat{\delta}_0}{\hat{c}_0 \hat{c}_{0,1}} - \lambda_{0,s}, \quad j = 1, \dots, N \right\} \quad (3.B.7)$$

dove

$\lambda_{0,s}$ : quantità reale opportunamente definita la quale rende possibile, in maniera computazionalmente più facile rispetto all'utilizzo di  $k_N(u_l, \underline{x}'_L)$ , che  $z''_{l,s}$  sia uguale a  $\arctan^*(\Im(\Phi_N(u_l, \underline{x}'_L))/\Re(\Phi_N(u_l, \underline{x}'_L)))$ , con  $z''_{l,s} = \arctan(\Im(\Phi_N(u_l, \underline{x}''_{L,s}))/\Re(\Phi_N(u_l, \underline{x}''_{L,s})))$  e con  $\underline{x}''_{L,s} = \{x''_{j,s}, j = 1, \dots, L \leq N\}$ ;

Passo 2: si utilizza la stima  $\hat{\alpha}_{0,1}$ , ottenuta come descritto dalla (3.B.3), e si utilizza la quantità  $z''_{l,s}$  per definire la seguente riformulazione della (3.B.5) su cui effettuare la regressione:

$$z''_{l,s} = -\beta \left[ |u_l|^{\hat{\alpha}_{0,1}} \operatorname{sgn}(u_l) \tan \left( \frac{\pi \hat{\alpha}_{0,1}}{2} \right) \right] + \delta u_l + \eta_l, \quad l = 1, \dots, L; \quad (3.B.8)$$

Passo 3: si inizializza l'indice  $s$  a 0;

Passo 4: si inizializza la quantità reale  $\lambda_{0,s}$  a 0;

Passo 5: si determina la trasformazione (3.B.7) della realizzazione standardizzata (3.1);

Passo 6: si determinano le quantità  $z''_{l,s}$ ,  $l = 1, \dots, L$  e si determinano le quantità  $\arctan^*(\Im(\Phi_N(u_l, \underline{x}'_L))/\Re(\Phi_N(u_l, \underline{x}'_L)))$ ,  $l = 1, \dots, L$ ;

Passo 7: se si verifica che  $z''_{l,s} \neq \arctan^*(\Im(\Phi_N(u_l, \underline{x}'_L))/\Re(\Phi_n(u_l, \underline{x}'_L)))$  per qualche  $l = 1, \dots, L$  si va al Passo 8, altrimenti si va al Passo 11;

Passo 8: si incrementa il valore dell'indice  $s$  di una unità;

Passo 9: si aggiorna opportunamente il valore della quantità reale  $\lambda_{s,0}$ ;

Passo 10: si torna al Passo 5;

Passo 11: si ottengono le stime  $\hat{\beta}_{0,2}$  e  $\hat{\delta}_{0,2}$  mediante una regressione lineare sulla (3.B.8).

È da notare come le stime  $\hat{\beta}_{0,2}$  e  $\hat{\delta}_{0,2}$  siano funzione della stima di  $\alpha$ , per cui possano risultare distorte in funzione della distorsione di quest'ultima.

### 3.C. Fase III

In questa fase si ottengono le stime finali dei parametri in sostanza mediante l'applicazione iterata di quanto descritto nella fase precedente. In particolare in un primo momento della generica  $i$ -esima iterazione, si determinano due distinte relazioni, funzione dell'esponente caratteristico e del parametro di scala la prima e del parametro di asimmetria e del parametro di localizzazione la seconda, analogamente a quanto fatto nel secondo momento della fase precedente. In un secondo momento della generica  $i$ -esima iterazione, si ottengono le stime  $\hat{\alpha}_{i,1}$  e  $\hat{c}_{i,1}$  mediante l'effettuazione di una regressione lineare sulla prima relazione e si ottengono le stime  $\hat{\beta}_{i,2}$  e  $\hat{\delta}_{i,2}$  in funzione di una quantità reale  $\lambda_{i,s}$  opportunamente definita mediante l'effettuazione di una regressione lineare sulla seconda relazione, analogamente a quanto fatto nel terzo momento della fase precedente. In un terzo momento della generica  $i$ -iterazione, si ottengono le stime  $\hat{\alpha}_i$ ,  $\hat{\beta}_i$ ,  $\hat{c}_i$  e  $\hat{\delta}_i$  asintoticamente corrette, consistenti ed efficienti dei parametri della funzione di densità di probabilità associata alle variabili casuali non standardizzate mediante la seguente operazione di de-standardizzazione:

$$\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_{i,1}, \quad (3.C.A)$$

$$\hat{\beta}_i = \hat{\beta}_{i,2}, \quad (3.C.B)$$

$$\hat{c}_i = \hat{c}_0 \prod_{h=0}^i \hat{c}_{h,1}, \quad (3.C.C)$$

$$\hat{\delta}_i = \hat{\delta}_0 + \hat{c}_0 \sum_{h=0}^i \lambda_{s,h} \prod_{r=0}^h \hat{c}_{r,1} + \hat{c}_i \hat{\delta}_{i,2}. \quad (3.C.D)$$

È da notare come le stime  $\hat{c}_i$  e  $\hat{\delta}_i$  siano funzione, rispettivamente, delle stime di  $c$  e delle stime di  $c$  e di  $\delta$  ottenute nelle fasi precedenti e nelle iterazioni di questa ultima, per cui possano risultare distorte in funzione delle distorsioni di queste ultime. In un quarto ed ultimo momento, mediante l'utilizzo del criterio di scelta (3.3), si determina l'iterazione  $i^*$ -esima in corrispondenza della quale si ottengono le stime finali  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_{i^*}$ ,  $\hat{\beta} = \hat{\beta}_{i^*}$ ,  $\hat{c} = \hat{c}_{i^*}$  e  $\hat{\delta} = \hat{\delta}_{i^*}$ .

#### 4. SIGNIFICATIVITÀ DELLE STIME DEI PARAMETRI

Al fine di verificare la significatività delle stime dei parametri ottenute nella sezione precedente, in questa si propongono dei tests asintotici di tipo  $t$ . Gli aspetti teorici necessari per la definizione di questi tests riguardano la individuazione delle funzioni di densità di probabilità associate ai vari stimatori descritti nella sezione 3.. In particolare in [Koutrouvelis I. A. *et al.*, 1982] è stata verificata l'evidenza empirica secondo la quale gli stimatori  $\hat{\alpha}_{i,1}$  e  $\hat{c}_{i,1}$  si distribuiscono asintoticamente come una variabile casuale Normale e secondo la quale, se la distribuzione di probabilità è simmetrica (cioè se  $\beta = 0$ ), anche lo stimatore  $\hat{\delta}_{i,2}$  si distribuisce asintoticamente come una variabile casuale Normale. È da porre in evidenza la distinzione presente in letteratura tra la nozione di “distribuzione limite” e quella di “distribuzione asintotica” in relazione ad una sequenza di stimatori. In particolare la “distribuzione limite” è la distribuzione analitica del limite della sequenza di stimatori. In questo caso non è corretto né definire dei tests asintotici né individuare degli intervalli di confidenza. Invece, la “distribuzione asintotica” è una distribuzione che, per  $N$  sufficientemente grande, può essere utilizzata per approssimare la distribuzione “vera” dello stimatore. Solo in questo secondo caso è corretto definire dei tests asintotici (per maggiori dettagli si veda [Cappuccio N. *et al.*, 1991]). Formalmente, in base alla usuale notazione

statistica, si ha:

$$\sqrt{2N} \left[ \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{i,1} \\ \hat{c}_{i,1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ c \end{pmatrix} \right] \stackrel{ad}{=} N(\underline{0}, S_{\hat{\alpha}_{i,1}, \hat{c}_{i,1}}) \quad (4.1)$$

dove

$\stackrel{ad}{=}$ : indica l'uguaglianza asintotica delle distribuzioni;

$\underline{0}$ : vettore  $(2 \times 1)$  i cui elementi sono nulli;

$S_{\hat{\alpha}_{i,1}, \hat{c}_{i,1}}$ : matrice  $(2 \times 2)$  delle varianze e delle covarianze campionarie asintotiche opportunamente definita in [Koutrouvelis I. A. *et al.*, 1982];

e si ha:

$$\sqrt{2N}(\hat{\delta}_{i,2} - \delta) \stackrel{ad}{=} N(0, \sigma_{\hat{\delta}_{i,2}}^2) \quad \text{se } \beta = 0 \quad (4.2)$$

dove<sup>10</sup>

$\sigma_{\hat{\delta}_{i,2}}^2$ : varianza campionaria asintotica opportunamente definita in [Koutrouvelis I. A. *et al.*, 1982].

In base a quanto da ultimo premesso è, dunque, possibile definire i seguenti tests asintotici di tipo  $t$  associati, rispettivamente agli stimatori  $\hat{\alpha}_{i,1}$ ,  $\hat{c}_{i,1}$  e, se  $\hat{\beta}_{i,1} = 0$ ,  $\hat{\delta}_{i,2}$ :

$$t_{c,+\infty}(\hat{\alpha}_{i,1}) = \sqrt{\frac{N-2}{S(1,1)_{\hat{\alpha}_{i,1}, \hat{c}_{i,1}}}} (\hat{\alpha}_{i,1} - \alpha), \quad (4.3)$$

$$t_{c,+\infty}(\hat{c}_{i,1}) = \sqrt{\frac{N-2}{S(2,2)_{\hat{\alpha}_{i,1}, \hat{c}_{i,1}}}} (\hat{c}_{i,1} - c), \quad (4.4)$$

$$t_{c,+\infty}(\hat{\delta}_{i,2}) = \frac{\sqrt{N-1}}{\sigma_{\hat{\delta}_{i,2}}} (\hat{\delta}_{i,2} - \delta) \quad \text{se } \hat{\beta}_{i,2} = 0 \quad (4.5)$$

dove

$t_{c,+\infty}(\cdot)$ : valore campionario assunto dal test asintotico di tipo  $t$  da confrontare con il valore teorico assunto dal test di tipo  $t$  in corrispondenza di un prefissato valore del livello di significatività.

---

<sup>10</sup> La presenza, o meno, di simmetria nella funzione di densità di probabilità indagata è determinata in funzione del valore assunto dalla stima puntuale  $\hat{\beta}_{i,2}$ .

È da notare come la (4.3), in corrispondenza della  $i^*$ -esima iterazione, fornisca un test asintotico di tipo  $t$  per la stessa stima finale dell'esponente caratteristico relativo alla distribuzione di probabilità associata alle variabili casuali non standardizzate poichè  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_{i^*} = \hat{\alpha}_{i^*, 1}$ .

## 5. ASPETTI APPLICATIVI E RISULTATI

In questa sezione si presentano gli aspetti applicativi ed i risultati dell'applicazione della procedura di stima proposta nella sezione 3. a serie temporali Pareto-Lévy stabili standardizzate simulate. In un primo momento si è puntualizzato il criterio di scelta (3.3) fissando i valori delle quantità  $\varepsilon$  e  $M$  rispettivamente a  $1E - 8$  ed a 20. In un secondo momento si sono generate, mediante l'utilizzo di procedure proposte in [Chambers, J. M. *et al.*, 1976] ed in [Panton D. B., 1988], delle serie temporali Pareto-Lévy stabili standardizzate  $\underline{x}_m$ ,  $m = 1, \dots, 13$  di ampiezza  $N = 5000$ , una in corrispondenza di ognuna delle coppie  $(\alpha, \beta)$  di valori dei parametri appartenenti all'insieme  $\{(0.5, 0.999, 1.001, 1.5) \times (-0.5, 0, +0.5)\} \cup \{(2, 0)\}$ . È da notare come, per il parametro  $\alpha$ , la scelta dei valori 0.999 e 1.001 sia stata effettuata per poter osservare il comportamento della procedura di stima nelle "vicinanze" del valore di  $\alpha$  in corrispondenza del quale la funzione caratteristica teorica (2.2) ammette una discontinuità. In un terzo ed ultimo momento si è applicata la procedura di stima ad ognuna delle seguenti sotto-serie temporali estratte da ogni serie temporale  $\underline{x}_m$ :

$$\underline{x}_{m,p} = \{x_{m,q}, \quad q = 1, \dots, N_p\} \quad (5.1)$$

dove

$$N_p = \begin{cases} 1000 & \text{se } p = 1 \\ 2500 & \text{se } p = 2, \\ 5000 & \text{se } p = 3 \end{cases}$$

ciò al fine di osservare il comportamento della procedura di stima all'aumentare dell'ampiezza campionaria.

I risultati dell'applicazione della procedura di stima alle serie temporali  $\underline{x}_{m,p}$  sono riportati nella seguente tabella.

Tabella 5.1

$N_p$	$\hat{\alpha}$	$R_{\hat{\alpha}}^2$	$\overline{R}_{\hat{\alpha}}^2$	$\hat{\beta}$	$R_{\hat{\beta}}^2$	$\overline{R}_{\hat{\beta}}^2$	$\hat{c}$	$\hat{\delta}$	$i^*$	$\lambda_{i^*,s}$
—	<b>0.500</b>	—	—	<b>-0.500</b>	—	—	<b>1.000</b>	<b>0.000</b>	—	—
<b>1000</b>	0.512	0.981	0.980	-0.530	0.981	0.980	1.079	0.538	8	-0.500
<b>2500</b>	0.540	0.996	0.996	-0.473	0.995	0.995	1.014	0.533	3	-0.400
<b>5000</b>	0.518	0.996	0.996	-0.571	0.997	0.997	0.977	0.594	6	-0.450
—	<b>0.500</b>	—	—	<b>0.000</b>	—	—	<b>1.000</b>	<b>0.000</b>	—	—
<b>1000</b>	0.439	0.950	0.950	0.164	0.688	0.681	1.084	-0.094	13	-0.050
<b>2500</b>	0.454	0.983	0.983	0.002	0.912	0.910	1.008	-0.008	10	-0.050
<b>5000</b>	0.467	0.991	0.991	0.013	0.987	0.987	1.019	-0.009	12	-0.100
—	<b>0.500</b>	—	—	<b>0.500</b>	—	—	<b>1.000</b>	<b>0.000</b>	—	—
<b>1000</b>	0.457	0.975	0.975	0.334	0.893	0.890	1.154	-0.307	10	0.000
<b>2500</b>	0.488	0.989	0.989	0.466	0.831	0.827	1.052	-0.448	19	0.000
<b>5000</b>	0.494	0.996	0.996	0.423	0.931	0.929	0.992	-0.429	6	0.000
—	<b>0.999</b>	—	—	<b>-0.500</b>	—	—	<b>1.000</b>	<b>0.000</b>	—	—
<b>1000</b>	1.006	0.998	0.998	-0.405	0.997	0.997	1.012	-0.021	18	-0.800
<b>2500</b>	1.008	0.999	0.999	-0.416	0.999	0.999	1.002	0.001	11	-1.000
<b>5000</b>	1.003	1.000	0.999	-0.479	0.999	0.999	1.021	-0.004	4	-0.900
—	<b>0.999</b>	—	—	<b>0.000</b>	—	—	<b>1.000</b>	<b>0.000</b>	—	—
<b>1000</b>	0.942	0.996	0.996	-0.025	0.858	0.847	1.033	0.019	17	-0.100
<b>2500</b>	0.980	1.000	1.000	-0.018	0.961	0.958	0.986	0.005	18	-0.100
<b>5000</b>	0.989	1.000	1.000	-0.031	0.961	0.958	0.980	0.002	3	-0.100
—	<b>0.999</b>	—	—	<b>0.500</b>	—	—	<b>1.000</b>	<b>0.000</b>	—	—
<b>1000</b>	0.984	0.988	0.988	0.584	0.784	0.768	0.953	-0.109	3	-0.050
<b>2500</b>	0.971	0.999	0.999	0.502	0.891	0.882	0.949	-0.067	7	-0.050
<b>5000</b>	0.974	0.999	0.999	0.509	0.984	0.983	0.983	-0.055	10	-0.050
—	<b>1.001</b>	—	—	<b>-0.500</b>	—	—	<b>1.000</b>	<b>0.000</b>	—	—
<b>1000</b>	0.944	0.999	0.999	-0.562	0.999	0.999	0.977	-0.033	6	-1.000
<b>2500</b>	0.953	0.999	0.999	-0.600	0.999	0.999	0.995	0.015	9	-0.850
<b>5000</b>	0.962	1.000	1.000	-0.512	1.000	1.000	0.999	-0.014	11	-0.800
—	<b>1.001</b>	—	—	<b>0.000</b>	—	—	<b>1.000</b>	<b>0.000</b>	—	—
<b>1000</b>	1.001	0.998	0.998	-0.026	0.935	0.930	0.936	0.032	4	-0.100
<b>2500</b>	1.034	0.999	0.999	-0.040	0.963	0.960	0.995	0.094	2	-0.100
<b>5000</b>	1.032	0.999	0.999	-0.005	0.931	0.926	1.017	0.021	4	-0.100

–	<b>1.001</b>	–	–	<b>0.500</b>	–	–	<b>1.000 0.000</b>	–	–	
1000	1.011	0.997	0.997	0.436	0.931	0.926	0.965	0.008	7	0.000
2500	0.999	0.999	0.999	0.399	0.862	0.852	0.952	-0.002	19	0.000
5000	1.009	1.000	1.000	0.437	0.950	0.946	0.970	-0.005	3	0.000
–	<b>1.500</b>	–	–	<b>-0.500</b>	–	–	<b>1.000 0.000</b>	–	–	
1000	1.563	1.000	0.999	-0.391	0.998	0.998	1.006	-0.419	4	-0.350
2500	1.485	1.000	1.000	-0.506	0.998	0.998	0.971	-0.517	2	-0.350
5000	1.514	1.000	1.000	-0.497	1.000	1.000	0.999	-0.486	3	-0.400
–	<b>1.500</b>	–	–	<b>0.000</b>	–	–	<b>1.000 0.000</b>	–	–	
1000	1.450	0.999	0.999	0.007	0.930	0.925	1.031	-0.067	1	-0.150
2500	1.532	1.000	1.000	-0.052	0.913	0.907	1.073	-0.066	2	-0.050
5000	1.500	1.000	1.000	-0.029	0.959	0.956	1.036	-0.023	2	-0.050
–	<b>1.500</b>	–	–	<b>0.500</b>	–	–	<b>1.000 0.000</b>	–	–	
1000	1.463	0.997	0.997	0.597	0.982	0.980	1.021	0.670	1	-0.050
2500	1.480	1.000	1.000	0.590	0.975	0.973	1.026	0.611	2	0.000
5000	1.480	1.000	1.000	0.514	0.998	0.997	0.996	0.569	2	0.000
–	<b>2.000</b>	–	–	<b>0.000</b>	–	–	<b>1.000 0.000</b>	–	–	
1000	1.982	1.000	1.000	-0.357	0.965	0.960	1.015	0.071	2	-0.050
2500	1.994	1.000	1.000	-0.100	0.816	0.796	1.005	0.058	1	0.000
5000	1.992	1.000	1.000	0.041	0.999	0.999	1.004	0.029	2	-0.050

## 6. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI

Dai risultati presentati nella Tabella 5.1 si hanno le seguenti osservazioni e considerazioni finali relative sia ai valori assunti dalle stime puntuali dei quattro parametri che alla procedura di stima:

(6.1) il valore assunto da  $\hat{\alpha}$  in corrispondenza di ogni  $\underline{x}_{m,p}$  risulta sempre “vicino” al valore vero del parametro  $\alpha$ . Ad ognuno di questi valori della stima risultano associati valori elevati sia di  $R_{\hat{\alpha}}^2$  che di  $\overline{R}_{\hat{\alpha}}^2$ , il cui intervallo di variazione è, per entrambi,  $[0.950, 1.000]$ ;

(6.2) il comportamento del valore assunto da  $\hat{\beta}$  in corrispondenza di ogni  $\underline{x}_{m,p}$  risulta analogo a quello del valore assunto da  $\hat{\alpha}$ , anche nelle “vicinanze”

del valore di  $\alpha$  ( $\alpha = 0.999$  e  $\alpha = 1.001$ ) in corrispondenza del quale la funzione caratteristica teorica (2.2) ammette una discontinuità. Ad ognuno di questi valori della stima risultano associati valori elevati sia di  $R_{\hat{\beta}}^2$  che di  $\overline{R_{\hat{\beta}}^2}$  (anche se, in media, leggermente inferiori rispetto a quelli assunti da  $R_{\hat{\alpha}}^2$  e da  $\overline{R_{\hat{\alpha}}^2}$ ), il cui intervallo di variazione è, rispettivamente,  $[0.688, 1.000]$  e  $[0.681, 1.000]$ ;

(6.3) il comportamento del valore assunto da  $\hat{c}$  in corrispondenza di ogni  $\underline{x}_{m,p}$  risulta analogo a quello del valore assunto da  $\hat{\alpha}$ . Ad ognuno di questi valori assunti dalla stima non è possibile associare una misura della bontà di accostamento al valore vero del parametro poichè questi non si ottengono direttamente da una regressione lineare;

(6.4) il comportamento del valore assunto da  $\hat{\delta}$  in corrispondenza di ogni  $\underline{x}_{m,p}$  risulta analogo a quello del valore assunto da  $\hat{\alpha}$  nel 70%, circa, dei casi, risultando “evidentemente lontano” dal valore vero del parametro nel 30%, circa, dei casi. Ciò si può reputare come conseguenza del fatto che  $\hat{\delta}$  è funzione delle stime  $\hat{c}_0$ ,  $\hat{c}_{i,1}$ ,  $\hat{\delta}_0$  e  $\hat{\delta}_{i,1}$ ,  $i = 1, \dots, i^*$ , per cui può risultare distorto in funzione delle distorsioni di queste ultime. Analogamente a quanto si verifica per i valori assunti da  $\hat{c}$  anche ad ognuno di quelli assunti da  $\hat{\delta}$  non è possibile associare una misura della bontà di accostamento al valore vero del parametro;

(6.5) all'aumentare dell'ampiezza campionaria i valori assunti da  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{c}$  e  $\hat{\delta}$  mostrano, in media, un lento “avvicinamento” ai valori veri dei quattro parametri, evidenziando un comportamento “asintotico” già in corrispondenza di una ampiezza campionaria  $N = 1000$ ;

(6.6) il valore assunto dalla quantità  $\lambda_{i^*,s}$  in corrispondenza di ogni  $\underline{x}_{m,p}$  risulta diverso da 0 nel 75%, circa, dei casi, evidenziando la necessità che ha questa procedura di stima di disporre di dati opportunamente pre-trattati.



# CAPITOLO III

## PROCESSI STOCASTICI “MOTI BROWNIANI FRAZIONARI” E ANALISI *RESCALED RANGE*

### 1. INTRODUZIONE

Risultati empirici relativi all'analisi delle serie temporali economico-finanziarie hanno evidenziato un crescente interesse nei confronti sia dei processi stocastici “moti Browniani frazionari” che dell'analisi *rescaled range*, detta anche analisi R/S, ([Mandelbrot B. B. *et al.*, 1968], [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1972], [Greene M. T. *et al.*, 1977], [Greene M. T. *et al.*, 1978], [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1972], [Helms B. P. *et al.*, 1984], [Davies R. B. *et al.*, 1987], [Peters E. E., 1989], [Lo A. W., 1991], [Peters E. E., 1991b], [Rossi F. M. *et al.*, 1992], [Allevi E. *et al.*, 1993], [Ambrose B. W. *et al.*, 1993], [Cheung Y.-W. *et al.*, 1993], [Corazza M. *et al.*, 1993a], [Corazza M. *et al.*, 1993c], [Cutland N. J. *et al.*, 1993] e [Jacobsen B., 1994]) dovuto alla capacità dei primi di rappresentare processi stocastici i cui generici incrementi siano stocasticamente dipendenti ed alla capacità della seconda di testare l'ipotesi sulla presenza di indipendenza a lungo termine nelle realizzazioni dei processi stocastici e, nel caso di suo rigetto, di stimare l'“intensità” di tale dipendenza. Questo capitolo propone i principali aspetti teorici relativi ai processi stocastici “moti Browniani frazionari” e i principali aspetti algoritmici e

alcuni risultati teorici originali relativi all'analisi R/S. In particolare, nella sezione 2. si illustrano sinteticamente gli aspetti teorici relativi ai processi stocastici "moti Browniani frazionari"; nella sezione 3. si illustrano gli aspetti algoritmici e alcuni risultati teorici originali relativi all'analisi R/S, sia nella sua versione classica (che assume l'assenza di una struttura di auto-dipendenza a breve termine) che in quella modificata (che assume la presenza di una struttura di auto-dipendenza a breve termine); nella sezione 4. si propongono delle verifiche numeriche relative all'applicazione dell'analisi R/S a serie temporali simulate; nella sezione 5. si presentano delle osservazioni e considerazioni finali.

## 2. ASPETTI TEORICI RELATIVI AI MOTI BROWNIANI FRAZIONARI

Gli aspetti teorici relativi ai moti Browniani frazionari e necessari all'impostazione ed allo sviluppo degli aspetti algoritmici relativi all'analisi R/S necessitano previamente della seguente definizione (per i cui maggiori dettagli si veda [Malliaris A. G. *et al.*, 1984], [Falconer K., 1990], [Karatzas I *et al.*, 1991] e [Lo A. W., 1991]):

**Definizione 2.1.** Sia dato un processo stocastico  $X(t) : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$ . Questo processo si definisce moto Browniano standard (unidimensionale) se si ha

$$(2.1.1) \quad X(0) = 0 \text{ con probabilità uno,}$$

$$(2.1.2) \quad X(t) \text{ continuo quasi ovunque per ogni } t \in [0, +\infty[,$$

$$(2.1.3) \quad \text{il generico incremento}$$

$$X(\Delta t) - X(0) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, \Delta t), \quad \forall \Delta t > 0 \tag{2.1}$$

e

(2.1.4) i generici incrementi  $X(t_i) - X(t_{i-1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , sono stocasticamente indipendenti per ogni partizione  $\{0 \leq t_0, t_1, \dots, t_n < +\infty, t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n\}$  di  $[0, +\infty[$ .

In relazione alla **Definizione 2.1.** è da porre in evidenza quanto segue:

(2.1) se il processo stocastico  $X(t)$  è un moto Browniano standard, è possibile verificare che i generici incrementi che figurano nella (2.1.4) risultano anche stazionari (ad esempio si veda [Karatzas I. *et al.*, 1991]) o, equivalentemente,

$$X(t + \Delta t) - X(t) = X(\Delta t) - X(0) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, \Delta t), \forall t \in [0, +\infty[, \forall \Delta t > 0, \quad (2.2)$$

da cui, per la **Definizione 2.B.3.** data nel **CAPITOLO II**, si ha che moto Browniano standard è anche un processo stocastico “Pareto-Lévy stabile”;

(2.2) per la relazione (2.2) e per le proprietà dell’operatore varianza, si ha

$$\begin{aligned} X(t + \Delta t) - X(t) &\stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, \Delta t) \stackrel{d}{=} \Delta t^{0.5} \mathcal{N}(0, 1) \stackrel{d}{=} \Delta t^{0.5} [X(t + 1) - X(t)], \\ \forall t \in [0, +\infty[, \forall \Delta t > 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

da cui, per la **Definizione 2.B.3.** data nel **CAPITOLO V**, si ha che moto Browniano standard è anche un processo stocastico auto-similare;

(2.3) se il processo stocastico  $X(t)$  è un moto Browniano standard, è possibile verificare che è non differenziabile quasi ovunque (ad esempio si veda [Karatzas I. *et al.*, 1991]) o, equivalentemente,

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0} \right| = +\infty. \quad (2.4)$$

Ora, è possibile illustrare il concetto di moto Browniano frazionario mediante la seguente definizione (per i cui maggiori dettagli si veda [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1968], [Greene M. T. *et al.*, 1977], [Falconer K., 1990] e [Lo A. W., 1991]):

**Definizione 2.2.** Sia dato un processo stocastico  $X_H(t) : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  e sia data una costante reale  $H$ , con  $0 < H < 1$ , detta esponente di Hurst. Questo processo si definisce moto Browniano frazionario (unidimensionale) di indice  $H$  se si ha

(2.2.1)  $X_H(0) = 0$  con probabilità uno,

(2.2.2)  $X_H(t)$  continuo quasi ovunque per ogni  $t \in [0, +\infty[$ ,

(2.2.3) il generico incremento

$$X_H(\Delta t) - X_H(0) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, \Delta t^{2H}), \quad \forall \Delta t > 0 \quad (2.5)$$

e

(2.2.4) i generici incrementi  $X_H(t_i) - X_H(t_{i-1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , sono stocasticamente dipendenti per ogni partizione  $\{0 \leq t_0, t_1, \dots, t_n < +\infty, t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n\}$  di  $[0, +\infty[$  quando  $H \in ]0, 0.5[ \cup ]0.5, 1[$  o, equivalentemente, quando  $H \neq 0.5$ .

In relazione alla **Definizione 2.2.** è da porre in evidenza quanto segue:

(2.4) se il processo stocastico  $X_H(t)$  è un moto Browniano frazionario, lo si può rappresentare nella seguente forma (ad esempio si veda [Lo A. W., 1991]):

$$X_H(\Delta t) = \frac{1}{\Gamma(H + 0.5)} \int_0^{\Delta t} (\Delta t - \tau)^{H-0.5} dX(\tau), \quad H \in ]0, 1[ \quad (2.6)$$

dove

$\Gamma(\cdot)$ : funzione gamma, detta anche integrale Euleriano,

$X(\cdot)$ : moto Browniano standard.

Si ha, dunque, un processo stocastico che, in termini approssimati, si può interpretare come una sommatoria ponderata delle realizzazioni passate del processo stocastico  $X(\tau)$ ,  $\tau \in [0, \Delta t]$ , con pesi, rispettivamente, uguali a  $(\Delta t - \tau)^{H-0.5}$ . In particolare, se  $H = 0.5$ , dalla relazione (2.5) si ha

$$X_{0.5}(\Delta t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^{\Delta t} (\Delta t - \tau)^0 dX(\tau) = \int_0^{\Delta t} dX(\tau) \quad (2.7)$$

e, dunque, il moto Browniano frazionario si particolarizza nel moto Browniano standard;

(2.5) se il processo stocastico  $X(t)$  è un moto Browniano frazionario, è

possibile verificare che anche i generici incrementi che figurano nella (2.2.4) risultano stazionari (ad esempio si veda [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1968]) o, equivalentemente,

$$X_H(t+\Delta t) - X_H(t) \stackrel{d}{=} X_H(\Delta t) - X_H(0) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, \Delta t^{2H}), \forall t \in [0, +\infty[, \forall \Delta t > 0; \quad (2.8)$$

(2.6) per la relazione (2.8) e per le proprietà dell'operatore varianza, si ha

$$X_H(t+\Delta t) - X_H(t) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, \Delta t^{2H}) \stackrel{d}{=} \Delta t^H \mathcal{N}(0, 1) \stackrel{d}{=} \Delta t^H [X_H(t+1) - X_H(t)], \quad \forall t \in [0, +\infty[, \forall \Delta t > 0, \quad (2.9)$$

da cui, per la **Definizione 2.B.3.** data nel **CAPITOLO V**, si ha che pure un moto Browniano frazionario è anche un processo stocastico auto-similare;

(2.7) se il processo stocastico  $X_H(t)$  è un moto Browniano frazionario, è possibile verificare che è non differenziabile quasi ovunque (ad esempio si veda [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1968]) o, equivalentemente,

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{X_H(t) - X_H(t_0)}{t - t_0} \right| = +\infty. \quad (2.10)$$

Relativamente all'ente introdotto nella **Definizione 2.2.** si hanno i seguenti risultati teorici (per i cui maggiori dettagli si veda, rispettivamente, [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1968], [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1979], [Falconer K., 1990] e [Cutland N. J. *et al.*, 1993]

e [Lo A. W., 1991]):

**Teorema 2.1.** *Sia dato un moto Browniano frazionario (unidimensionale) di indice  $H$ , con  $0 < H < 1$ ,  $X_H(t)$ . Allora si ha la seguente funzione di auto-correlazione:*

$$\begin{aligned} & \frac{E\{[X_H(t+\Delta t) - X_H(t)][X_H(t+\Delta\tau+\Delta t) - X_H(t+\Delta\tau)]\} \stackrel{def}{=} \rho_H(\Delta\tau) =}{\sqrt{E\{[X_H(t+\Delta t) - X_H(t)]^2\} E\{[X_H(t+\Delta\tau+\Delta t) - X_H(t+\Delta\tau)]^2\}}} \\ & = \frac{1}{2} [|\Delta\tau+1|^{2H} - |\Delta\tau|^{2H} + |\Delta\tau-1|^{2H}], \quad \forall t \in [0, +\infty[, \forall \Delta t, \Delta\tau > 0. \quad (2.11) \end{aligned}$$

**Teorema 2.2** (Taqqu M. in [Lo A. W., 1991]) *Siano dati dei processi stocastici identicamente distribuiti  $X_i$ , con  $i = 1, \dots, n < +\infty$ , aventi distribuzioni Normali con media uguale a zero tali che*

$$E[(S_n)^2] \stackrel{def}{=} \sigma_n^2 \sim n^{2H} l(n), \quad H \in ]0, 1[ \quad (2.12)$$

dove

$$S_n \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$\sim$ : indica l'equivalenza asintotica,

$l(n)$ : funzione per la quale si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [l(nk)/l(n)] = 1$  per ogni  $k > 0$ .

Allora si ha

$$\frac{1}{\sigma_n} S_n \Rightarrow X_H \quad (2.13)$$

dove

$\Rightarrow$ : indica la convergenza debole,

$X_H(\cdot)$ : moto Browniano frazionario di indice  $H$ .

In relazione al **Teorema 2.1.** e al **Teorema 2.2.** è da porre in evidenza quanto segue:

(2.8) è possibile verificare che la funzione di auto-correlazione (2.11) è uguale a uno quando  $\Delta\tau = 0$ , per ogni  $H \in ]0, 1[$  o, equivalentemente,

$$\rho_H(0) = 1, \quad \forall H \in ]0, 1[; \quad (2.14)$$

(2.9) è possibile verificare che la funzione di auto-correlazione (2.11) è minore (maggiore) di 0 quando  $H \in ]0, 0.5[$  ( $H \in ]0.5, 1[$ ), per ogni  $\Delta\tau > 0$  o, equivalentemente, che i generici incrementi  $X_H(t + \Delta t) - X_H(t)$  e  $X_H(t + \Delta\tau + \Delta t) - X_H(t + \Delta\tau)$  risultano negativamente (positivamente) auto-correlati;

(2.10) è possibile verificare che la funzione di auto-correlazione (2.11) è uguale a 0 quando  $H = 0.5$ , per ogni  $\Delta\tau > 0$  o, equivalentemente, che i generici incrementi  $X_H(t + \Delta t) - X_H(t)$  e  $X_H(t + \Delta\tau + \Delta t) - X_H(t + \Delta\tau)$  risultano non auto-correlati;

(2.11) è possibile verificare che la funzione di auto-correlazione (2.11) è asintoticamente equivalente a  $H(2H - 1)\Delta\tau^{2H-2}$  quando  $\Delta\tau \rightarrow +\infty$ , per

ogni  $H \in ]0, 0.5[ \cup ]0.5, 1[$ , o equivalentemente (per maggiori dettagli si veda [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1972], [Davies R. B. *et al.*, 1987] e [Cutland N. J., 1993])

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow +\infty} \frac{\rho_H(\Delta\tau)}{H(2H-1)\Delta\tau^{2H-2}} = 1, \forall H \in ]0, 0.5[ \cup ]0.5, 1[; \quad (2.15)$$

(2.12) per la funzione di auto-correlazione (2.11) si ha che il moto Browniano frazionario  $X_H(t)$  non è un processo stocastico di Markov quando  $H \in ]0, 0.5[ \cup ]0.5, 1[$  o, equivalentemente, quando  $H \neq 0.5$ ;

(2.13) infine, il **Teorema 2.2.** si presenta come una sorta di generalizzazione del teorema centrale del limite nel caso in cui i processi stocastici considerati siano dipendenti e (Normalmente) identicamente distribuiti.

### 3. ASPETTI ALGORITMICI E TEORICI RELATIVI ALL'ANALISI RESCALED RANGE

In questa sezione si presentano gli aspetti algoritmici e, sinteticamente, quelli teorici relativi all'analisi R/S, sia nella sua versione classica che in quella modificata. Tale analisi, capace di testare l'ipotesi nulla sulla presenza di indipendenza a lungo termine nelle realizzazioni dei processi stocastici, in sostanza, si basa sulla determinazione del valore dell'esponente di Hurst  $H$ . In particolare, se  $H \in ]0, 0.5[$  ( $H \in ]0.5, 1[$ ) allora si rigetta tale ipotesi nulla e le date realizzazioni dei processi stocastici risultano negativamente (positivamente) auto-dipendenti, invece, se  $H = 0.5$  allora si accetta tale ipotesi nulla. È da porre in evidenza come, nel caso di rigetto dell'ipotesi nulla, l'"intensità" dell'auto-dipendenza negativa (positiva) risulti tanto più "forte" quanto più  $H$  sia vicino allo zero (all'uno). L'illustrazione di questa analisi nella sua versione classica necessita previamente della seguente definizione (per i cui maggiori dettagli si veda [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1979], [Lo A. W., 1991], [Peters E. E., 1991b] e [Cutland N. J. *et al.*, 1993]):

**Definizione 3.1.** Sia data la serie temporale  $\underline{x} = \{x_j, j = 1, \dots, T\}$ , realizzazione dell'insieme finito di variabili casuali  $\underline{X} = \{X_j, j = 1, \dots, T\}$ . Si definisce *rescaled range classico* la quantità

$$\frac{R(T)}{S(T)} \stackrel{def}{=} \frac{\max_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\} - \min_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\}}{s_T} \quad (3.1)$$

dove

$x_i^* \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^i (x_k - m_T)$ , con  $m_T \stackrel{def}{=} (\sum_{l=1}^T x_l)/T$  media campionaria della serie temporale  $\underline{x}$ ,

$s_T \stackrel{def}{=} \{[\sum_{l=1}^T (x_l - m_T)^2]/T\}^{1/2}$  scarto quadratico medio della serie temporale  $\underline{x}$ .

È da notare come il *range*  $R(T)$  rappresenti il campo di variazione della serie temporale  $\underline{x}^* = \{x_i^*, i = 1, \dots, T\}$  degli scarti dalla media cumulati della serie temporale  $\underline{x}$  e, come, la sua riscalatura, mediante lo scarto quadratico medio campionario  $s_T$  della serie temporale  $\underline{x}$ , ne effettui la standardizzazione.

Ora, è possibile verificare l'esistenza di un legame tra il *rescaled range* classico (3.1) e l'esponente di Hurst  $H$ , legame rappresentabile mediante la seguente relazione di equivalenza asintotica (ad esempio si veda [Cutland N. J., 1993]):

$$E \left[ \frac{R(T)}{S(T)} \right] \sim aT^H \text{ quando } T \rightarrow +\infty \quad (3.2)$$

dove

$a \in \mathbf{R}_0^+$ : costante,

o, equivalentemente,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{E[R(T)/S(T)]}{aT^H} = 1. \quad (3.3)$$

È quasi superfluo porre in evidenza come, in corrispondenza di valori opportunamente elevati della numerosità campionaria  $T$ , dalla (3.2), in termini approssimati, si abbia

$$\ln \left\{ E \left[ \frac{R(T)}{S(T)} \right] \right\} \simeq \ln(a) + H \ln(T). \quad (3.4)$$

Al fine di determinare il valore dell'esponente di Hurst sono state affinate e successivamente coordinate a sistema distinte tecniche (per maggiori dettagli si veda [Mandelbrot B. B., 1972b], [Greene M. T. *et al.*, 1977], [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1979], [Lo A. W., 1991], [Peters E. E., 1991a], [Peters E. E., 1991b], [Cheung Y.-W. *et al.*, 1993], [Corazza M. *et al.*, 1993a], [Corazza M. *et al.*, 1993b] e [Cutland N. J. *et al.*, 1993]). La procedura di stima così approntata si articola, sinteticamente, come segue a partire dalla realizzazione  $\underline{x} = \{x_j, j = 1, \dots, T\}$  che specifica la serie temporale:

Passo 1: si inizializza la numerosità campionaria  $N$  associata a delle sotto-serie temporali da ottenere da  $\underline{x}$  a  $N_0 \leq T$ ;

Passo 2: si determinano le sotto-serie temporali (non sovrappontesi) ottenibili da  $\underline{x}$  come  $\underline{x}_{1,N} \stackrel{def}{=} \{x_j, j = 1, \dots, N\}$ ,  $\underline{x}_{2,N} \stackrel{def}{=} \{x_j, j = N + 1, \dots, 2N\}$ ,  $\dots$ ,  $\underline{x}_{i,N} \stackrel{def}{=} \{x_j, j = (i - 1)N + 1, \dots, iN\}$ ,  $\dots$ ,  $\underline{x}_{K,N} \stackrel{def}{=} \{x_j, j = (K - 1)N + 1, \dots, KN\}$ , con  $K = \text{Int}(T/N)$ ;

Passo 3: in corrispondenza di ognuna delle sotto-serie temporali  $\underline{x}_{i,N}$ , con  $i = 1, \dots, K$ , si determina la media campionaria  $m_{i,N}$ , si determina la sotto-serie temporale degli scarti cumulati  $\underline{x}_{i,N}^* \stackrel{def}{=} \{x_{(i-1)N+n}^* = \sum_{l=1}^n (x_{(i-1)N+l} - m_{i,N}), n = 1, \dots, N\}$ , si determina il campo di variazione di quest'ultima sotto-serie temporale,  $R_i(N) = \max_{1 \leq t \leq N} \{\underline{x}_{i,N}^*\} - \min_{1 \leq t \leq N} \{\underline{x}_{i,N}^*\}$ , si determina lo scarto quadratico medio campionario di  $\underline{x}_{i,N}$ ,  $s_{i,N}$ , e si determina il rapporto  $R_i(N)/s_{i,N}$ ;

Passo 4: si determina la media campionaria  $R(N)/S(N) = \{\sum_{i=1}^K [R_i(N)/s_{i,N}]\}/K$ ;

Passo 5: si reinizializza la numerosità campionaria  $N$  associata alle sotto-serie temporali ponendo, dapprima,  $N_{Ser} = N + S$ , con  $S > 0$  e ponendo, successivamente,  $N = N_{Ser}$ ;

Passo 6: se si verifica che  $N \leq T$  si va al Passo 2, altrimenti si va al Passo 7;

Passo 7: si determina il valore della stima dell'esponente di Hurst  $\hat{H}_l$ , con  $l = N_0 + kS$ , in corrispondenza di ognuno dei valori della numerosità campionaria associata alle sotto-serie temporali determinati ponendo  $k = 2, 3, \dots, L$ , con  $L = \text{Int}[(T - N_0)/S]$ , mediante l'utilizzo di un modello di

regressione lineare applicato alla relazione (3.4);

Passo 8: si determina il valore della stima dell'esponente di Hurst  $\hat{H}$  associato alla serie temporale  $\underline{x}$  a partire dagli  $L-1$  valori  $\hat{H}_l$ , con  $l = N_0 + kS$ , con  $k = 2, 3, \dots, L$ , mediante l'utilizzo di un opportuno criterio di scelta.

Relativamente all'opportuno criterio di scelta introdotto nel Passo 8 si hanno, in sostanza, i due seguenti.

**Criterio di Scelta basato sull'Analisi Grafica**: questo criterio di scelta determina il valore della stima dell'esponente di Hurst della serie temporale  $\underline{x}$  mediante l'analisi della rappresentazione grafica della curva individuata dal luogo dei punti aventi come ascissa  $\ln(l)$ , con  $l = N_0 + kS$ ,  $k = 2, 3, \dots, L$  e aventi come ordinata  $\ln[R(l)/S(l)]$ , con  $l = N_0 + kS$ ,  $k = 2, 3, \dots, L$  o, equivalentemente, individuata da  $\{\ln[R(l)/S(l)], l = N_0 + kS, k = 2, 3, \dots, L\}$  *versus*  $\{\ln(l), l = N_0 + kS, k = 2, 3, \dots, L\}$  (ad esempio si vedano le Figure 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30 e 32), curva la cui pendenza coincide, per la relazione (3.4), in termini approssimati, con l'esponente di Hurst  $H$ ; se il valore di tale pendenza "oscilla" in un intorno opportunamente piccolo di un determinato valore, allora questo ultimo specifica il valore della stima dell'esponente di Hurst. In particolare, si determina tale valore mediante l'analisi della rappresentazione grafica della curva individuata da  $\{\hat{H}_l, l = N_0 + kS, k = 2, 3, \dots, L\}$  *versus*  $\{l, l = N_0 + kS, k = 2, 3, \dots, L\}$  (ad esempio si vedano le Figure 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30 e 32), identificandolo con l'ottimo relativo raggiunto dalla curva dopo una sua prima parte di "assestamento" (per maggiori dettagli si veda [Greene M. T. *et al.*, 1977], [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1979], e [Cutland N. J. *et al.*, 1993]).

**Criterio di Scelta basato sull'Analisi Statistica**: questo criterio di scelta testa statisticamente l'ipotesi nulla sulla presenza di indipendenza a lungo termine nelle realizzazioni dei processi stocastici mediante la conduzione del seguente test parametrico bidirezionale per ogni numerosità campionaria ammissibile delle sotto-serie

$$\frac{R(l)}{\sqrt{l}S(l)} \stackrel{ad}{=} V, \forall l, l = N_0 + kS, k = 2, 3, \dots, L \quad (3.5)$$

dove

$V$ : variabile casuale avente funzione di densità di probabilità  $F_V(v) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} (1 - 4i^2v^2) \exp[-2(iv)^2]$  (per maggiori dettagli si veda [Lo A. W., 1991]).

In particolare, si determina il valore della stima dell'esponente di Hurst identificandolo con quello della stima dell'esponente di Hurst  $\hat{H}_l$ , con  $l = N_0 + kS$ , con  $k = 2, 3, \dots, L$ , associata alla statistica (3.5) in corrispondenza della quale si rigetta l'ipotesi nulla con il minore livello di significatività.

È da porre in evidenza come in letteratura siano proposti anche altri criteri di scelta per la determinazione del valore della stima dell'esponente di Hurst  $\hat{H}$ , principali, fra i quali, quelli detti F Hurst e G Hurst, che risultano una sorta di variante del **Criterio di Scelta** basato sull'**Analisi Grafica**. In particolare, "For F Hurst, all possible lags and starting points are used. This procedure results in considerable overlaps and requires a large number of calculations. In G Hurst only certain lags and starting points are used yielding a maximum of 15 value of R/S for each lag" ([Greene M. T. et al., 1977]). È da notare come entrambi questi ultimi criteri di scelta considerino, rispettivamente o "all possible lags and starting points" [Greene M. T., et al., 1977] o "only certain lags and starting points" [Greene M. T., et al., 1977] al fine di determinare empiricamente un valore significativo della stima dell'esponente di Hurst  $\hat{H}$ , poichè "bias and variability decrease with the sample size under both methods" [Greene M. T., et al., 1977]. Peraltro, l'introduzione in letteratura del test parametrico bidirezionale (3.5) e, dunque, della possibilità di testare statisticamente l'ipotesi nulla sulla presenza di indipendenza a lungo termine nelle realizzazioni dei processi stocastici ha, in sostanza, resi obsoleti questi ultimi criteri di scelta. In particolare, lo stesso **Criterio di Scelta** basato sull'**Analisi Grafica** è prevalentemente utilizzato per finalità esemplificative. Risulta possibile caratterizzare ulteriormente la procedura di stima precedentemente introdotta mediante le seguenti proposizioni:

**Proposizione 3.1.** (Corazza M., 1994) Sia data una serie temporale  $\underline{x} = \{x_i, i = 1, 2, \dots, T\}$  avente esponente di Hurst  $H(\underline{x})$  e siano date delle costanti reali  $a$  e  $b$ , con  $a \in \mathbf{R}_0$  e  $b \in \mathbf{R}$ . Allora la serie temporale  $\underline{z} = \{z_i = ax_i + b, i = 1, 2, \dots, T\}$  ha esponente di Hurst

$$H(\underline{z}) = H(\underline{x}). \quad (3.6)$$

**Dimostrazione.** Verificare la relazione (3.6) è equivalente, per la relazione (3.4) e per i Passi 7 e 8 della procedura di stima precedentemente introdotta, a verificare che

$$\frac{R(\underline{z}; l)}{s(\underline{z}; l)} = \frac{R(\underline{x}; l)}{s(\underline{x}; l)}, \quad l = N_0 + kS, \quad k = 2, 3, \dots, L. \quad (3.7)$$

Relativamente al campo di variazione  $R(\cdot; l)$ , per la **Definizione 3.1.** e per le proprietà degli operatori media campionaria, *minimum* e *maximum*, si ha

$$\begin{aligned} R(\underline{z}; l) &= \max_{1 \leq i \leq l} \{z_i^*\} - \min_{1 \leq i \leq l} \{z_i^*\} = \max_{1 \leq i \leq l} \left\{ \sum_{j=1}^i [z_j - m_l(\underline{z})] \right\} - \min_{1 \leq i \leq l} \left\{ \sum_{j=1}^i [z_j - m_l(\underline{z})] \right\} = \\ &= \max_{1 \leq i \leq l} \left\{ \sum_{j=1}^i [ax_j + b - am_l(\underline{x}) - b] \right\} - \min_{1 \leq i \leq l} \left\{ \sum_{j=1}^i [ax_j + b - am_l(\underline{x}) - b] \right\} = \\ &= \begin{cases} a \left\{ \max_{1 \leq i \leq l} \left\{ \sum_{j=1}^i [x_j - m_l(\underline{x})] \right\} - \min_{1 \leq i \leq l} \left\{ \sum_{j=1}^i [x_j - m_l(\underline{x})] \right\} \right\} & \text{se } a > 0 \\ -a \left\{ \max_{1 \leq i \leq l} \left\{ \sum_{j=1}^i [x_j - m_l(\underline{x})] \right\} - \min_{1 \leq i \leq l} \left\{ \sum_{j=1}^i [x_j - m_l(\underline{x})] \right\} \right\} & \text{se } a < 0 \end{cases} = \\ &= |a| R(\underline{x}; l), \quad l = N_0 + kS, \quad k = 2, 3, \dots, L. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Relativamente allo scarto quadratico medio campionario  $s(\cdot; l)$ , per le proprietà dell'operatore varianza campionaria, si ha

$$s(\underline{z}; l) = [s^2(\underline{z}; l)]^{1/2} = [s^2(a\underline{x} + b; l)]^{1/2} = [a^2 s^2(\underline{x}; l)]^{1/2} = |a| s(\underline{x}; l). \quad (3.9)$$

Ora, sostituendo le (3.8) e (3.9) nel primo membro della (3.7) si ottiene

$$\frac{R(\underline{z}; l)}{s(\underline{z}; l)} = \frac{|a| R(\underline{x}; l)}{|a| s(\underline{x}; l)} = \frac{R(\underline{x}; l)}{s(\underline{x}; l)}, \quad a \neq 0, \quad l = N_0 + kS, \quad k = 2, 3, \dots, L. \quad \blacksquare \quad (3.10)$$

**Proposizione 3.2.** (Corazza M., 1994) Sia data una serie temporale  $\underline{x} = \{x_i, i = 1, 2, \dots, T\}$  avente serie degli scarti dalla media cumulati  $\underline{x}^*$

non crescente o non decrescente. Allora per questa si ha

$$R(\underline{x}; T) = \phi \sum_{i=2}^T [x_i - m_T(\underline{x})] \quad (3.11)$$

dove

$$\phi = \begin{cases} -1 & \text{se } \underline{x}^* \text{ è non crescente} \\ 1 & \text{se } \underline{x}^* \text{ è non decrescente} \end{cases}$$

**Dimostrazione.** Per la **Definizione 3.1.** e per la non crescenza (non decrescenza) della serie temporale  $\underline{x}^*$ , si ha

$$\begin{aligned} R(\underline{x}; T) &= \max_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\} - \min_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\} = \max_{1 \leq i \leq T} \left\{ \sum_{j=1}^i [x_j - m_T(\underline{x})] \right\} - \min_{1 \leq i \leq T} \left\{ \sum_{j=1}^i [x_j - m_T(\underline{x})] \right\} = \\ &= \max_{1 \leq i \leq T} \left\{ \sum_{j=1}^i [x_j - m_T(\underline{x})] \right\} - \min_{1 \leq i \leq T} \left\{ \sum_{j=1}^i [x_j + m_i(\underline{x})] \right\} = \\ &= \begin{cases} x_1^* - x_T^* = [x_1 - m_T(\underline{x})] - \sum_{j=1}^T [x_1 - m_T(\underline{x}^*)] & \text{se } \underline{x}^* \text{ è non crescente} \\ x_T^* - x_1^* = \sum_{j=1}^T [x_1 - m_T(\underline{x})] - [x_1 - m_T(\underline{x})] & \text{se } \underline{x}^* \text{ è non decrescente} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} -\sum_{j=2}^T [x_1 - m_T(\underline{x})] & \text{se } \underline{x}^* \text{ è non crescente} \\ \sum_{j=2}^T [x_1 - m_T(\underline{x})] & \text{se } \underline{x}^* \text{ è non decrescente} \end{cases} = \\ &= \phi \sum_{j=2}^T [x_1 - m_T(\underline{x})]. \blacksquare \end{aligned} \quad (3.12)$$

**Proposizione 3.3.** (Corazza M., 1994) Siano date due serie temporali  $\underline{x} = \{x_i, i = 1, 2, \dots, T\}$  e  $\underline{y} = \{y_i, i = 1, 2, \dots, T\}$  aventi, rispettivamente, serie degli scarti dalla media cumulati  $\underline{x}^*$  e  $\underline{y}^*$  entrambe non crescenti o non decrescenti e aventi, rispettivamente, rescaled range classico  $R(\underline{x}; T)/s(\underline{x}; T)$  e  $R(\underline{y}; T)/s(\underline{y}; T)$ . Allora la serie temporale  $\underline{z} = \{z_i = x_i + y_i, i = 1, 2, \dots, T\}$  ha rescaled range classico

$$\frac{R(\underline{z}; T)}{s(\underline{z}; T)} = \frac{\phi \sum_{i=2}^T [x_i - m_T(\underline{x}) + y_i - m_T(\underline{y})]}{[s^2(\underline{x}; T) + s^2(\underline{y}; T) + 2\rho_{\underline{x}, \underline{y}} s(\underline{x}; T)s(\underline{y}; T)]^{1/2}} \quad (3.13)$$

dove

$$\phi = \begin{cases} -1 & \text{se } \underline{x}^* \text{ e } \underline{y}^* \text{ sono non crescenti} \\ 1 & \text{se } \underline{x}^* \text{ e } \underline{y}^* \text{ sono non decrescenti} \end{cases},$$

$\rho_{\underline{x}, \underline{y}}$ : coefficiente di correlazione lineare tra  
la serie temporale  $\underline{x}$  e la serie temporale  $\underline{y}$ .

**Dimostrazione.** Relativamente al campo di variazione  $R(\cdot; T)$ , per la **Definizione 3.1.**, per la **Proposizione 3.2.** e per la non crescenza (non decrescenza) di entrambe le serie temporali  $\underline{x}^*$  e  $\underline{y}^*$ , si ha

$$\begin{aligned} R(\underline{z}; l) &= \max_{1 \leq i \leq T} \{z_i^*\} - \min_{1 \leq i \leq T} \{z_i^*\} = \max_{1 \leq i \leq T} \{x_i^* + y_i^*\} - \min_{1 \leq i \leq T} \{x_i^* + y_i^*\} = \\ &= \max_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\} - \min_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\} + \max_{1 \leq i \leq T} \{y_i^*\} - \min_{1 \leq i \leq T} \{y_i^*\} = \phi \sum_{i=2}^T [x_i - m_T(\underline{x}) + y_i - m_T(\underline{y})]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Relativamente allo scarto quadratico medio campionario  $s(\cdot; T)$ , per le proprietà dell'operatore varianza campionaria, si ha

$$s(\underline{z}; T) = [s^2(\underline{z}; T)]^{1/2} = [s^2(\underline{x} + \underline{y}; T)]^{1/2} = [s^2(\underline{x}; T) + s^2(\underline{y}; T) + 2\rho_{\underline{x}, \underline{y}} s(\underline{x}; T)s(\underline{y}; T)]^{1/2}. \quad (3.15)$$

Ora, sostituendo le (3.14) e (3.15) nel primo membro della (3.13), si ottiene il secondo membro della (3.13). ■

In relazione all'analisi *rescaled range* nella sua versione classica è da porre in evidenza quanto segue:

(3.1) è possibile verificare che la procedura di stima precedentemente introdotta è robusta<sup>1</sup> relativamente all'ipotesi di Normalità per i processi stocastici che generano le serie temporali (ad esempio si veda [Mandelbrot B. B. *et al.*, 1979] e [Lo A. W., 1991]);

(3.2) è possibile verificare che tale procedura di stima converge, con probabilità uguale a uno, anche per processi stocastici che generano le serie

---

<sup>1</sup> Una procedura di stima  $S_N(\underline{X})$  del parametro  $\vartheta$ , dove  $N$  indica l'ampiezza del campione, si dice che è robusta relativamente ad una specificata ipotesi se le sue caratteristiche dedotte, rispettivamente, assumendo e non assumendo quella specificata ipotesi, non differiscono "significativamente".

temporali aventi momento del secondo ordine non esistente in quanto infinito (ad esempio si veda [Mandelbrot B. B., 1972]) e, dunque, risulta “superiore” alle classiche statistiche fondate su questo stesso momento;

(3.3) è possibile verificare che tale procedura di stima può permettere di determinare il valore medio della lunghezza del periodo orbitale eventualmente caratterizzante il processo stocastico che genera la serie temporale indagata, ovvero quel valore della lunghezza dell’intervallo temporale fino al quale si ha la presenza di auto-dipendenza a lungo termine e oltre al quale tale presenza tende ad annullarsi (ad esempio si veda [Mandelbrot B. B., 1972]). In particolare, si può determinare tale valore identificandolo con il valore di  $l$ , con  $l = N_0 + kS$ , con  $k = 2, 3, \dots, L$ , associato al valore della stima dell’esponente di Hurst  $\hat{H}_l$  che determina il valore della stima dell’esponente di Hurst  $\hat{H}$ ;

(3.4) è possibile verificare che tale procedura di stima risulta “sensibile” alla presenza di auto-dipendenza a breve termine. In particolare, l’analisi R/S nella sua versione classica, che assume l’assenza di una struttura di auto-dipendenza a breve termine, risulta distorta<sup>2</sup> in presenza di una tale struttura (per maggiori dettagli si veda [Lo A. W., 1991]), per cui il valore della stima dell’esponente di Hurst, che identifica la natura dell’evoluzione a lungo termine del processo stocastico indagato, risulta anche dovuto alla presenza di auto-dipendenza a breve termine. È da notare come, per l’analisi R/S nella sua versione classica nel caso di auto-dipendenza a breve termine, si abbia

$$\frac{R(T)}{\sqrt{TS(T)}} \stackrel{ad}{=} \xi V, \quad (3.16)$$

dove

$\xi \in \mathbf{R}$ : costante il cui valore è determinato dalla natura della struttura di auto-dipendenza a breve termine,  
da cui derivi l’“inattendibilità” del **Criterio di Scelta** basato sull’**Analisi Statistica**. Risulta, dunque, necessario modificare l’analisi R/S nella sua

---

<sup>2</sup> Una procedura di stima  $S_N(\underline{X})$  del parametro  $\vartheta$  si dice che è distorta se  $E[S_N(\underline{X})] \neq \vartheta$ .

versione classica precedentemente introdotta per renderla “insensibile” alla presenza di auto-dipendenza a breve termine, modifica che si fonda sulla seguente definizione (per i cui maggiori dettagli si veda [Lo A. W., 1991], [Corazza M. *et al.*, 1993a], [Corazza M. *et al.*, 1993b] e [Cutland N. J. *et al.*, 1993]):

**Definizione 3.2.** Sia data la serie temporale  $\underline{x} = \{x_j, j = 1, \dots, T\}$ , realizzazione dell'insieme finito di variabili casuali  $\underline{X} = \{X_j, j = 1, \dots, T\}$ . Si definisce *rescaled range modificato* la quantità

$$\frac{R(T)}{\overline{S}(T)} \stackrel{def}{=} \frac{\max_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\} - \min_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\}}{[s_T^2 + 2 \sum_{i=1}^q \omega_i(q) s_{T,i}]^{1/2}}, \quad q < T \quad (3.17)$$

dove

$q$ : ordine della struttura di auto-dipendenza a breve termine,

$\omega_i(q) = 1 - i/(1 + q)$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ : pesi,

$s_{T,i} = [\sum_{j=1+i}^T (x_j - m_T)(x_{j-i} - m_T)]/T$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ : auto-covarianze campionarie.

Ora, è possibile verificare che la quantità  $\overline{S}(\cdot)$ , mediante la quale si riscalda il campo di variazione  $R(\cdot)$  e che dipende sia dalla varianza campionaria  $s_T^2$  che dalle auto-covarianze  $s_{T,i}$ , con  $i = 1, 2, \dots, q$ , pesate, risulta una versione opportunamente modificata della quantità  $S(\cdot)$  che compare nella relazione (3.1) e che dipende solamente della varianza campionaria  $s_T^2$ ; è anche possibile verificare che l'analisi R/S nella sua versione modificata, che si fonda sulla quantità (3.17), in presenza di una struttura di auto-dipendenza a breve termine di ordine  $q$ , risulta corretta<sup>3</sup>. In particolare, se  $q = 0$ , dalla (3.17) si ha

$$\begin{aligned} \frac{R(T)}{\overline{S}(T)} &\stackrel{def}{=} \frac{\max_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\} - \min_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\}}{[s_T^2 + 2 \sum_{i=1}^0 \omega_i(0) s_{T,i}]^{1/2}} = \frac{\max_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\} - \min_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\}}{[s_T^2]^{1/2}} = \\ &= \frac{\max_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\} - \min_{1 \leq i \leq T} \{x_i^*\}}{s_T} \stackrel{def}{=} \frac{R(T)}{S(T)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

e, dunque, il *rescaled range* modificato si particularizza nel *rescaled range* classico.

<sup>3</sup> Evidentemente, se il valore congetturato per  $q$  risulta quello “vero”.

#### 4. VERIFICHE NUMERICHE

In questa sezione si presentano i risultati delle verifiche numeriche relative all'applicazione dell'analisi *rescaled range* introdotta nella sezione precedente a serie temporali simulate, risultati ottenuti mediante l'applicazione della procedura di stima introdotta nella sezione precedente a queste ultime. In un primo momento si è puntualizzata tale procedura di stima fissando i valori delle quantità  $T$ ,  $N_0$  e  $S$  rispettivamente a 2001, a 100 e a 20. In un secondo momento si sono generate due classi di serie temporali i cui elementi, rispettivamente  $\underline{z}_{1,j}$  (i cui grafici sono riportati nelle Figure 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15) e  $\underline{z}_{2,j}$  (i cui grafici sono riportati nelle Figure 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29 e 31), con  $j = 1, 2, \dots, 8$ , sono rappresentabili come segue

$$\underline{z}_{k,j} = \underline{y}_k + \underline{e}_j, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, 8 \quad (4.1)$$

dove

$\underline{y}_k$ : componente deterministica,

$\underline{e}_j$ : componente casuale i cui elementi sono distribuiti indipendentemente ed identicamente come una Normale con media uguale a 0.

In particolare, le serie temporali che, rispettivamente, specificano la componente deterministica  $\underline{y}_k$ , con  $k = 1, 2$ , relativa agli elementi della prima e della seconda classe sono rappresentabili come segue

$$\underline{y}_1 = \left\{ y_{1,n} = 100 \sin\left(\frac{n}{5}\right), n = -1000, -999, \dots, 1000 \right\} \quad (4.2)$$

e, dunque, realizzazione negativamente auto-dipendente o, equivalentemente, anti-persistente, per la quale si ha  $H \in ]0, 0.5[$  e

$$\underline{y}_2 = \left\{ y_{2,n} = \frac{200}{1 + \exp(n/1000)} - 1000, n = -1000, -999, \dots, 1000 \right\} \quad (4.3)$$

e, dunque, realizzazione positivamente auto-dipendente o, equivalentemente, persistente, per la quale si ha  $H \in ]0.5, 1[$ ; le serie temporali che specificano

le componenti casuali  $\varepsilon_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, 8$ , relative agli elementi sia della prima che della seconda classe, generate mediante l'utilizzo della *function*  $RNDN(\cdot, \cdot)$  proposta in [Aptech Systems, Inc., 1991], sono rappresentabili come segue

$$\varepsilon_j = \begin{cases} \{e_{0,n} = 0, n = 0, 1, \dots, 2000\} & \text{se } j = 1 \\ \{e_{j,n} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}[0, 1E(j-1)], n = 0, 1, \dots, 2000\} & \text{se } j = 2, 3, \dots, 8 \end{cases} \quad (4.4)$$

ciò al fine di osservare il comportamento della procedura di stima introdotta nella sezione precedente all'aumentare della varianza della componente casuale. In un terzo ed ultimo momento si è condotta l'analisi R/S per ognuna delle serie temporali generate  $\underline{z}_{k,j}$ , con  $k = 1, 2$ , con  $j = 1, 2, \dots, 8$ . I risultati così ottenuti sono riportati graficamente, rispettivamente, nelle Figure 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16 per gli elementi appartenenti alla prima classe di serie temporali ( $k = 1$ ) e nelle Figure 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30 e 32 per gli elementi appartenenti alla seconda classe di serie temporali ( $k = 2$ ). È da porre in evidenza come, per la determinazione del valore della stima dell'esponente di Hurst associato ad ognuna delle distinte serie temporali generate, si siano congiuntamente utilizzati il **Criterio di Scelta** basato sull'**Analisi Grafica** e il **Criterio di Scelta** basato sull'**Analisi Statistica**. In relazione a questo ultimo, al fine di accettare o di rigettare l'ipotesi nulla sulla presenza di indipendenza a lungo termine nelle realizzazioni dei processi stocastici, il valore campionario  $R(\cdot)/[\sqrt{S(\cdot)}]$  assunto dal test di tipo  $V$  (3.5), deve appartenere o meno alla regione di accettazione, rappresentabile nella seguente forma:

$$[\underline{V}_\alpha, \overline{V}_\alpha] \quad (4.5)$$

dove

$\underline{V}_\alpha, \overline{V}_\alpha$ : valori critici della distribuzione  $V$  in corrispondenza di un prefissato livello di significatività  $\alpha$ .

I valori critici della distribuzione  $V$  sono riportati nella seguente Tabella 4.1 in corrispondenza di usuali livelli di significatività.

Tabella 4.1

$\underline{V}_\alpha, \overline{V}_\alpha$	$\alpha = 0.010$	$\alpha = 0.050$	$\alpha = 0.100$	$\alpha = 0.200$
$\underline{V}_\alpha$	0.721	0.809	0.861	0.927

$\bar{V}_\alpha$	2.098	1.862	1.747	1.473
------------------	-------	-------	-------	-------

In particolare, nelle Figure in cui sono riportati i risultati il valore dell'esponente di Hurst  $H$  si rappresenta graficamente mediante il simbolo “+” nel caso di accettazione della specificata ipotesi nulla, mediante il simbolo “o” nel caso di rigetto della specificata ipotesi nulla in corrispondenza di livelli di significatività  $\alpha \geq 0.100$  (debole auto-dipendenza) e mediante il simbolo “•” nel caso di rigetto della specificata ipotesi nulla in corrispondenza di livelli di significatività  $0.010 \leq \alpha \leq 0.050$  (forte auto-dipendenza).

## 5. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI

Dai risultati presentati nelle Figure 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, e 32 si hanno le seguenti osservazioni e considerazioni finali relative all'analisi *rescaled range*:

(5.1) in generale, nella rappresentazione grafica della curva individuata da  $\{H_l, l = N_0 + kS, k = 2, 3, \dots, L\}$  versus  $\{l, l = N_0 + kS, k = 2, 3, \dots, L\}$ , su cui si fonda il **Criterio di Scelta** basato sull'**Analisi Grafica**, sono individuabili due distinti “regimi dinamici” della stima di Hurst; un primo “regime dinamico” di assestamento, associato ad un breve tratto iniziale di tale curva, in cui la stima dell'esponente di Hurst  $H$  risulta oscillante e, talvolta, non appartenente all'intervallo  $]0, 1[$ , derivante dalla ridotta numerosità campionaria  $N$  caratterizzante ogni sotto-serie temporale  $\underline{x}_{i,N}$ , con  $i = 1, 2, \dots, k$ , con  $k = \text{Int}(T/N)$ , e un secondo “regime dinamico”, associato al rimanente tratto di tale curva, in cui la stima dell'esponente di Hurst risulta convergente al suo valore “vero”;

(5.2) in generale, i valori della stima dell'esponente di Hurst associata ad ognuna delle serie temporali  $\underline{z}_{k,j}$ , con  $k = 1, 2$ , con  $j = 1, 2, \dots, 8$ , determinati, rispettivamente, mediante il **Criterio di Scelta** basato sull'**Analisi Grafica** e quello basato sull'**Analisi Statistica**, non risultano contraddittori;

(5.3) il valore assunto dalla stima dell'esponente di Hurst in corrispondenza di ognuna delle serie temporali  $\underline{z}_{1,1}$  e  $\underline{z}_{2,1}$ , specificate solo

dalla componente deterministica, rispettivamente, (4.1) e (4.2), risultano correttamente appartenere all'intervallo  $]0, 0.5[$  (Figura 2) e  $]0.5, 1[$  (Figura 18);

(5.4) ancora in relazione al valore assunto in corrispondenza di ognuna delle serie temporali specificate nell'osservazione (5.3), risulta verificata numericamente la proprietà di robustezza della procedura di stima introdotta nella sezione 3. relativamente all'ipotesi di Normalità per i processi stocastici che generano le serie temporali, data la natura solamente deterministica di tali serie temporali;

(5.5) in generale, la procedura di stima specificata nella considerazione (5.4) risulta capace di individuare l'auto-dipendenza negativa o quella positiva, anche in presenza di una componente casuale caratterizzata da un elevato valore della sua varianza (rispettivamente Figure 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16 e Figure 20, 22, 24, 26, 28, 30 e 32). In particolare, in corrispondenza di componenti casuali caratterizzate da valori progressivamente crescenti della varianza si hanno "regimi dinamici" di assestamento associati a tratti iniziali della curva specificata nell'osservazione 5.1 progressivamente più lunghi.

Figura 1

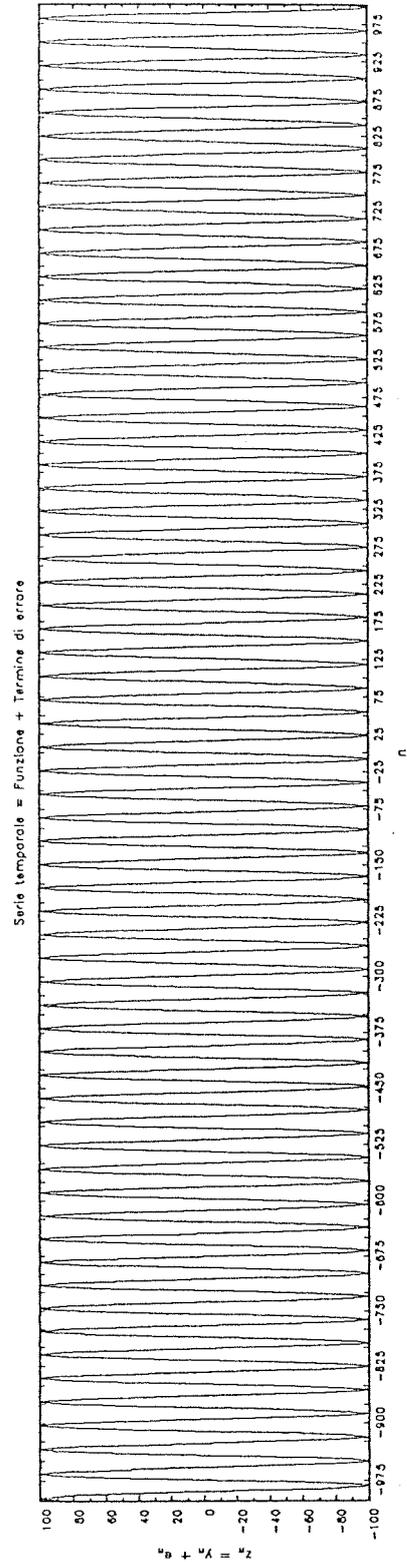
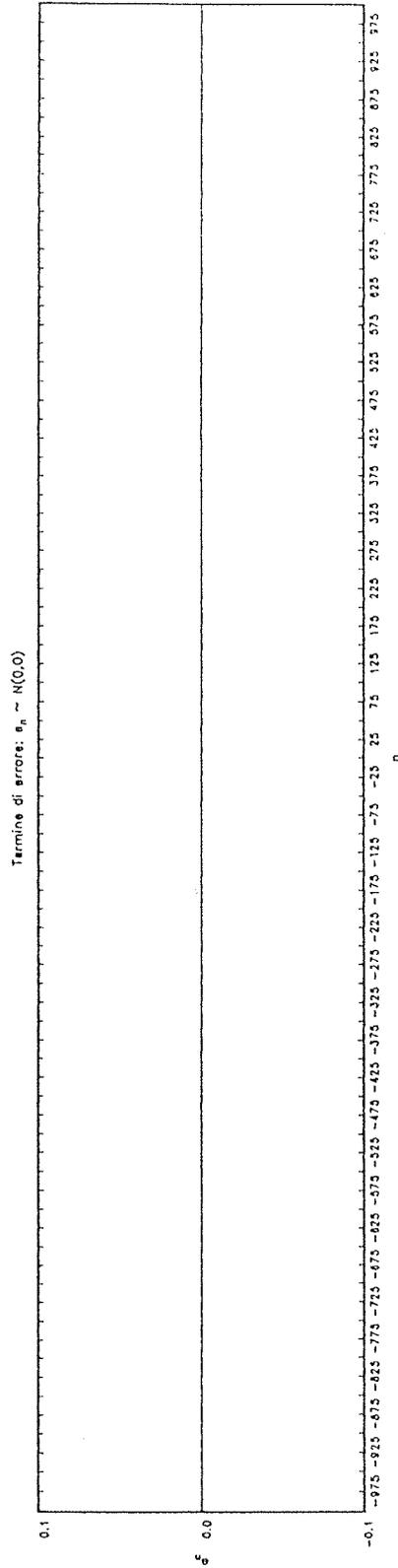
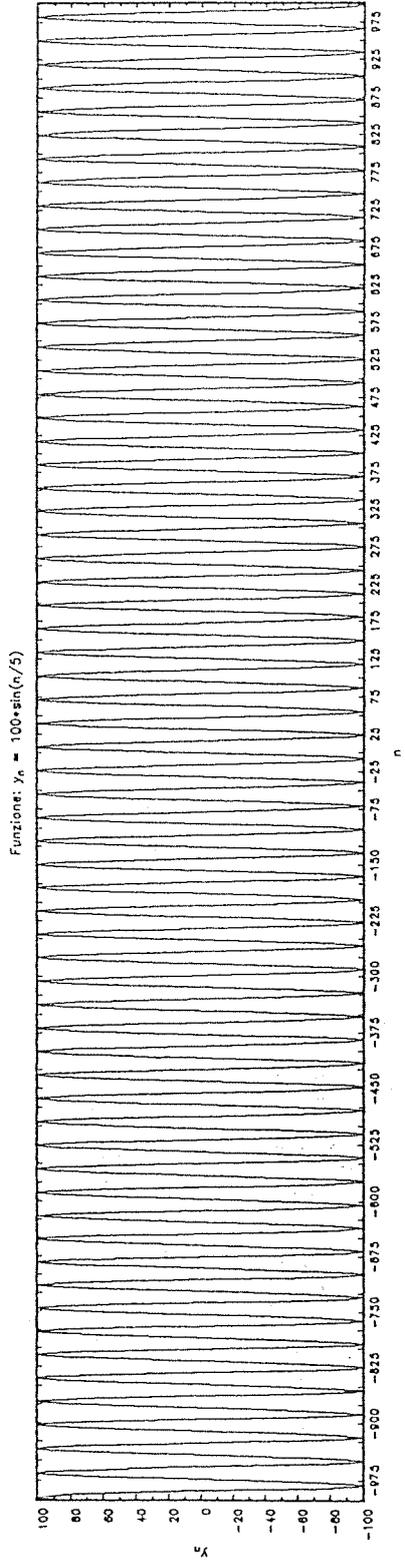


Figura 2

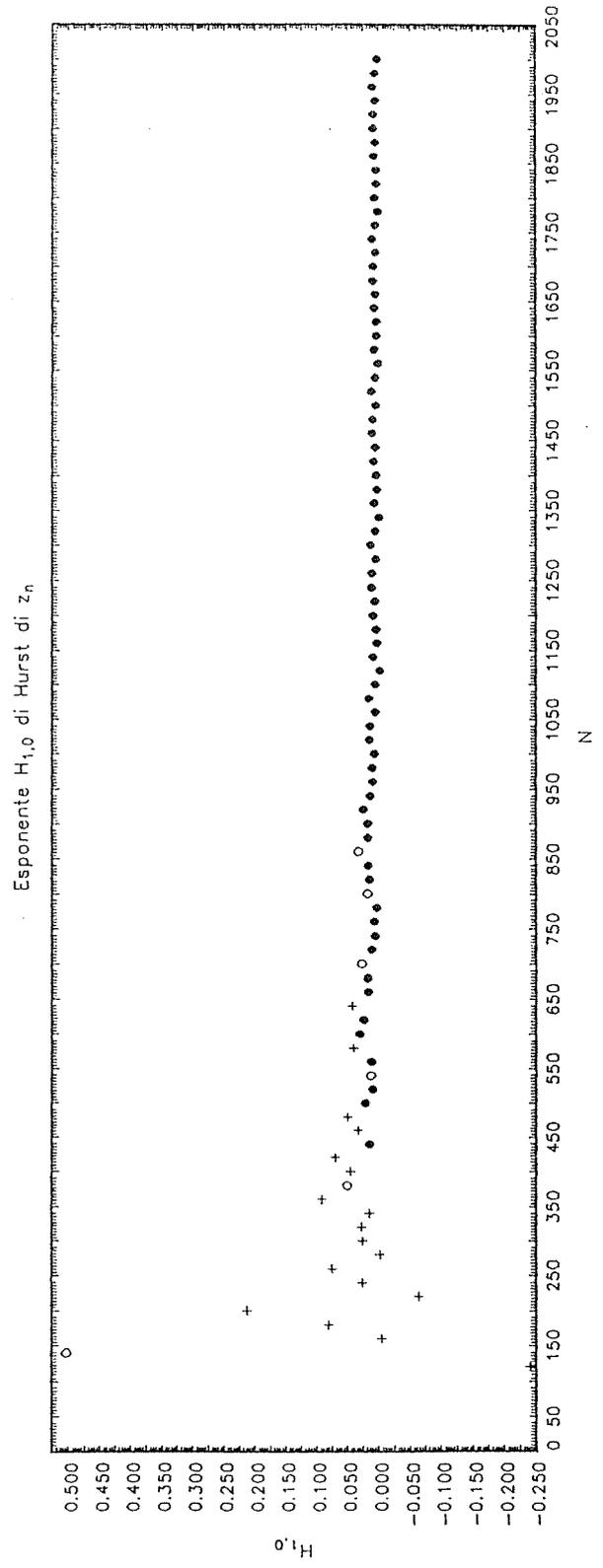
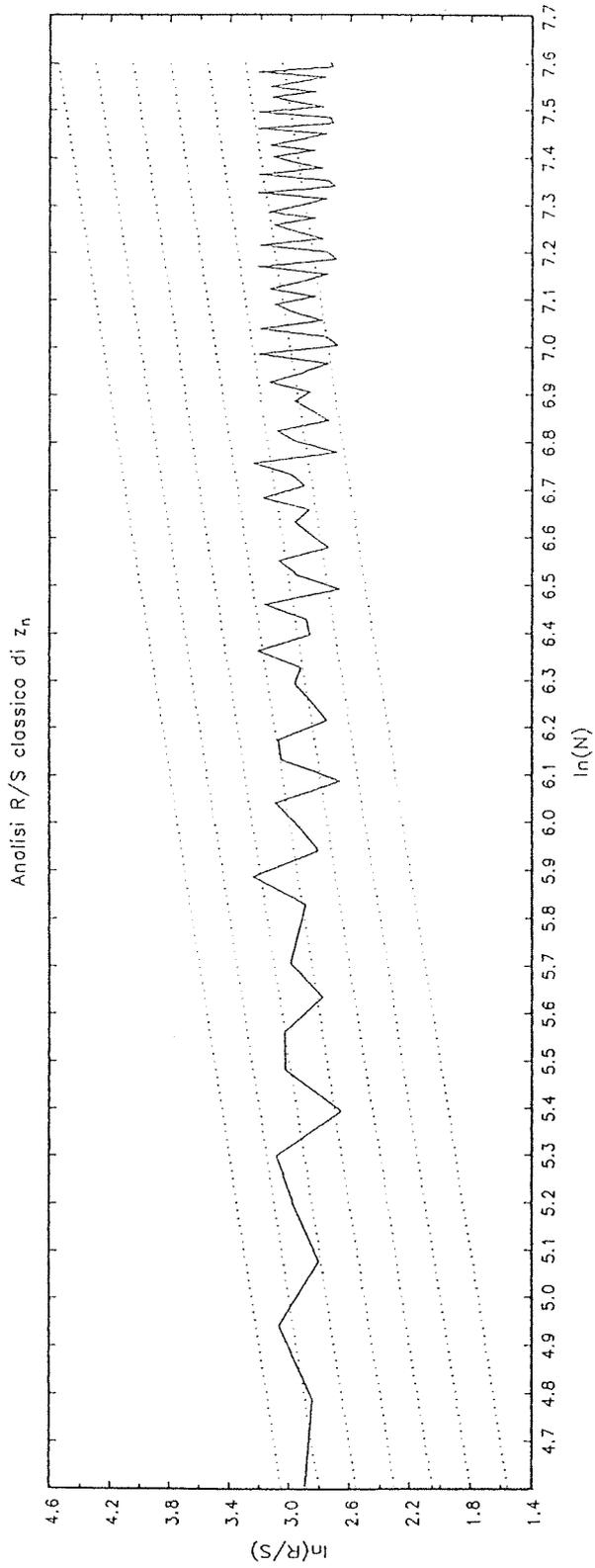


Figura 3

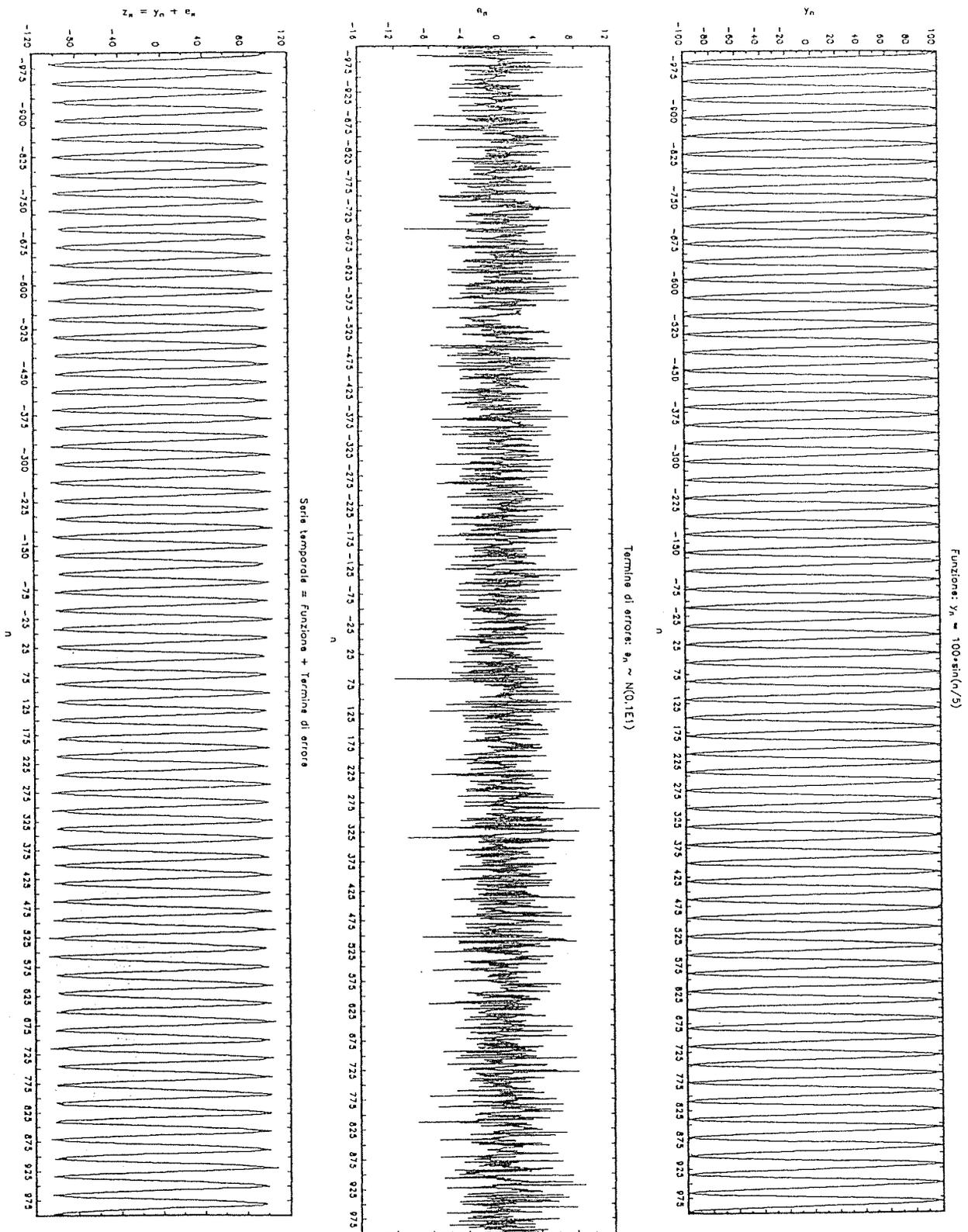


Figura 4

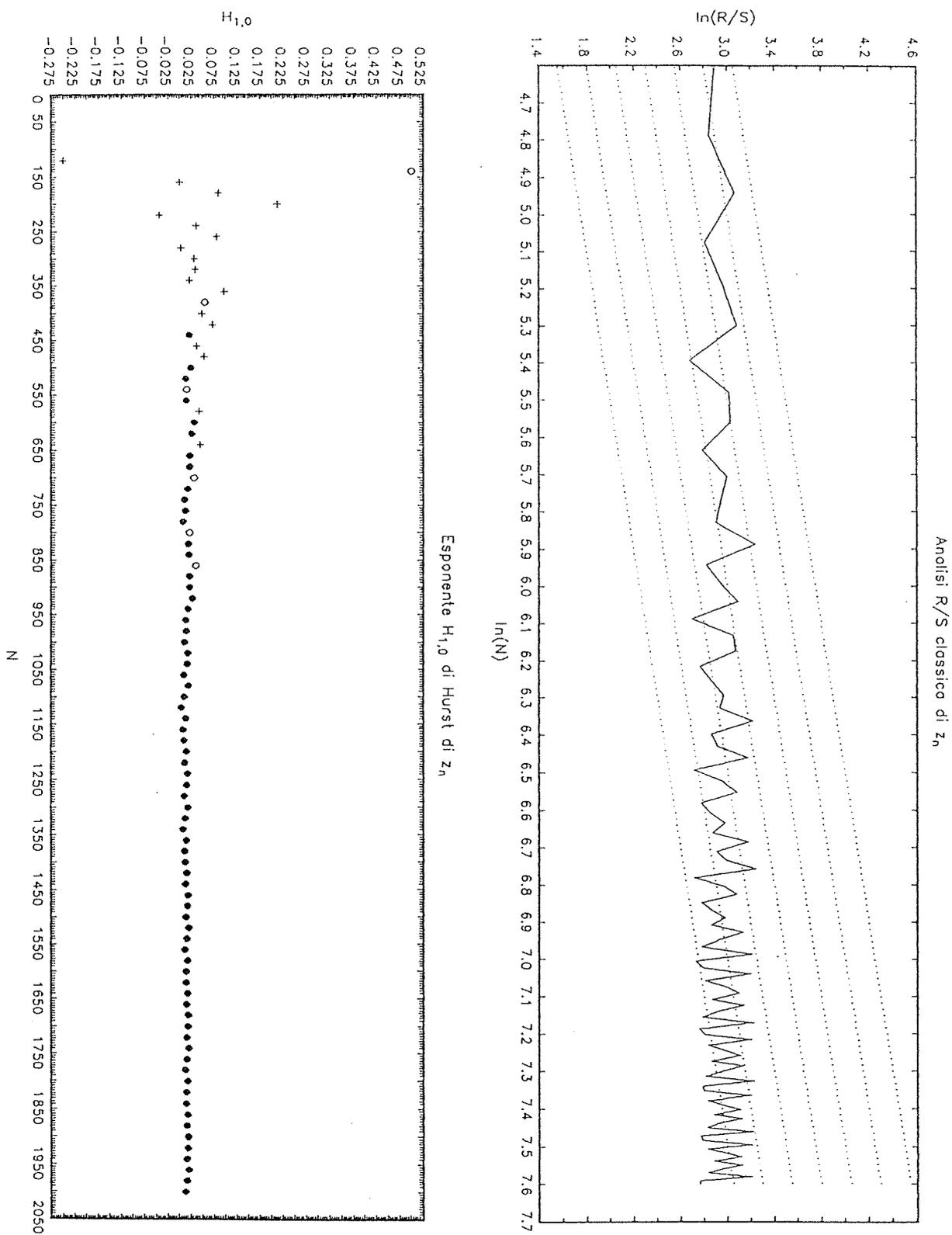


Figura 5

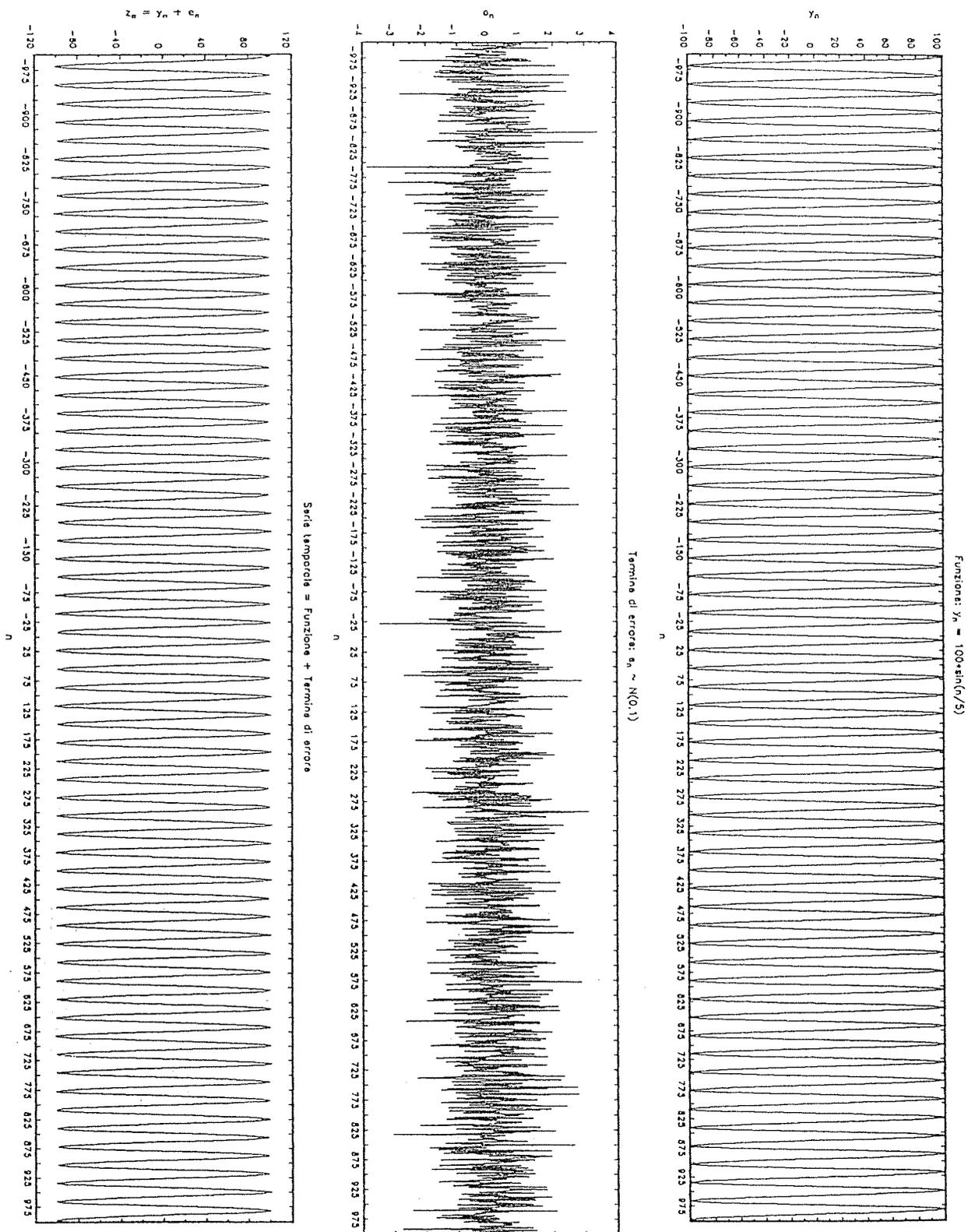


Figura 6

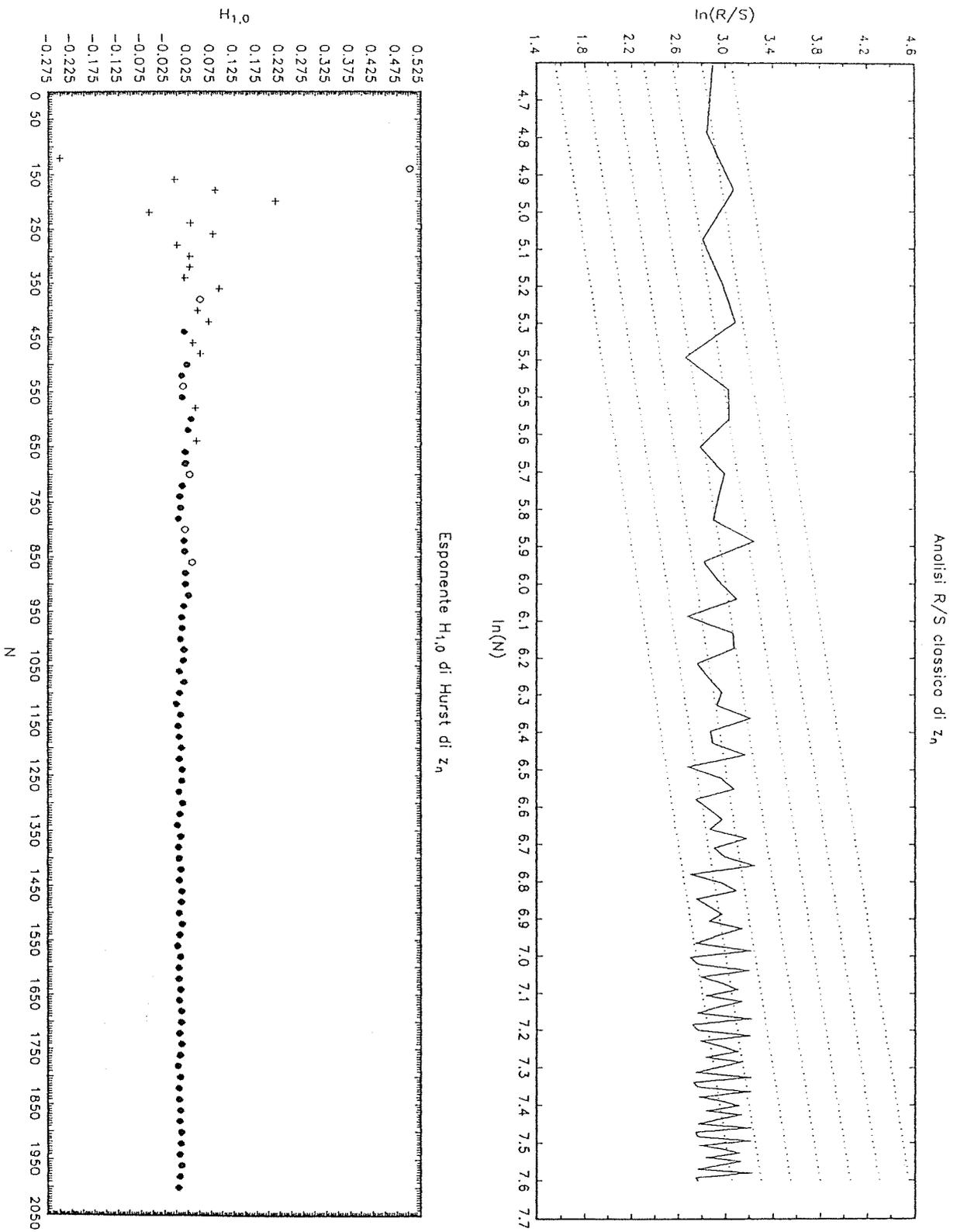


Figura 7

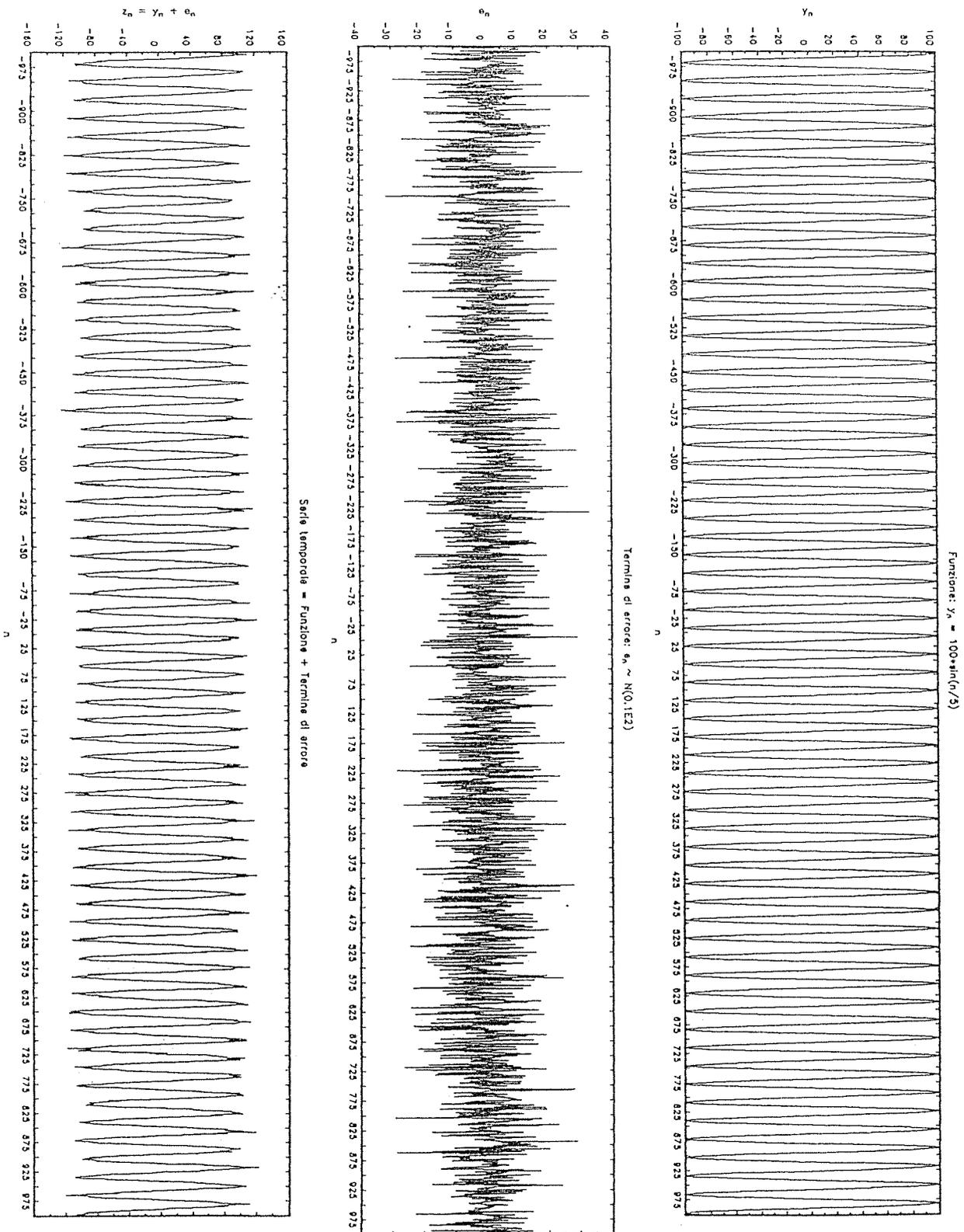


Figura 8

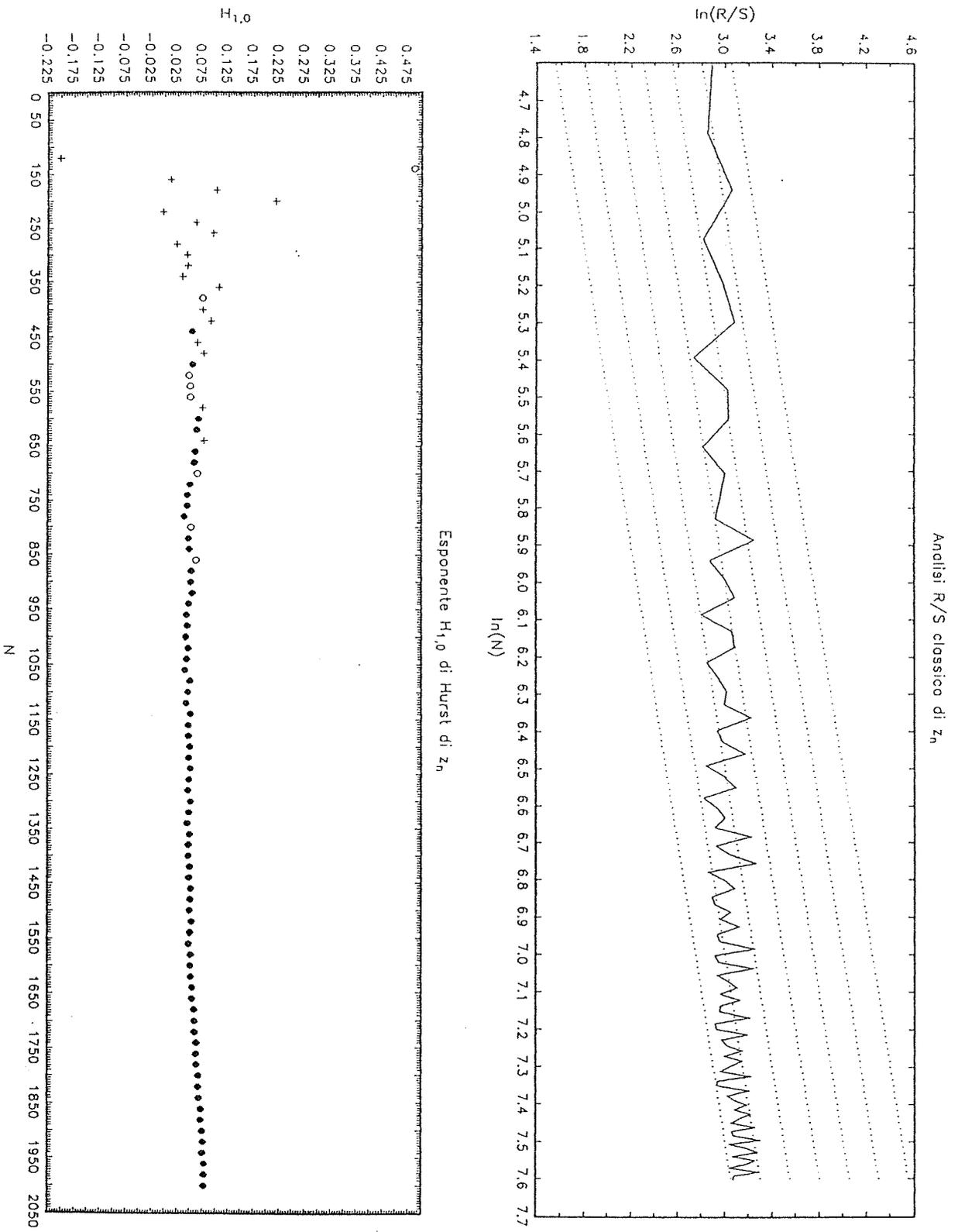


Figura 9

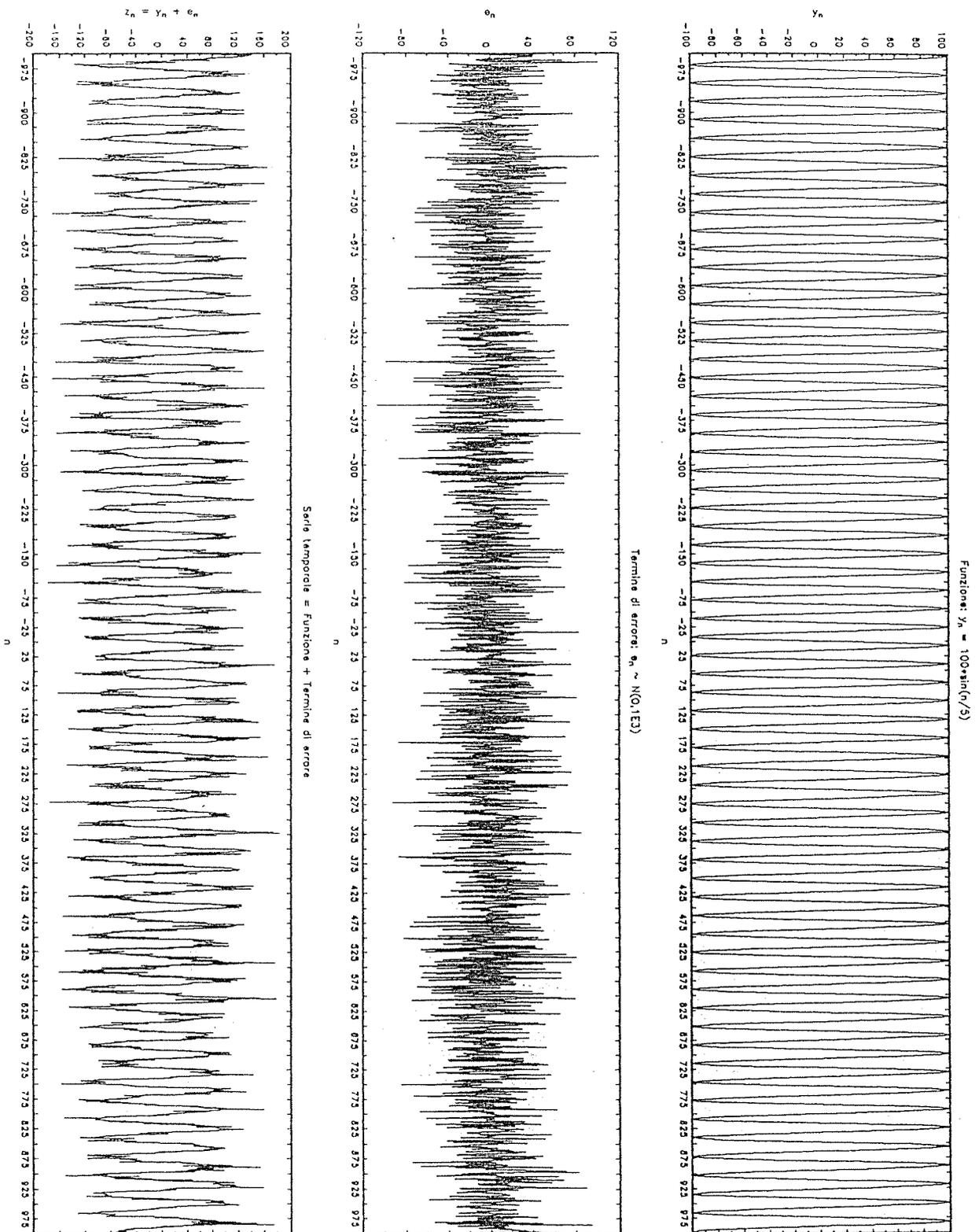


Figura 10

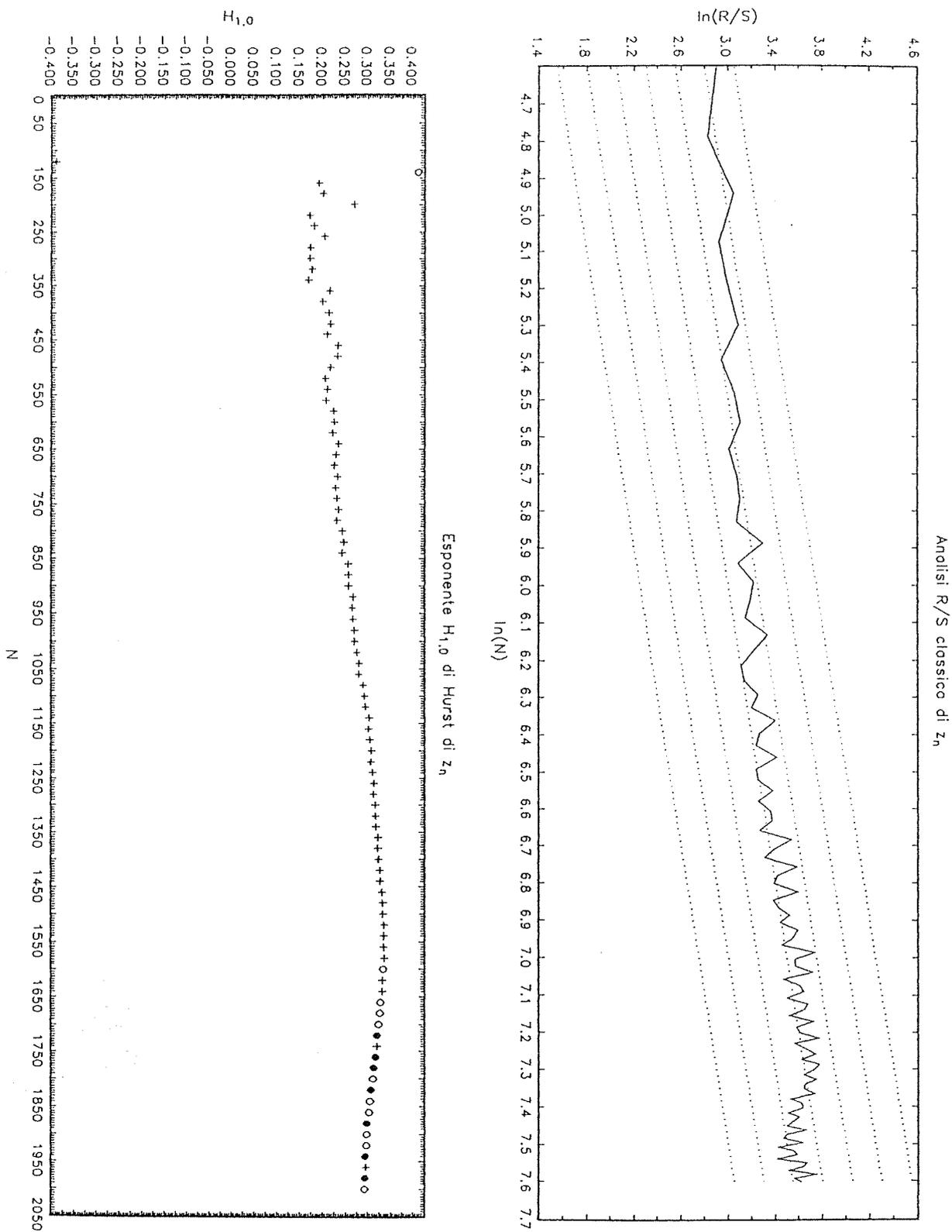


Figura 11

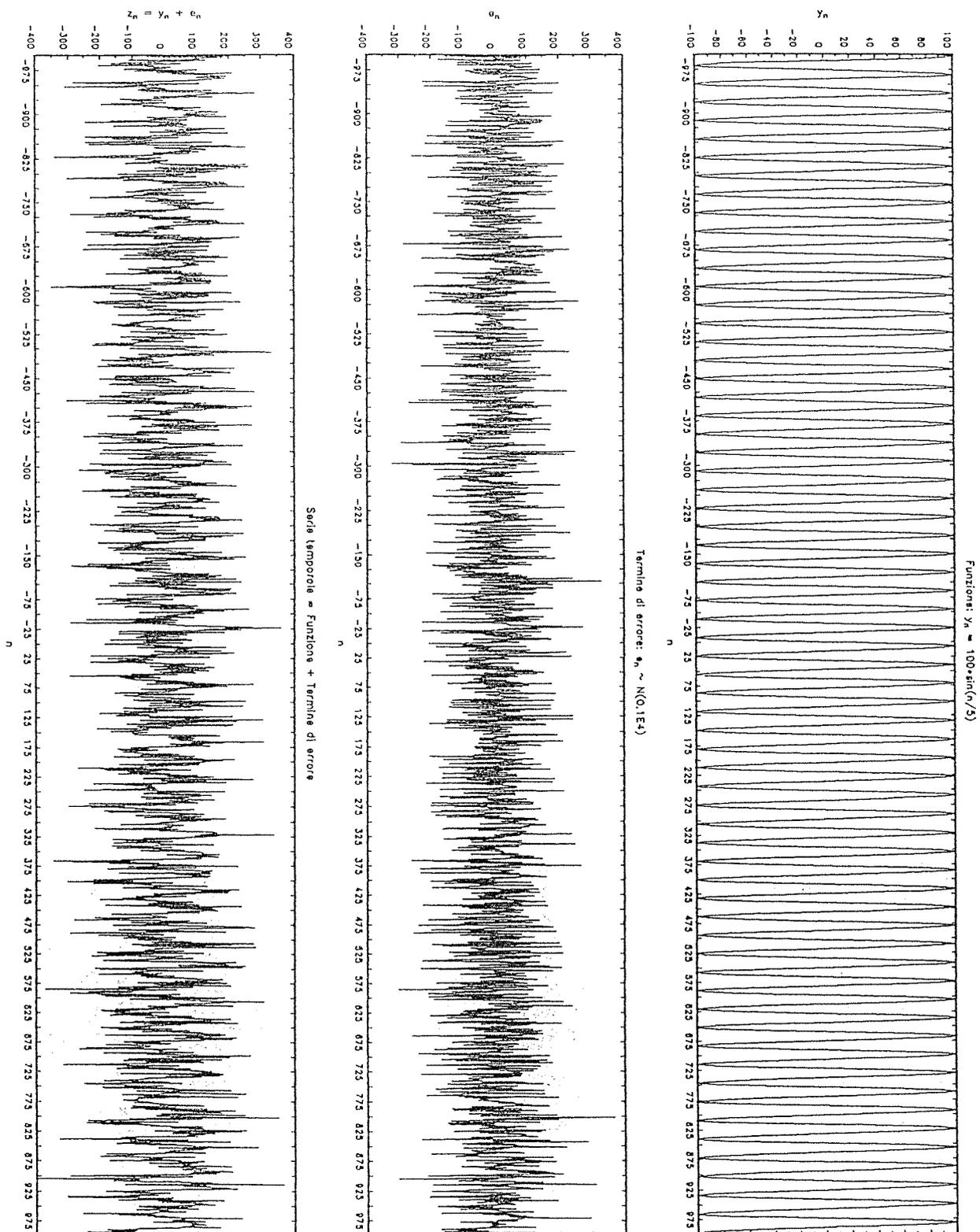


Figura 12

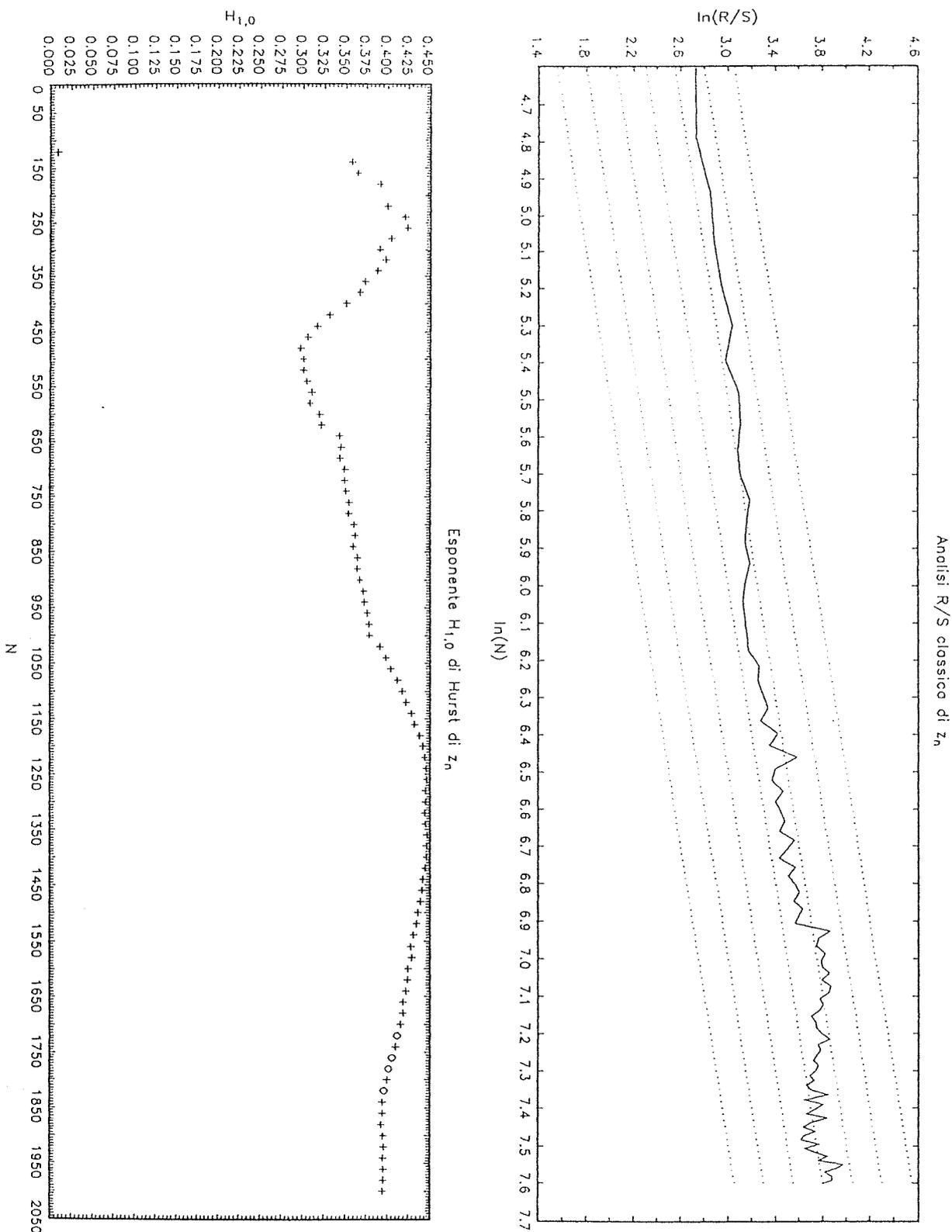


Figura 13

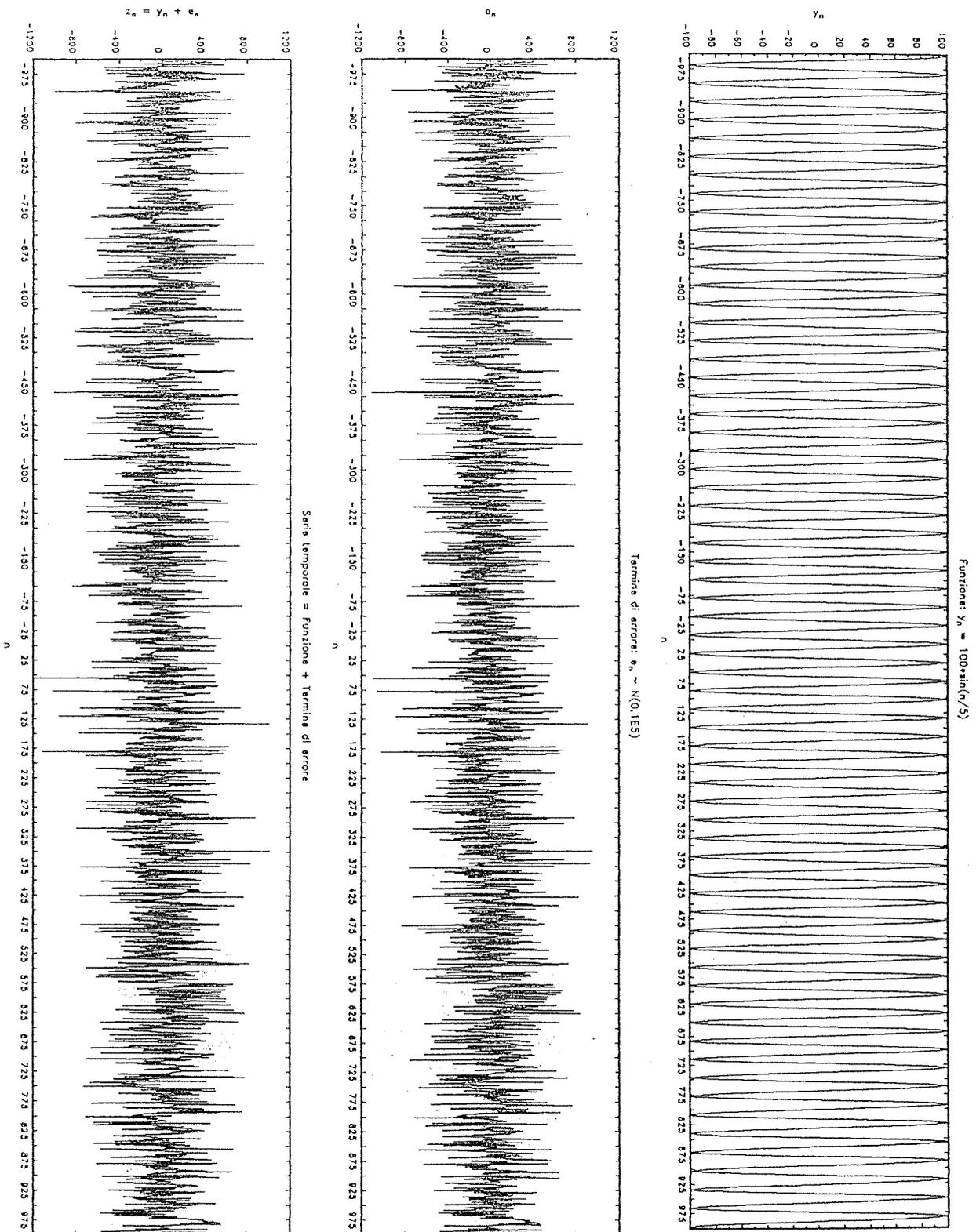


Figura 14

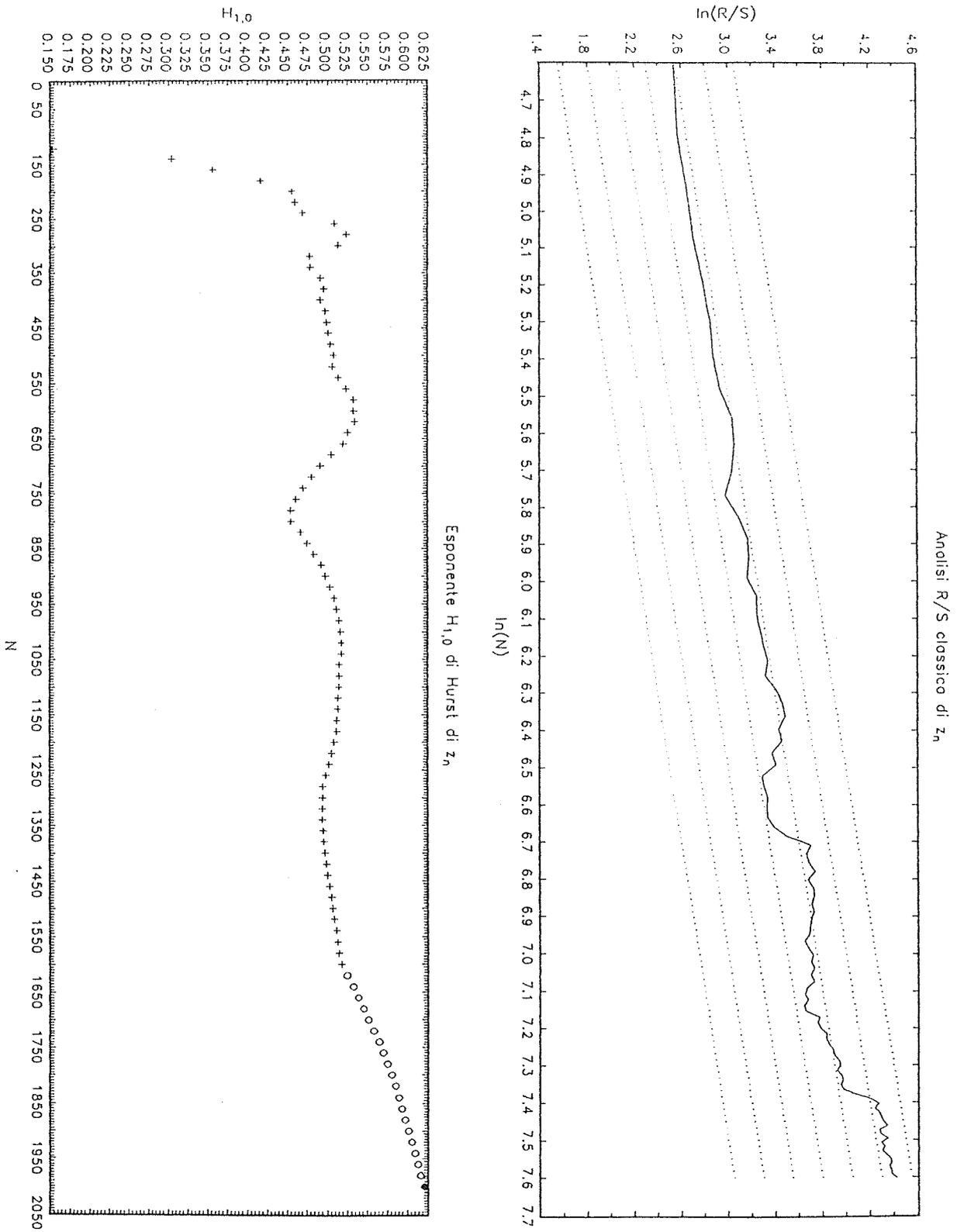


Figura 15

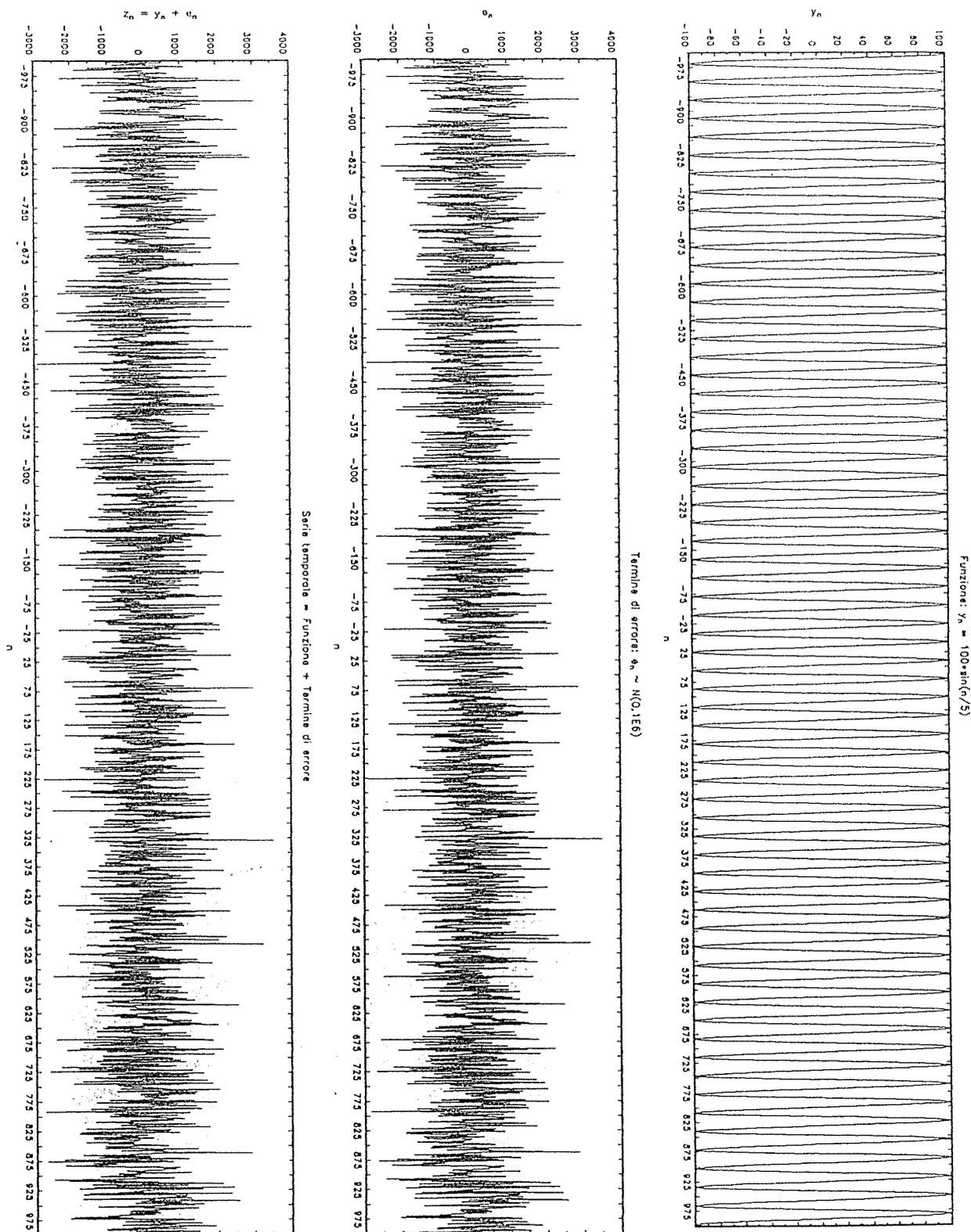


Figura 16

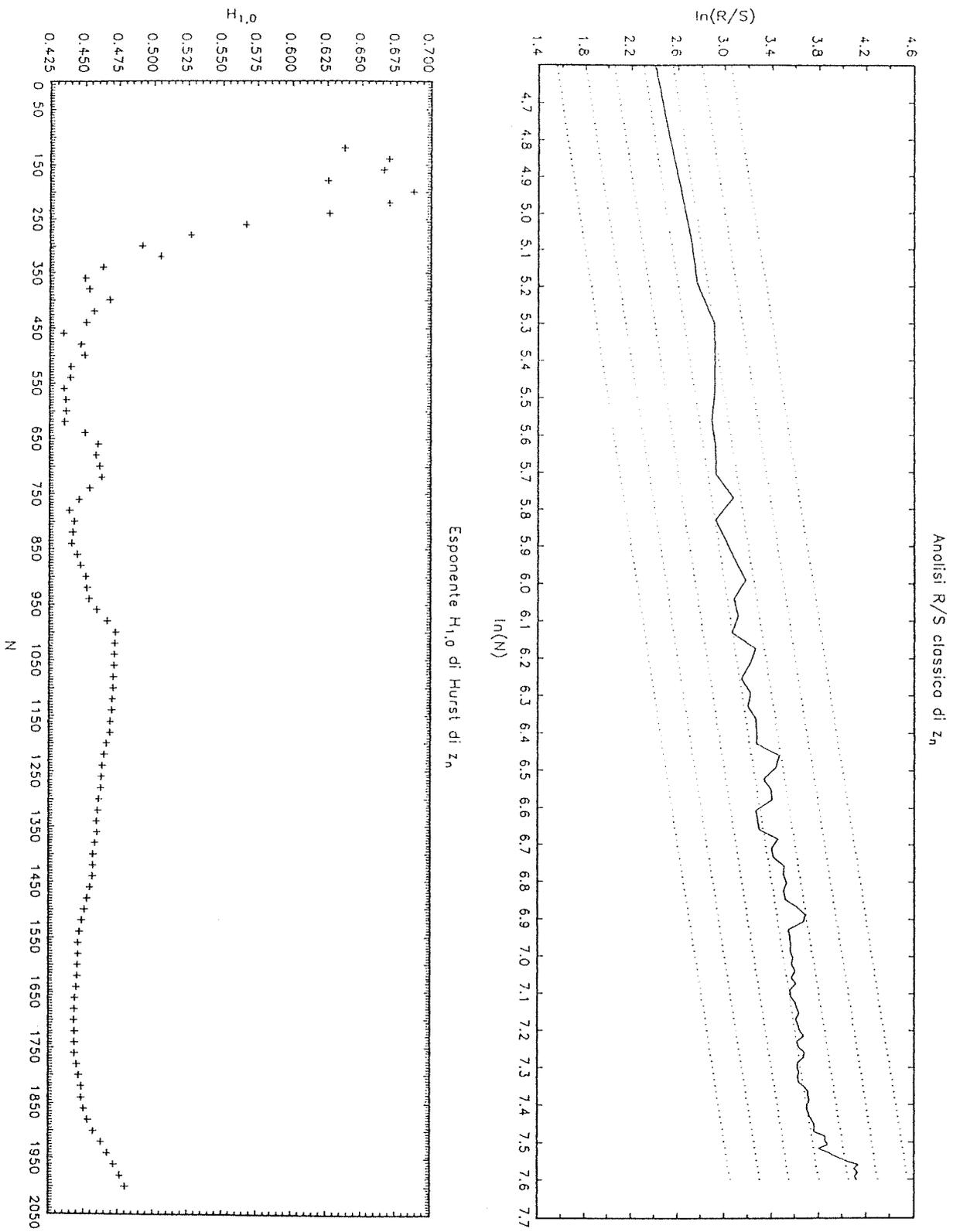


Figura 17

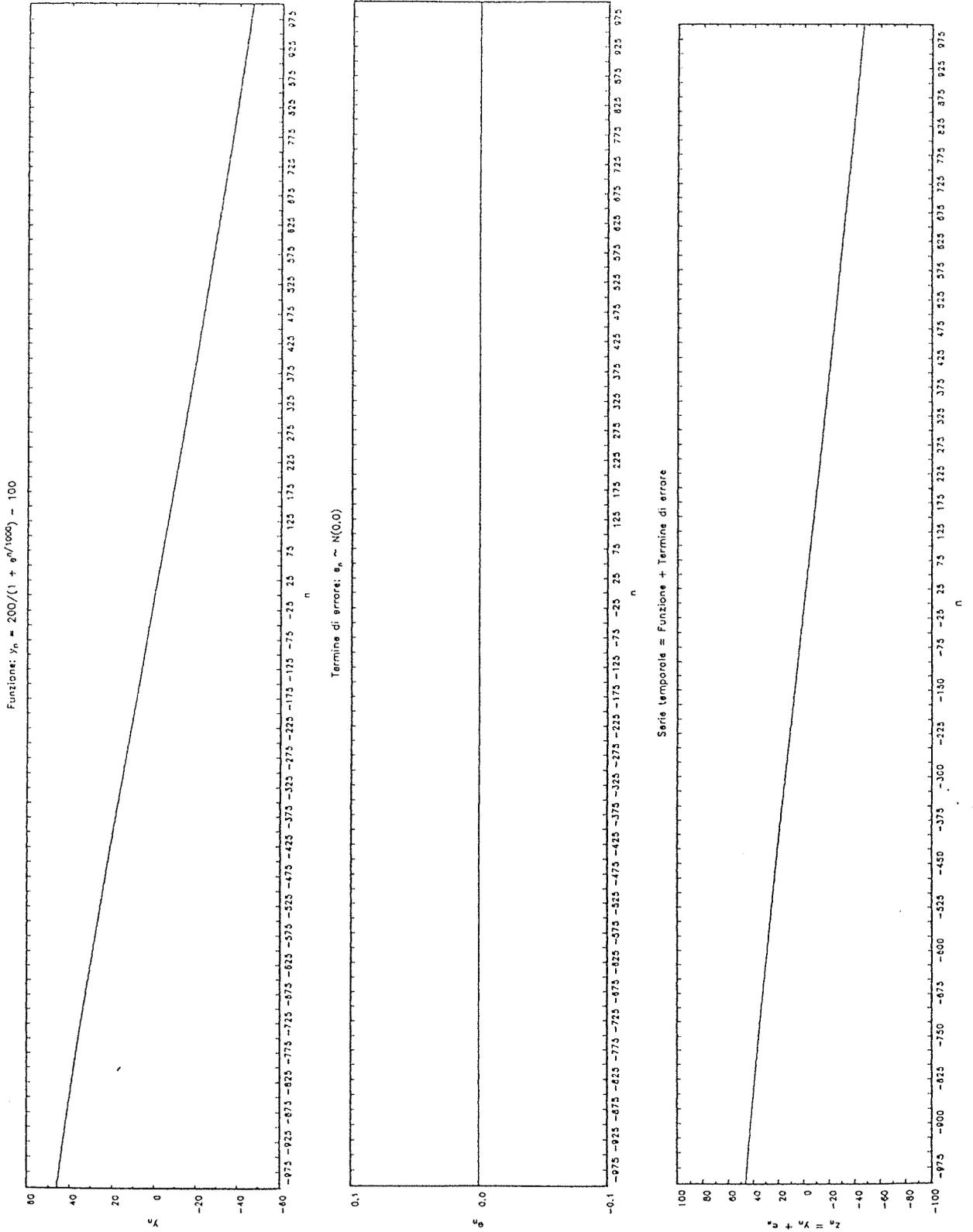


Figura 18

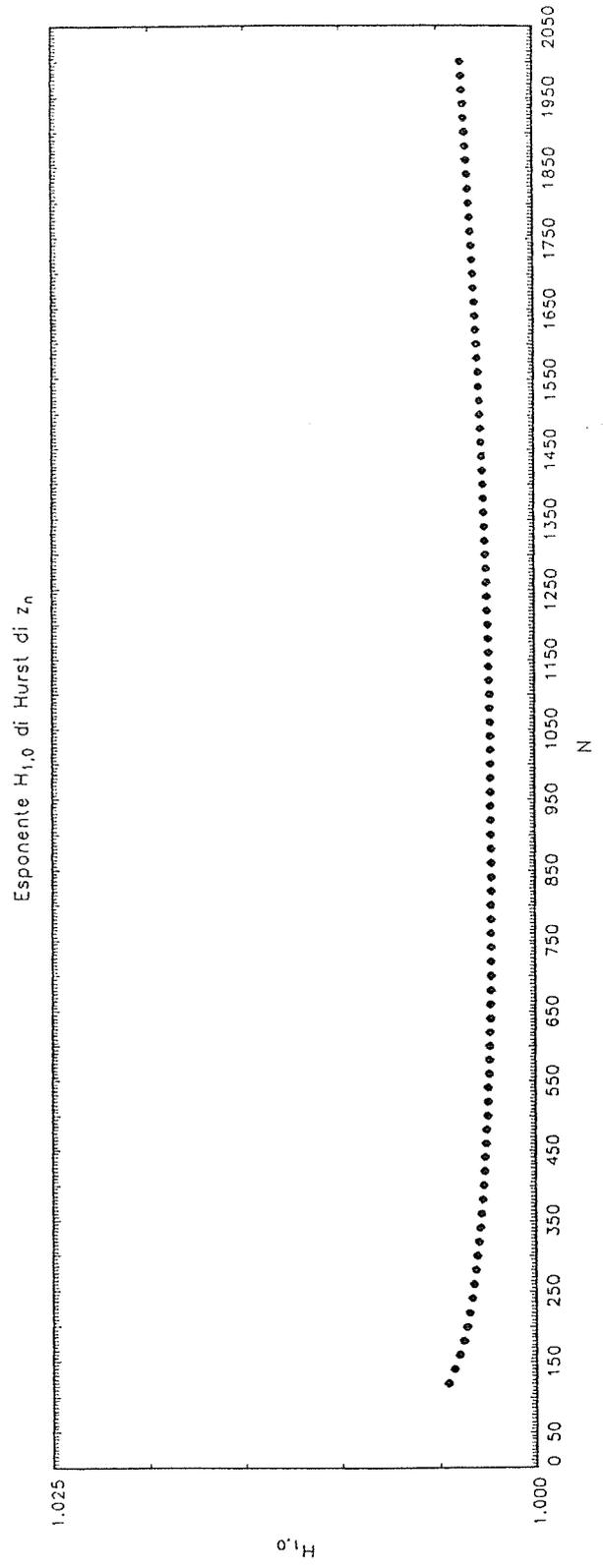
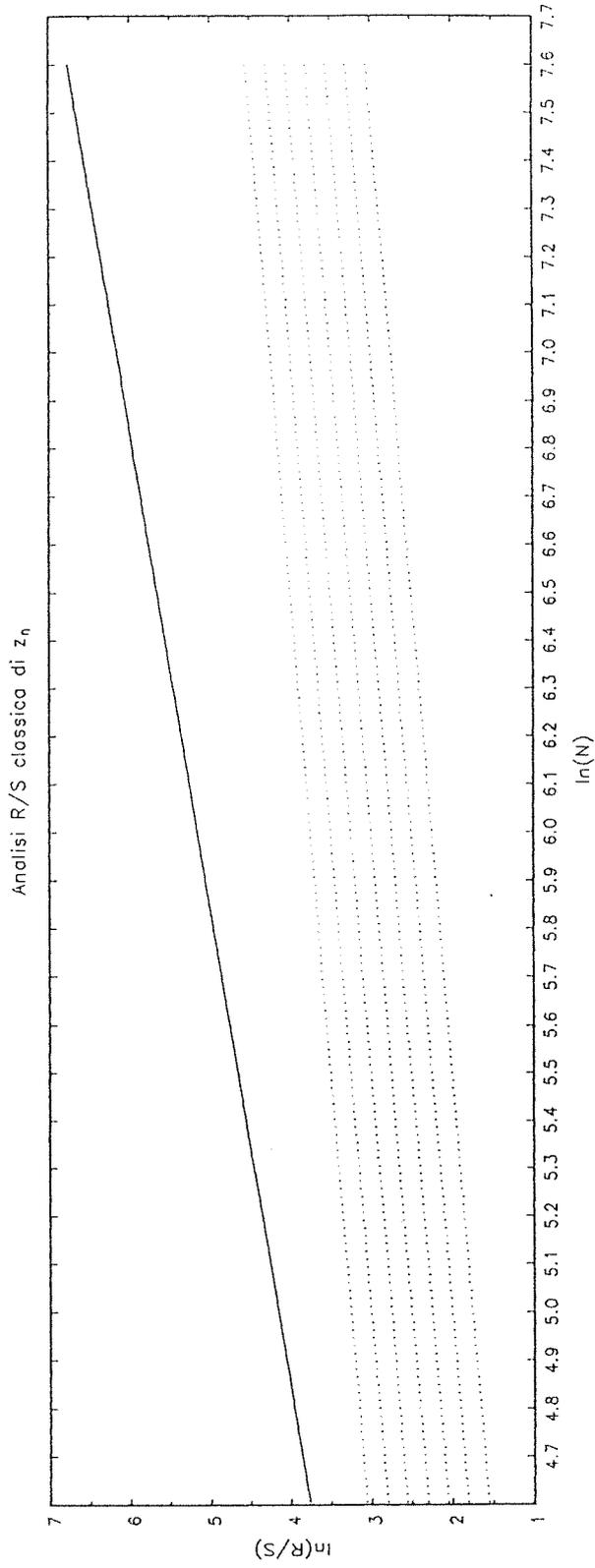


Figura 19

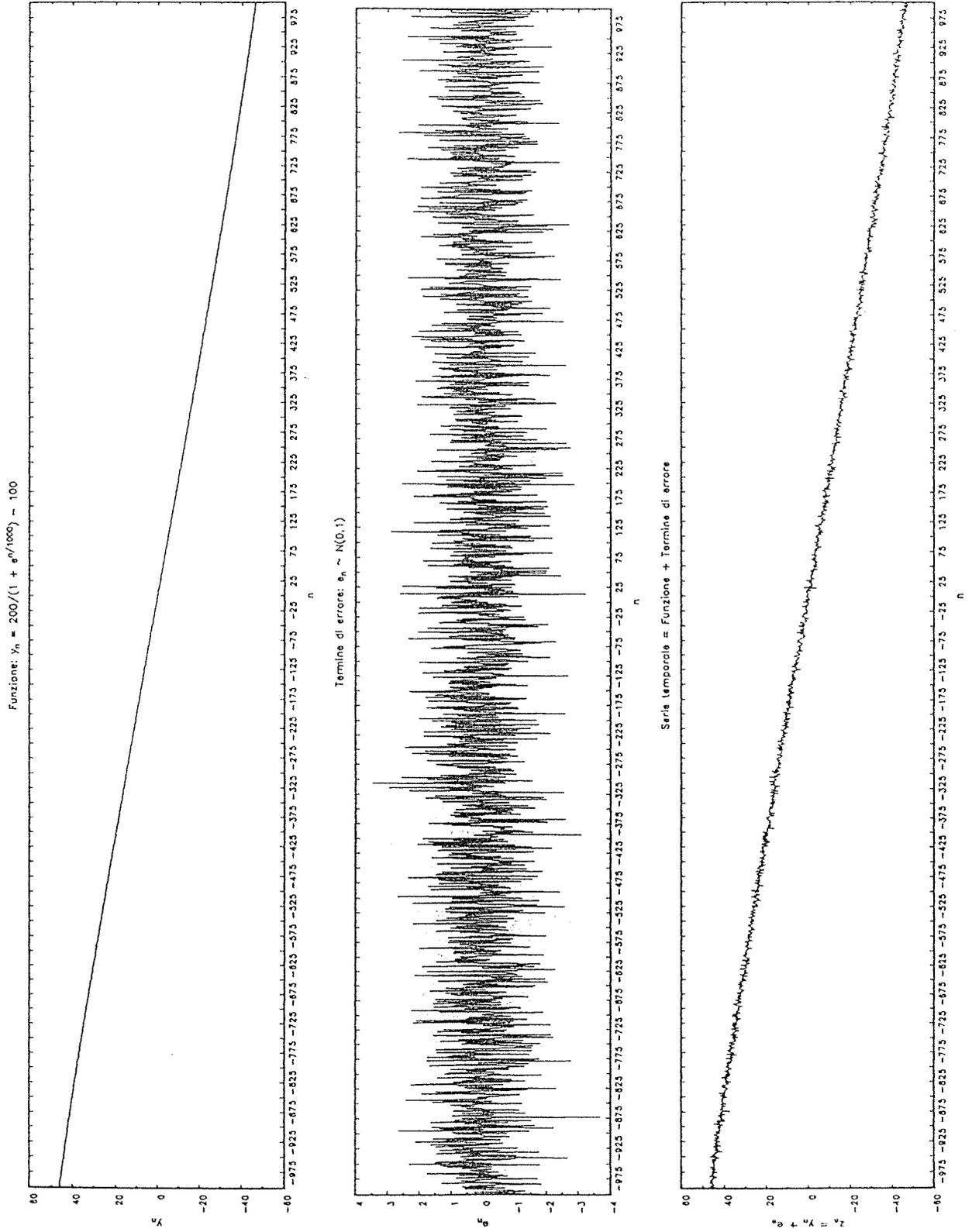


Figura 20

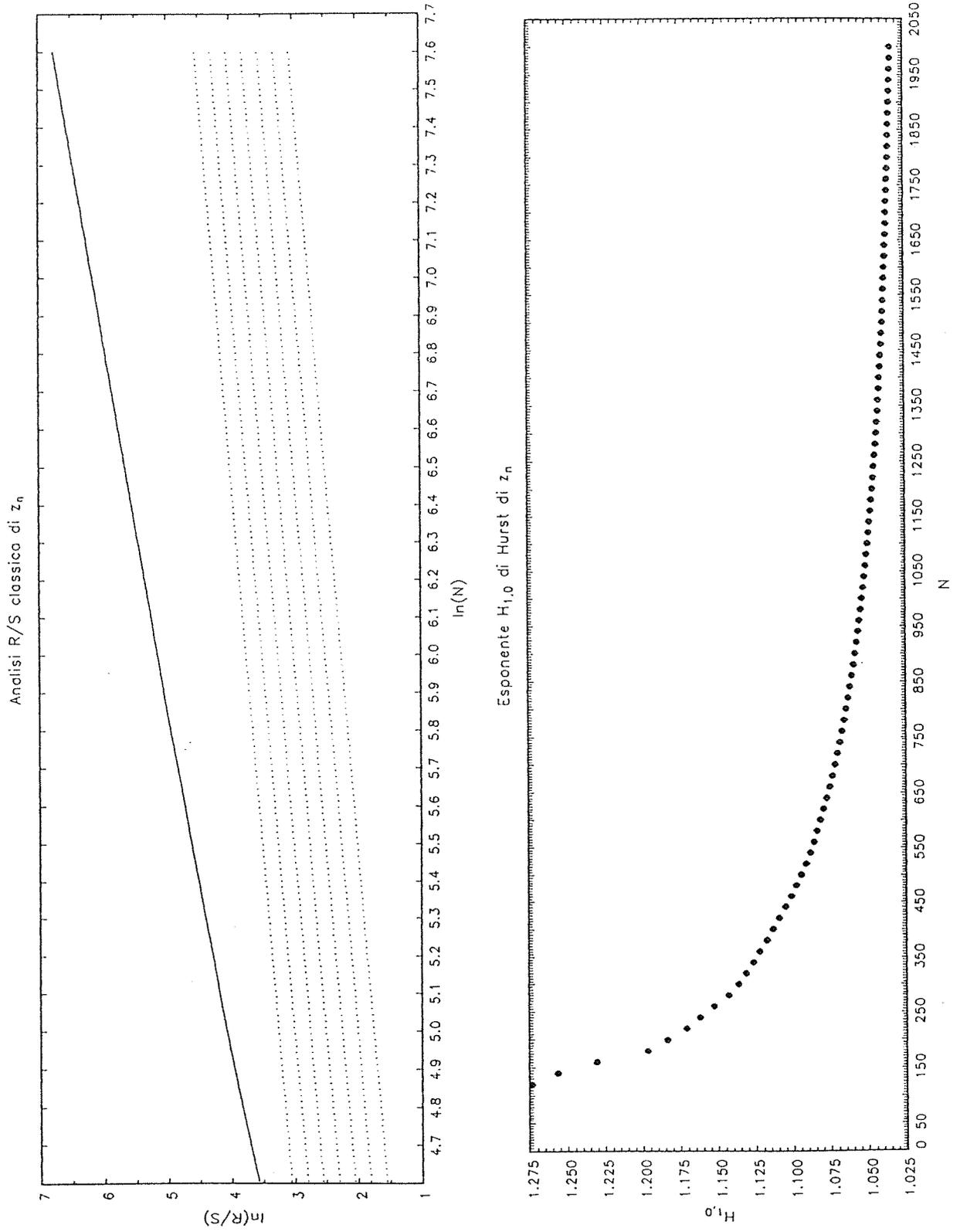


Figura 21

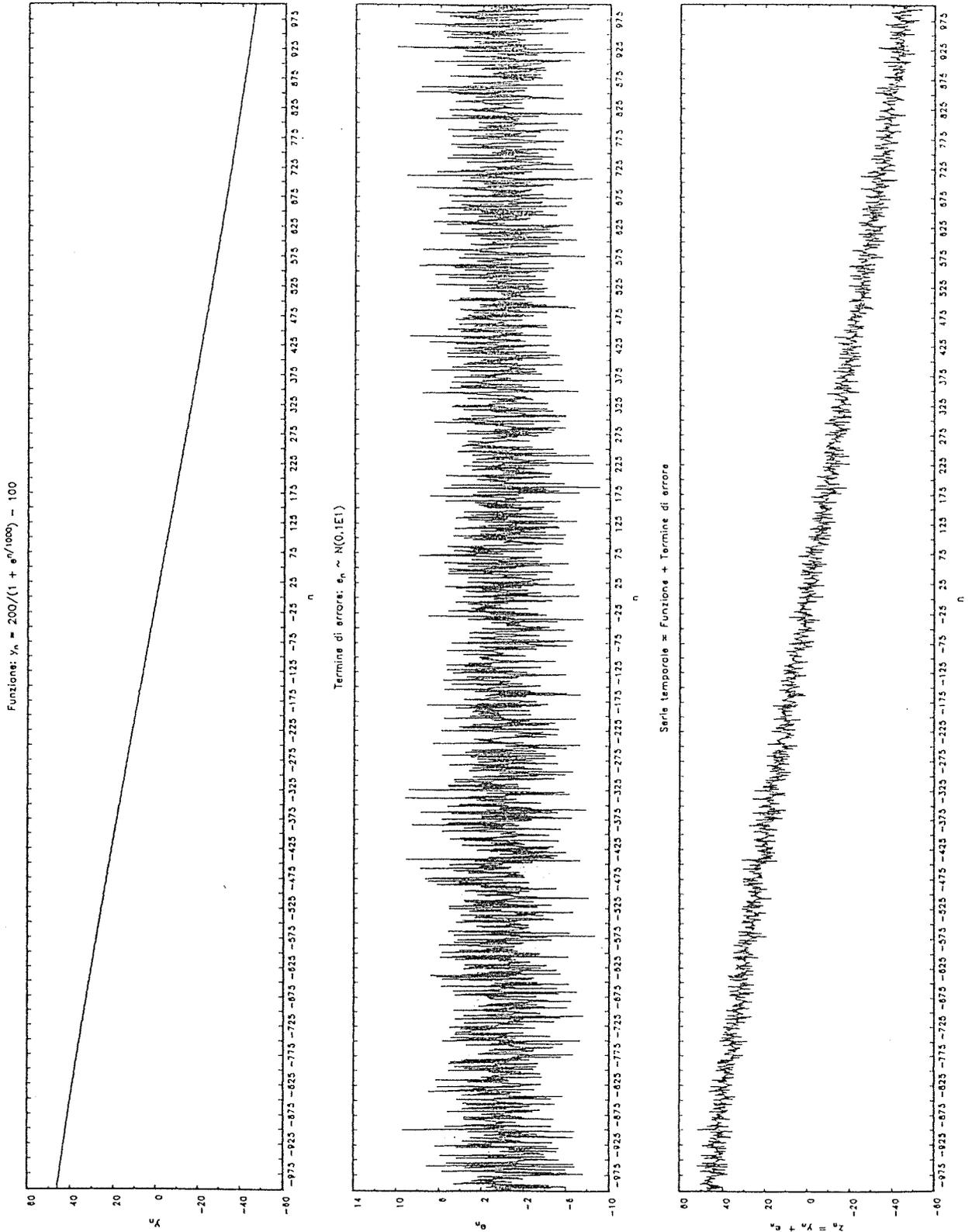


Figura 22

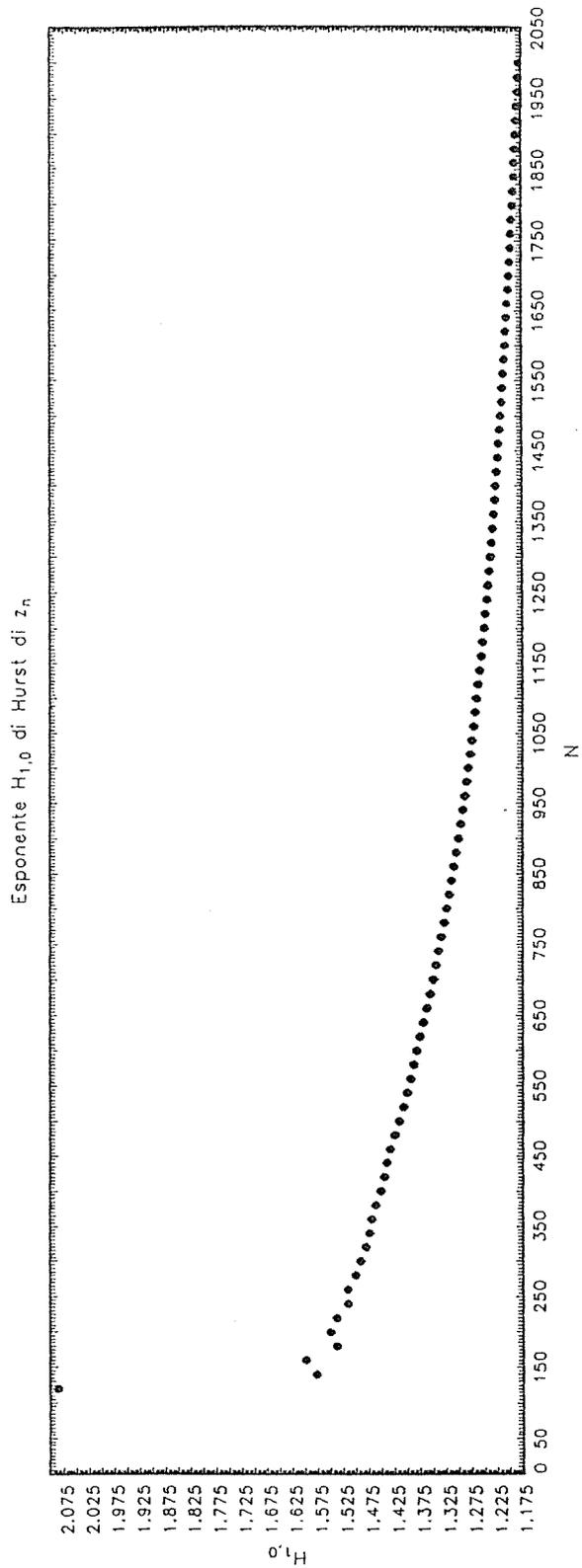
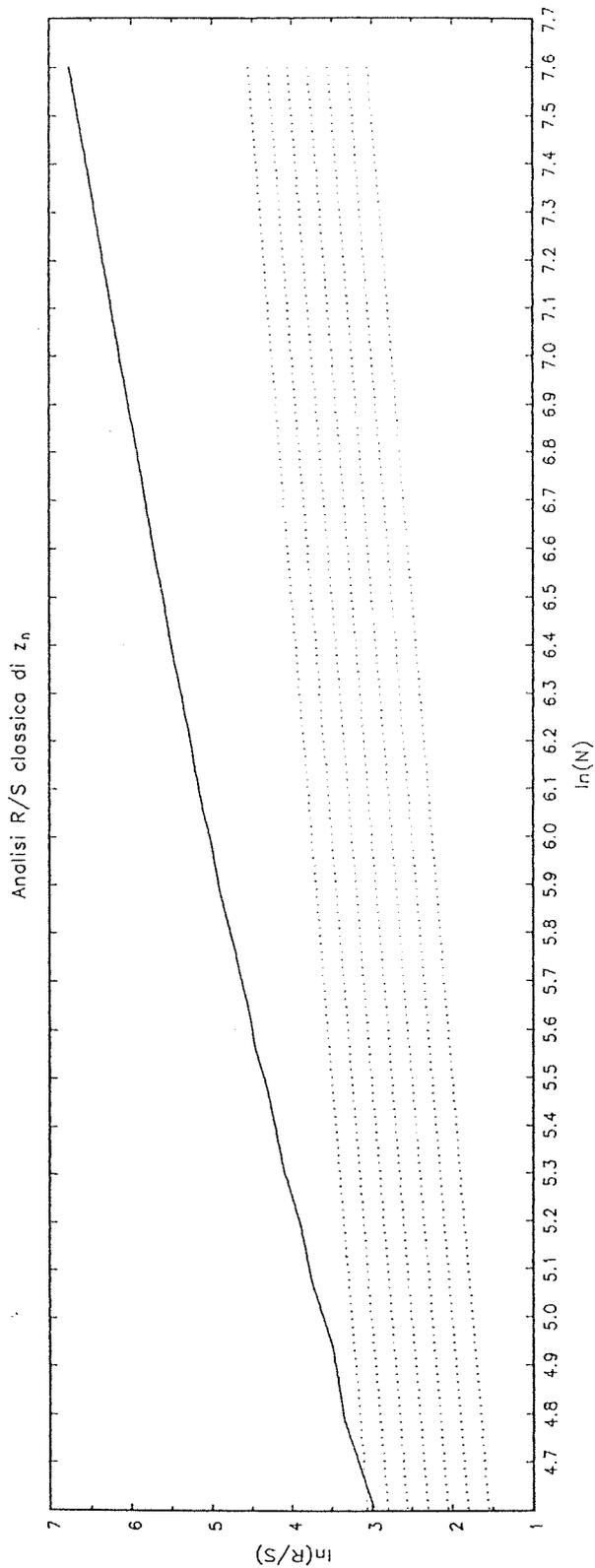


Figura 23

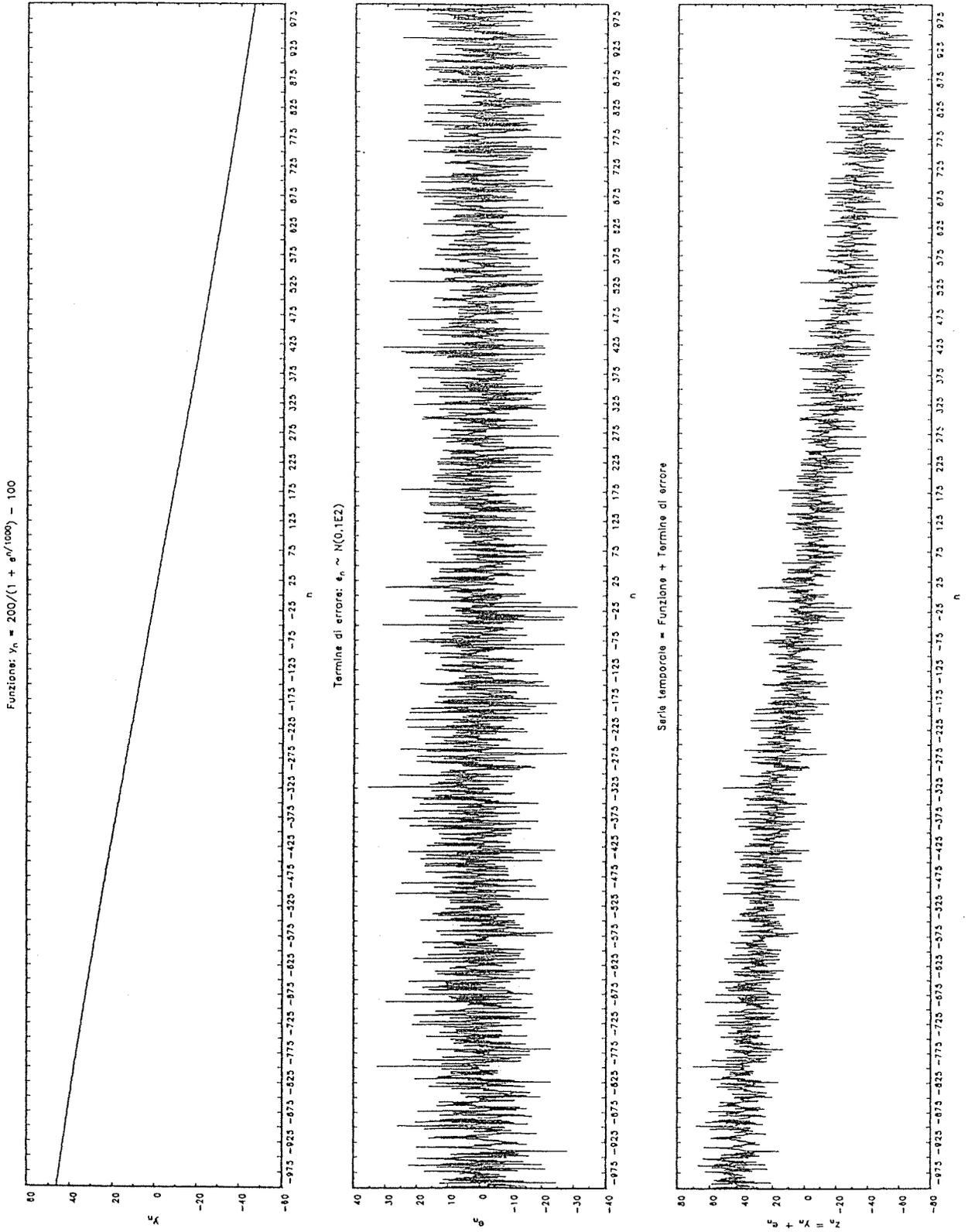


Figura 24

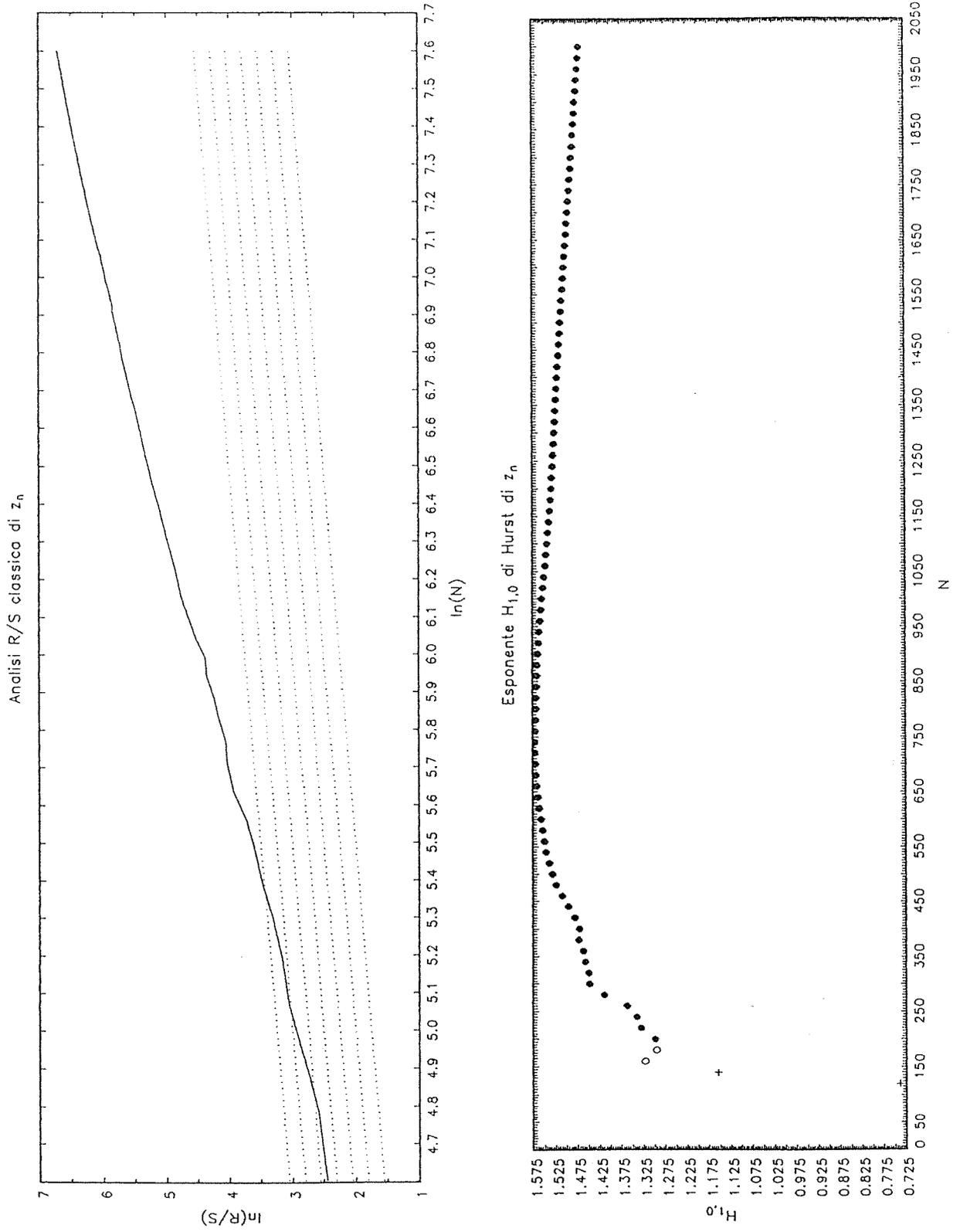


Figura 25

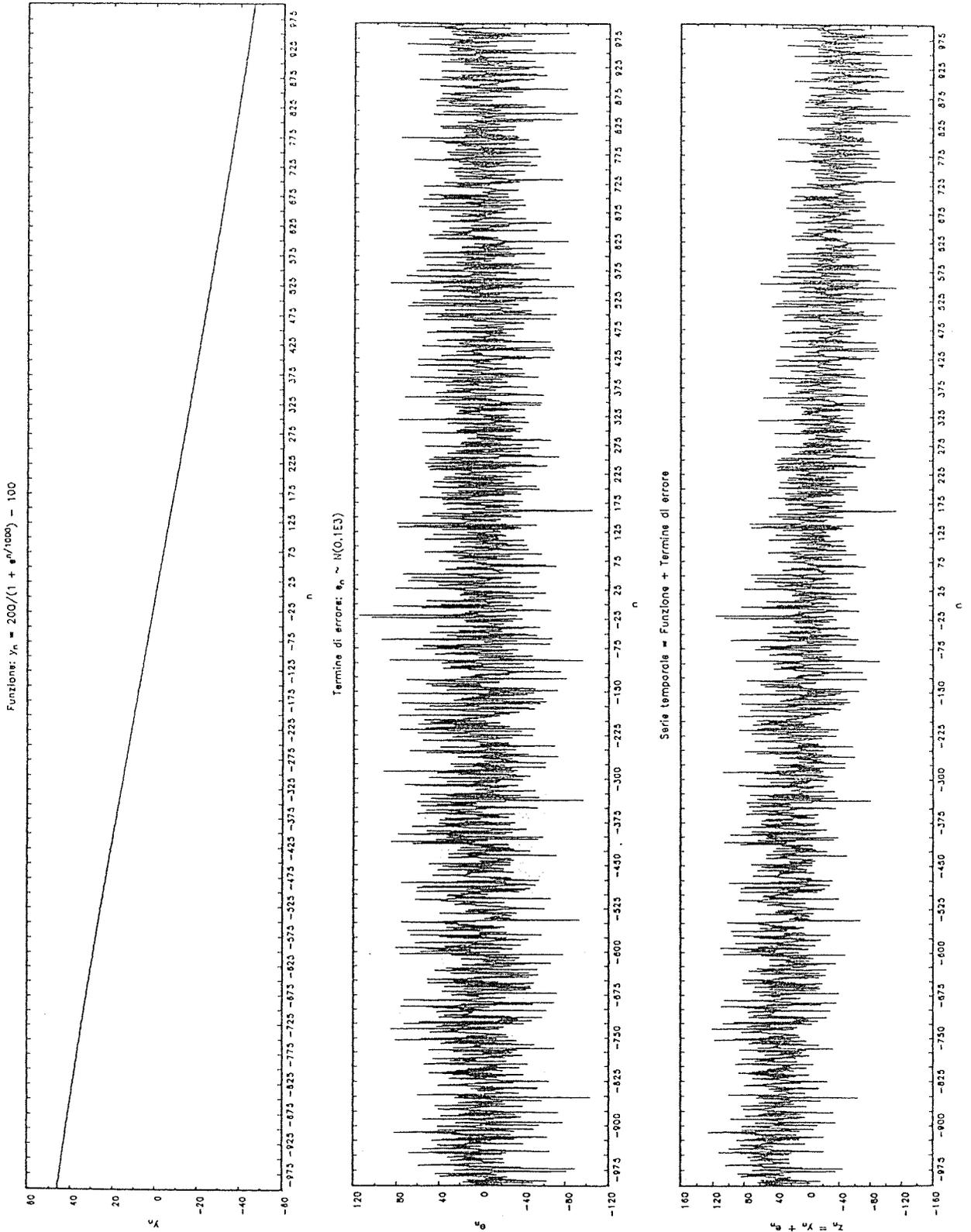


Figura 26

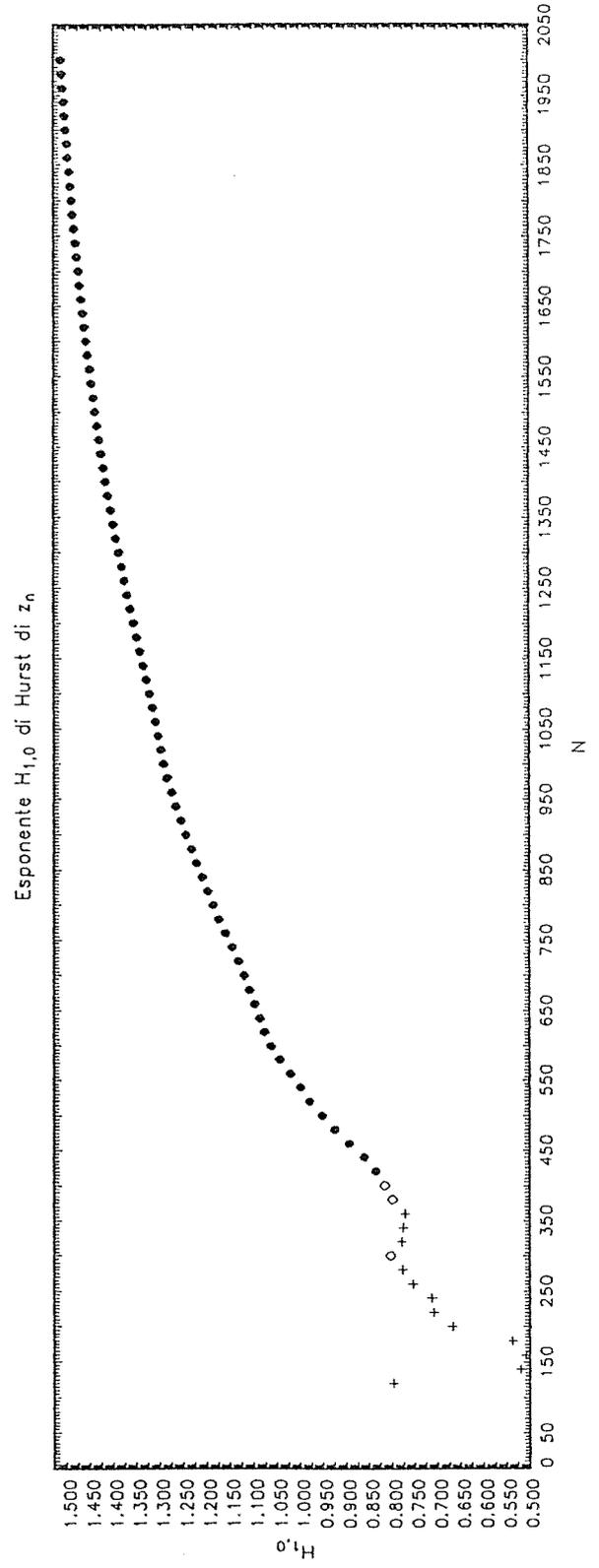
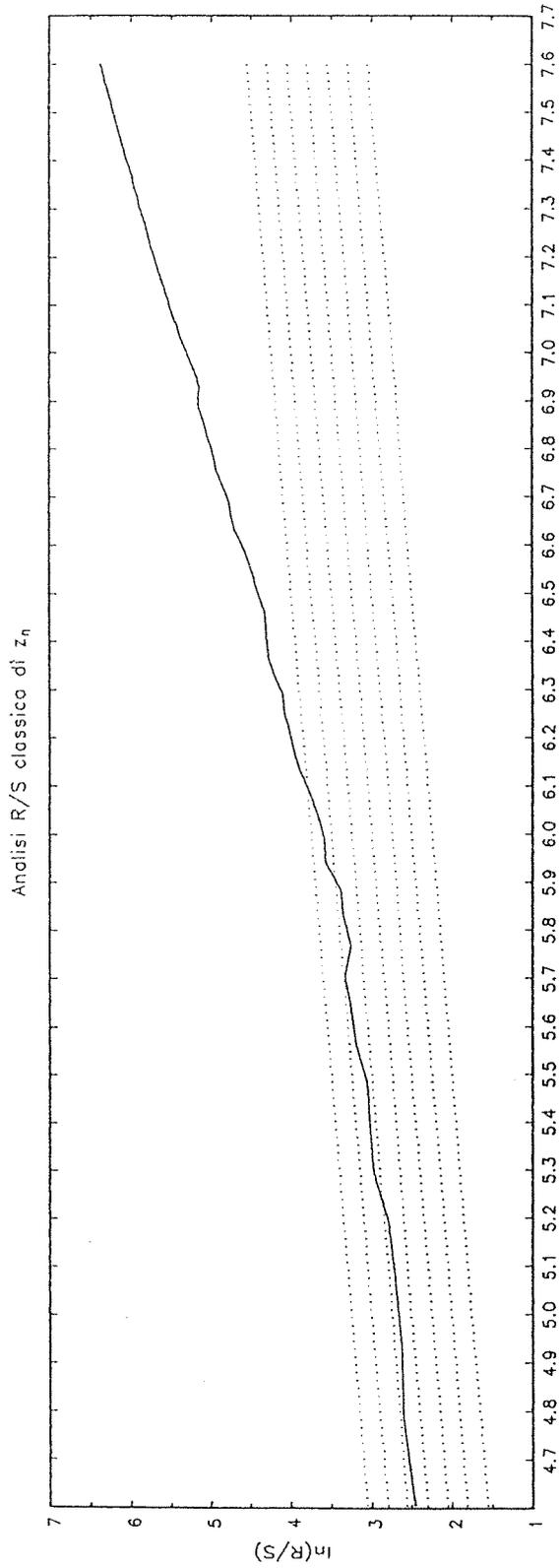


Figura 27

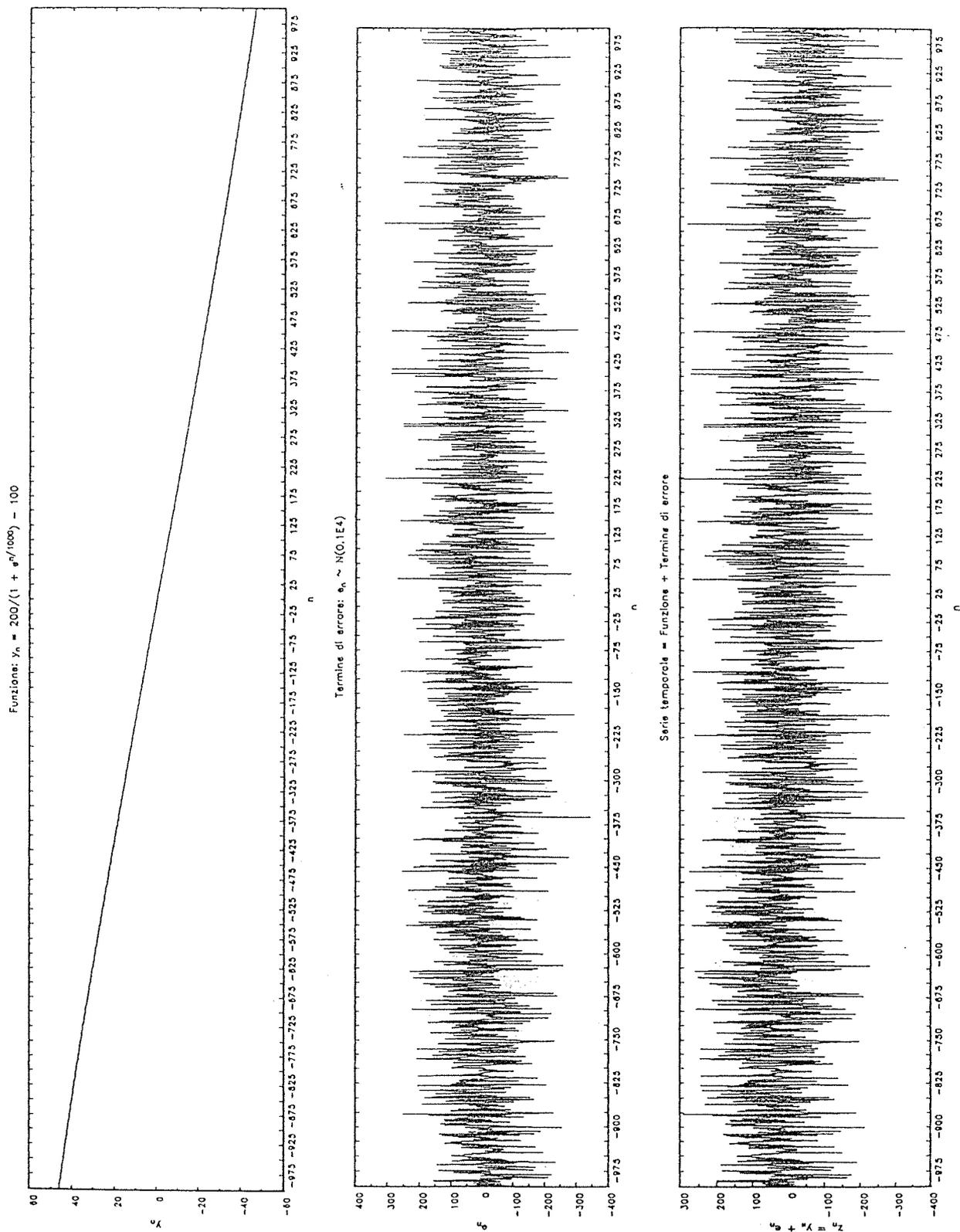


Figura 28

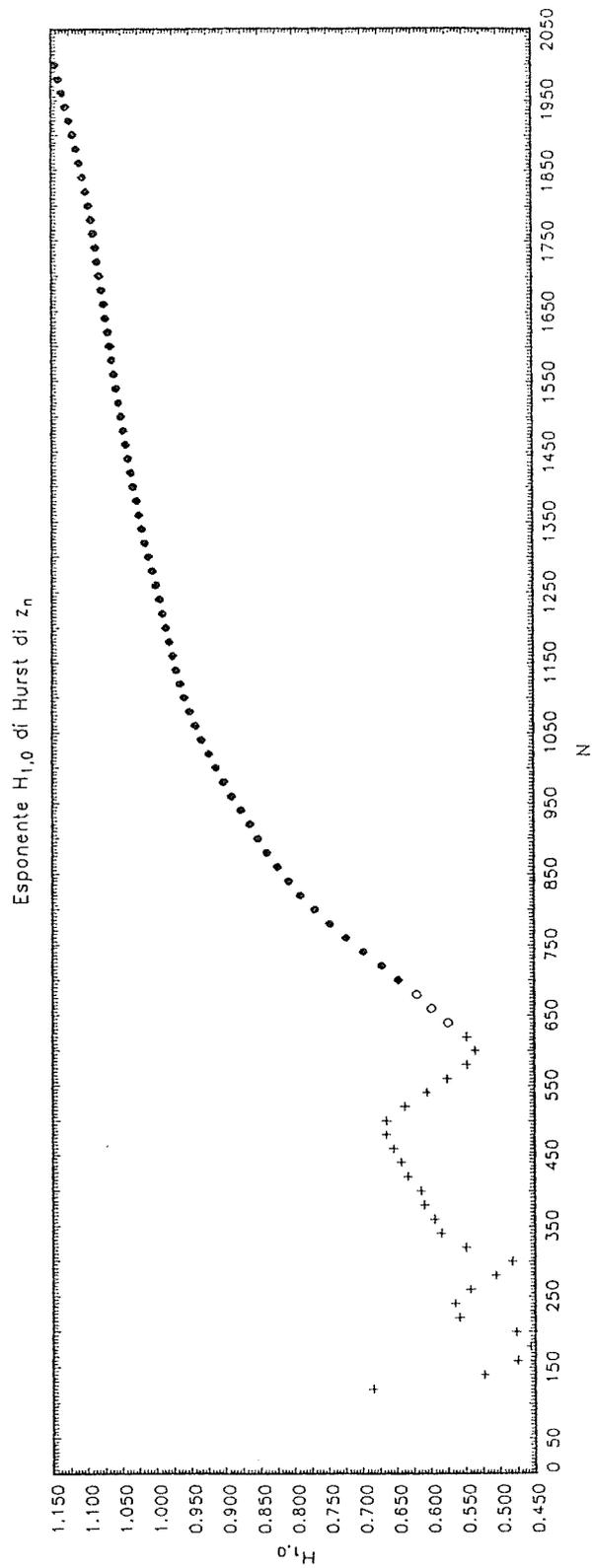
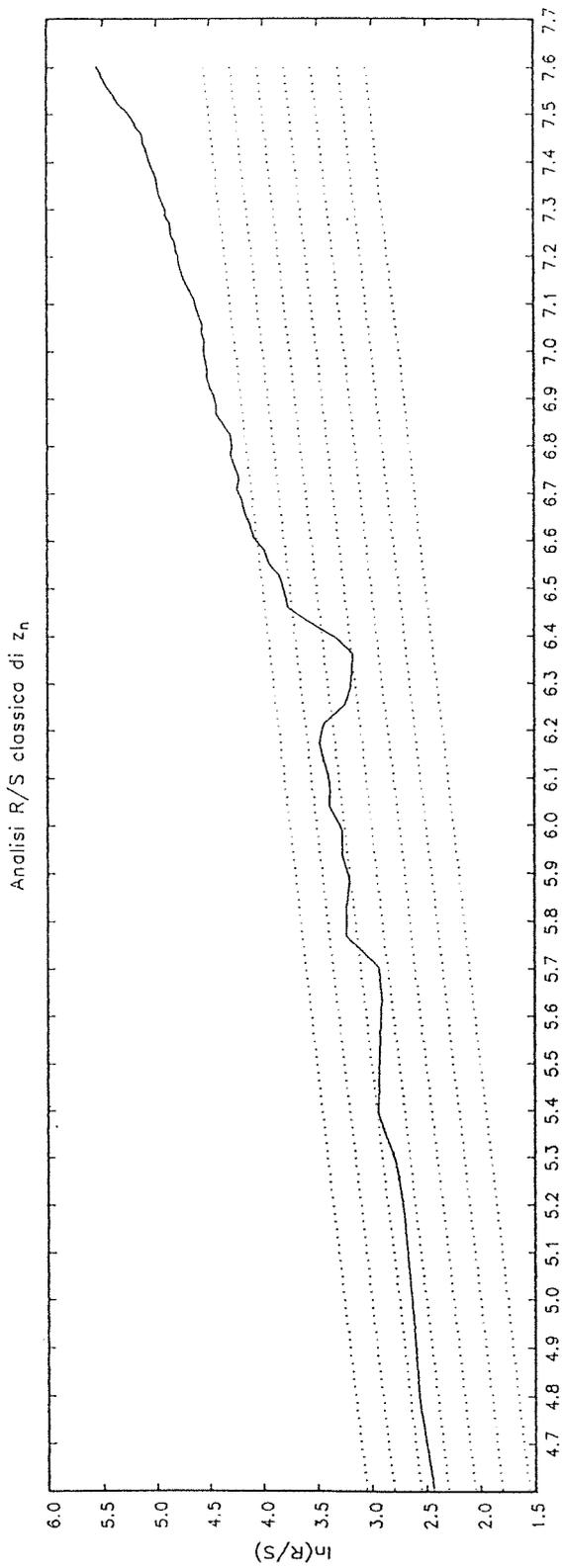


Figura 29

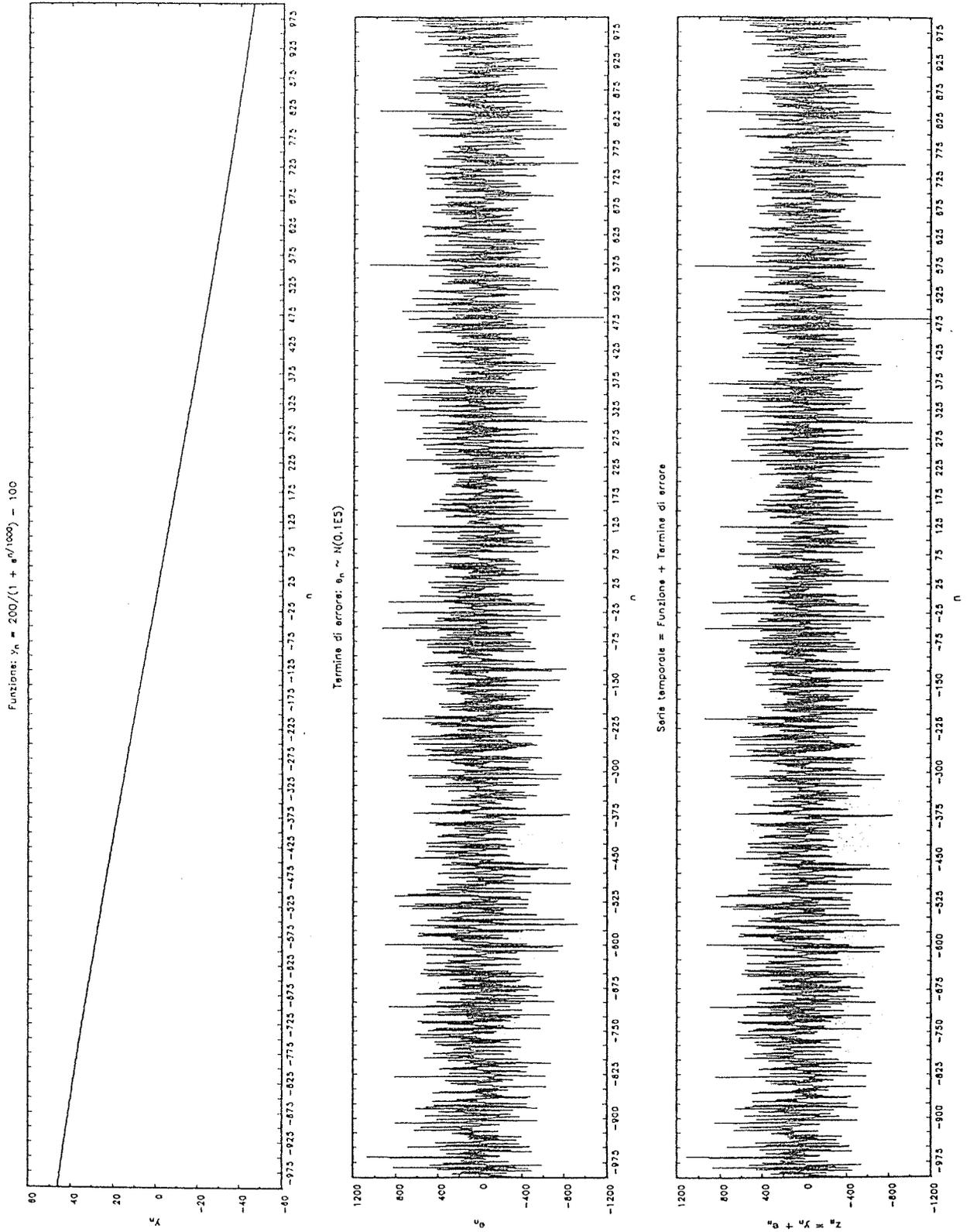


Figura 30

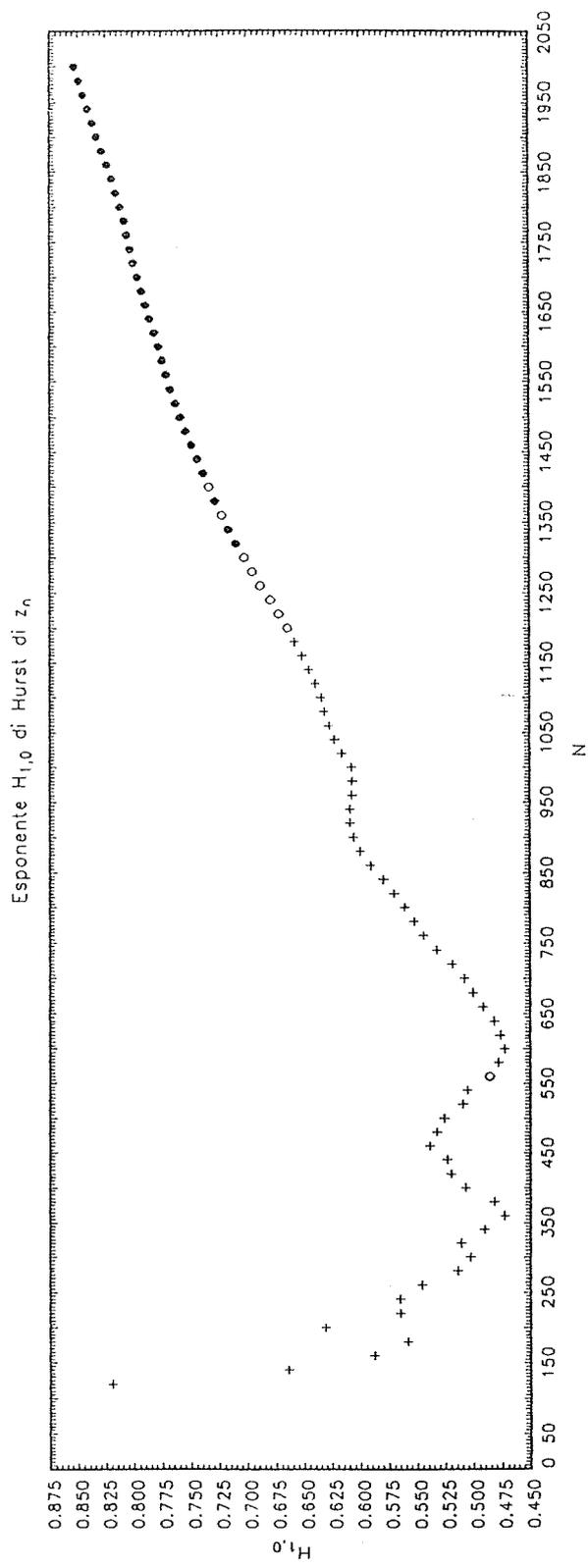
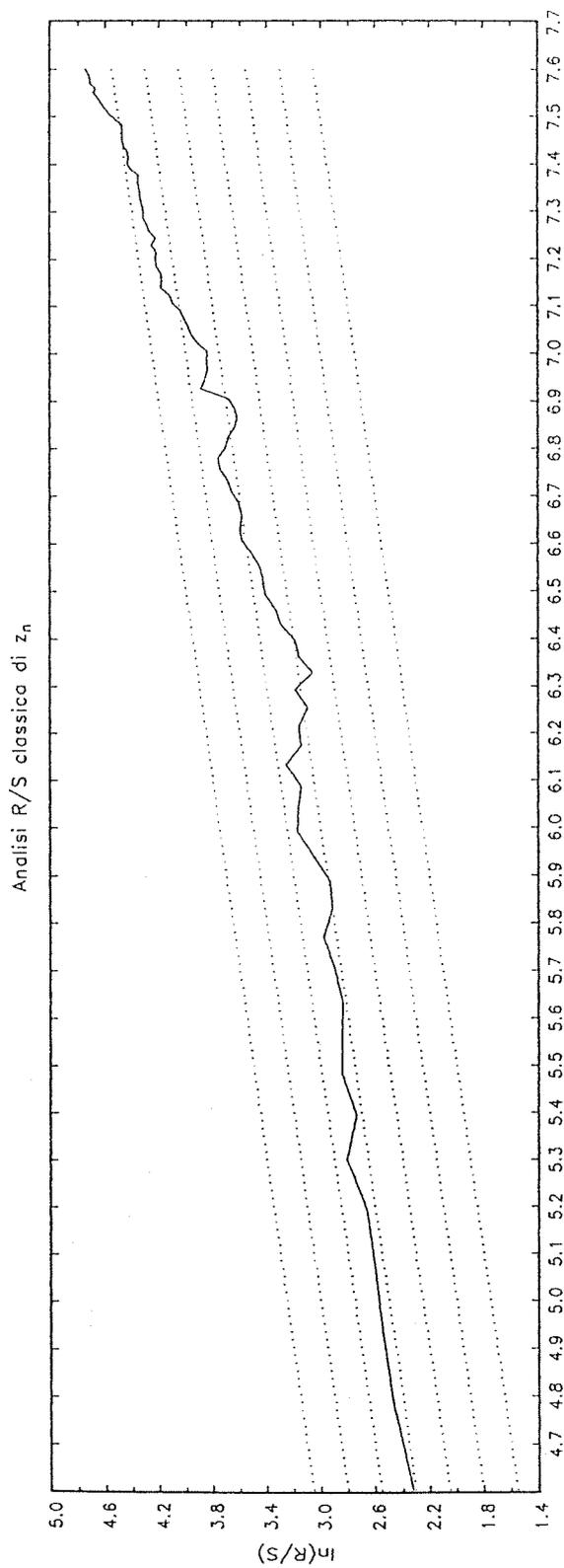


Figura 31

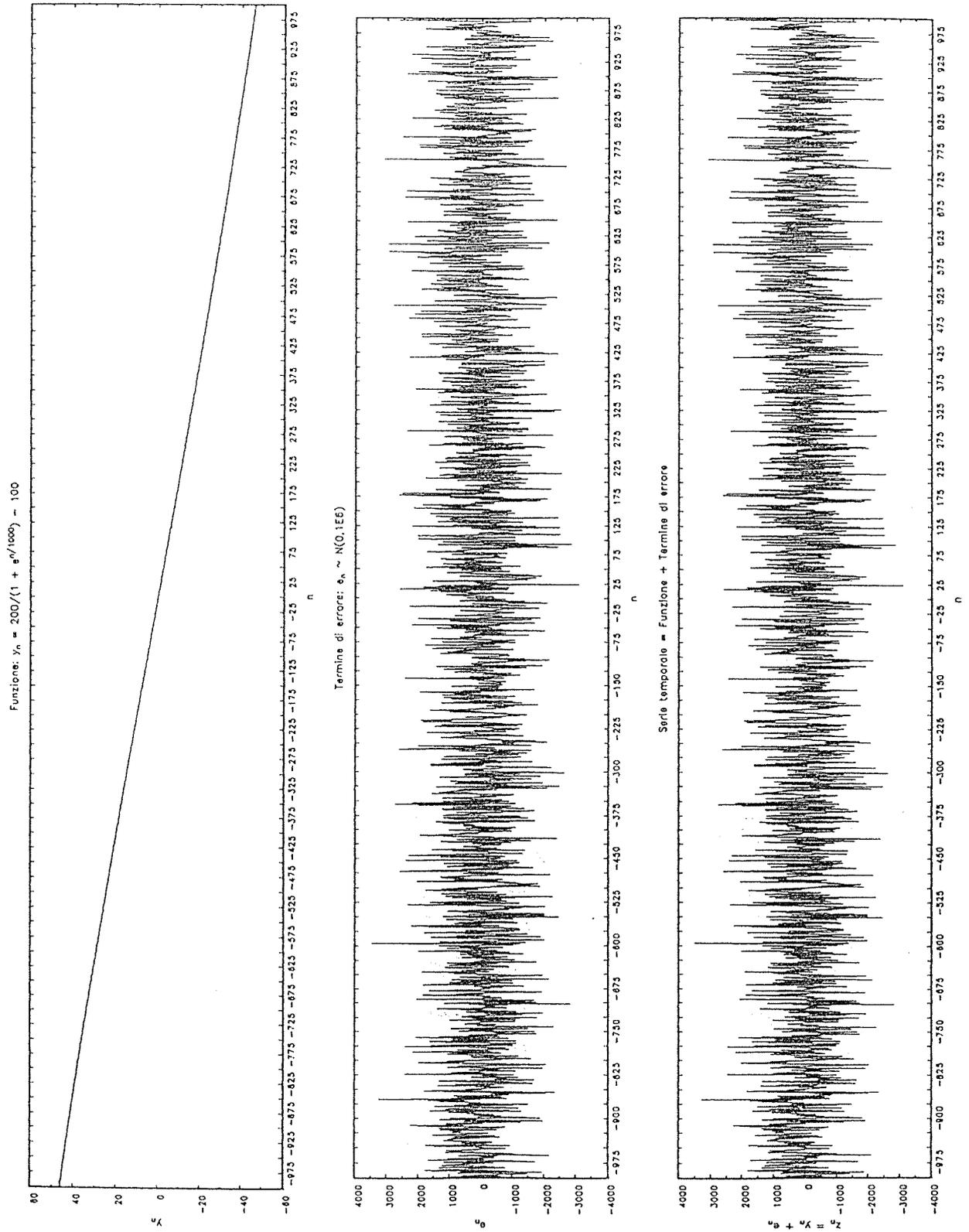
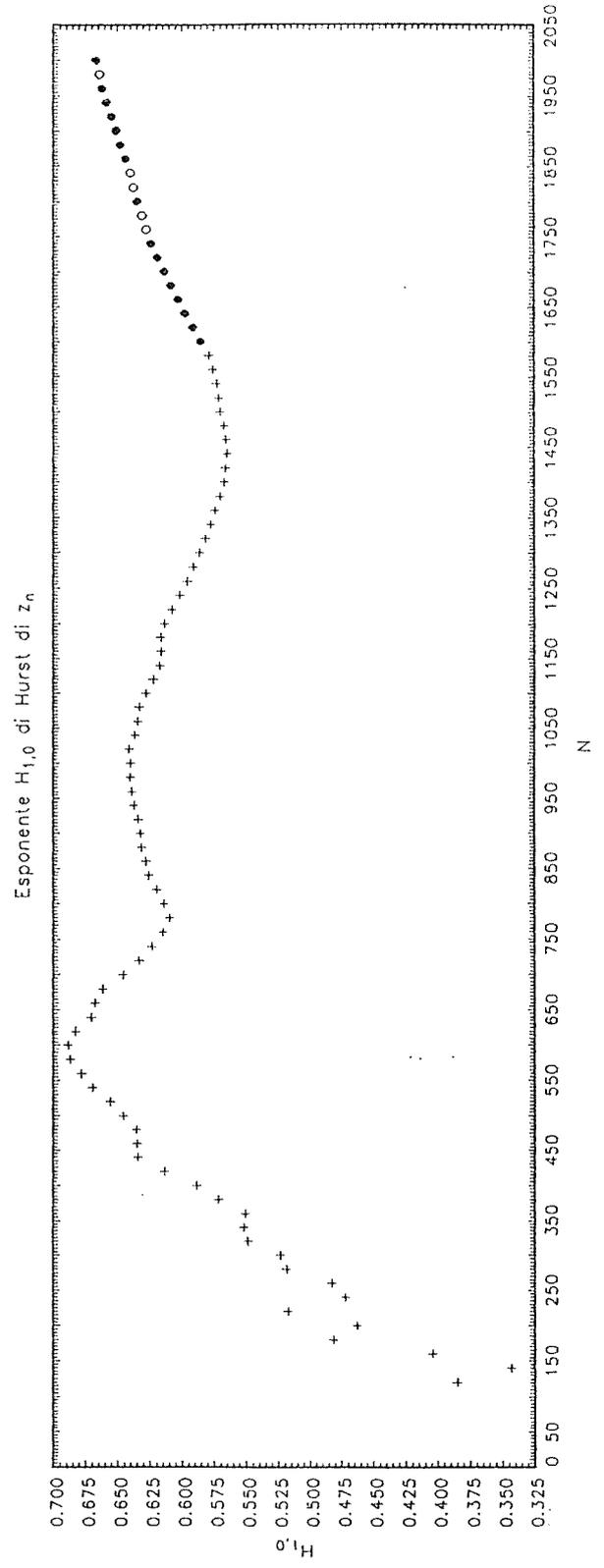
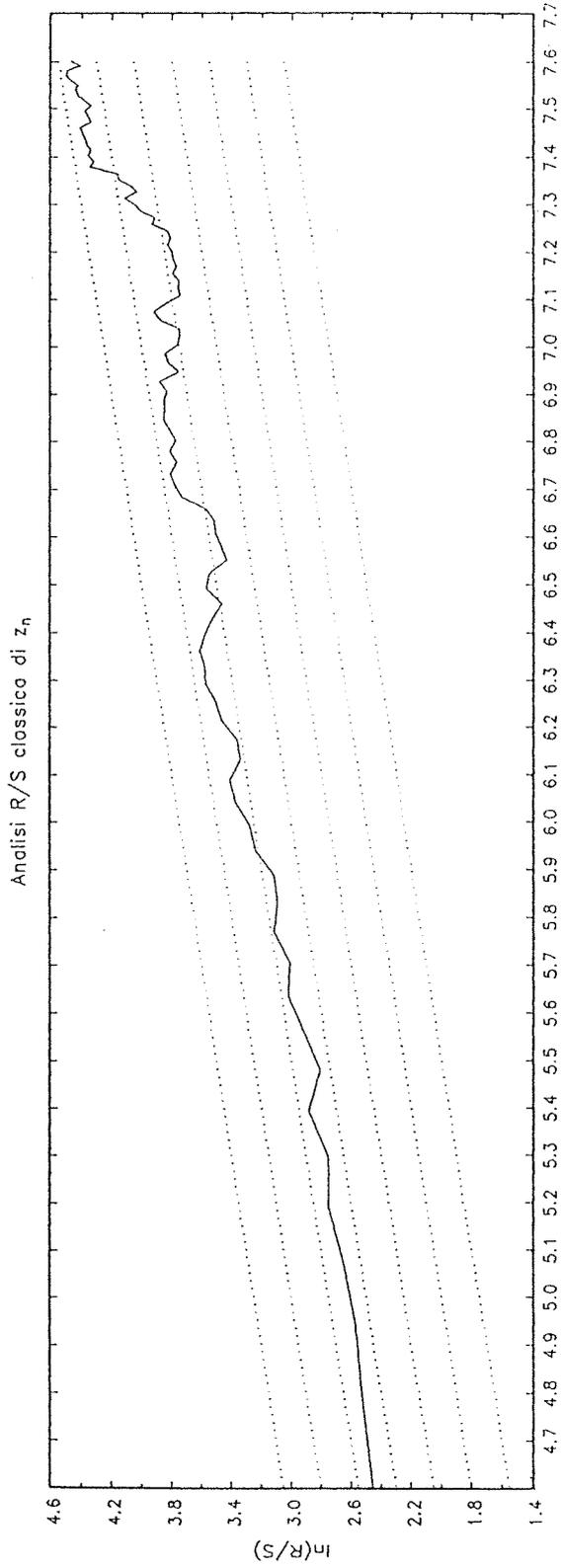


Figura 32



# CAPITOLO IV

## DINAMICHE DETERMINISTICHE NON LINEARI COMPLESSE

### 1. INTRODUZIONE

L'approccio metodologico relativo all'analisi delle dinamiche economico-finanziarie é risultato, in generale, caratterizzato dal paradigma "linearista" e, talvolta "vivacemente", dall'antinomia determinismo/stocasticismo (ad esempio si vedano [Bartlett M. S., 1990], [Butler A., 1990] e [Malliaris A. G., 1992]). In particolare, le ipotesi, le teorie, i metodi e gli strumenti elaborati e sviluppati nell'ambito della prima componente, quella deterministica e, dunque, di natura "endogenista", frequentemente hanno dovuto anche utilizzare elementi stocastici al fine di descrivere e di interpretare quegli aspetti "evidentemente" irregolari non formalizzabili mediante il solo approccio analitico-linearista o, comunque, solo debolmente analitico-non linearista e, analogamente, le ipotesi, le teorie, i metodi e gli strumenti elaborati e sviluppati nell'ambito della seconda componente, quella stocastica e, dunque, di natura "esogenista", frequentemente hanno dovuto anche utilizzare elementi deterministici al fine di descrivere e di interpretare quegli aspetti "evidentemente" regolari non formalizzabili mediante il solo approccio statistico-probabilistico. Peraltro, risultati teorici relativi alla teoria delle

equazioni alle differenze finite, alla teoria delle equazioni differenziali e, più in generale, alla teoria delle varietà differenziali e risultati empirici relativi all'analisi delle serie temporali economico-finanziarie hanno evidenziato un crescente interesse nei confronti delle dinamiche deterministiche non lineari complesse ([Li T.-Y. *et al.*, 1975], [May R. M., 1976], [May R. M. *et al.*, 1976], [Benettin G. *et al.*, 1976], [Ruelle D., 1979], [Benhabib J. *et al.*, 1983], [Grassberger P. *et al.*, 1983], [Badii R. *et al.*, 1985], [Wolf A. *et al.*, 1985], [Bergé P. *et al.*, 1986], [Brock W. A., 1986], [Devaney R. L., 1986], [Eckmann J.-P. *et al.*, 1986], [Mandelbrot B. B., 1987], [Barnett W. *et al.*, 1988], [Frank M. *et al.*, 1988], [Theiler J., 1988], [Brock W. A. *et al.*, 1989], [Scheinkman J. A. *et al.*, 1989], [Falconer K., 1990], [Peters E. E., 1991a], [Peters E. E., 1991b], [Booth G. G. *et al.*, 1992], [Brasolin A. *et al.*, 1992], [Malliaris A. G. *et al.*, 1992], [Medio A. *et al.*, 1992], [Peitgen H.-O. *et al.*, 1992], [Smith R. L., 1992], [Allevi E. *et al.*, 1993], [Glasnert E. *et al.*, 1993] e [Peters E. E., 1994]) dovuto alla loro capacità sia di formalizzare processi deterministici le cui realizzazioni risultano empiricamente indistinguibili da quelle generate da processi stocastici<sup>1</sup> che di manifestare delle proprietà formali analoghe a quelle caratterizzanti le dinamiche stocastiche (ad esempio si veda [Lasota A. *et al.*, 1985] e [Ornstein D. S. *et al.*, 1991]).

Questo capitolo propone i principali aspetti teorici relativi alle dinamiche deterministiche non lineari complesse. In particolare, nella sezione 2. si illustrano sinteticamente degli aspetti definatori relativi ai sistemi dinamici deterministici in generale; nella sezione 3. si introducono sia degli aspetti definatori che degli aspetti teorici relativi alle dinamiche deterministiche non lineari complesse in particolare; nella sezione 4. si illustrano le proprietà di alcuni "oggetti" associati a tali dinamiche deterministiche non lineari complesse; nella sezione 5. si introducono degli aspetti teorici relativi alla predicibilità delle dinamiche deterministiche non lineari complesse; nella sezione 6. si propongono delle verifiche numeriche relative alla manifestazione, da parte di queste ultime dinamiche, di proprietà analoghe a quelle

---

<sup>1</sup> È possibile verificare che la classica analisi spettrale può risultare incapace di riconoscere la natura deterministica di una serie temporale generata da un sistema dinamico non lineare complesso (ad esempio si veda [Bartlett M. S., 1990]).

caratterizzanti le dinamiche stocastiche.

## 2. ASPETTI DEFINITORI

In questa sezione si presentano degli aspetti definitivi relativi, in generale, sia ai sistemi dinamici deterministici autonomi rappresentabili nella seguente forma

$$\dot{x}(t) = f[x(t)] \quad (2.1)$$

dove

$$\dot{x} \stackrel{def}{=} dx/dt,$$

$$t \in \mathbf{R},$$

$$f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n,$$

che ai sistemi dinamici deterministici autonomi rappresentabili nella seguente forma

$$x(t+1) = g[x(t)] \quad (2.2)$$

dove

$$t \in \mathbf{Z},$$

$$g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n,$$

aspetti estendibili, con le opportune puntualizzazioni, ai corrispondenti sistemi dinamici non autonomi. Tali aspetti necessitano previamente delle seguenti definizioni (per maggiori dettagli si veda [Medio A., 1992] e [Rinaldi S., 1993a])<sup>2</sup>.

**Definizione 2.1.1.** *Siano dati un sistema dinamico autonomo  $\dot{x}(t) = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente soluzione  $\phi[t, x(0)]$ , con  $x(0)$  prescelta condizione iniziale, e un insieme  $A \subset \mathbf{R}^n$  tale che si abbia<sup>3</sup>.*

$$\phi[t, A] \stackrel{def}{=} \bigcup_{a \in A} \phi[t, a] \subset A \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (2.3.1)$$

---

<sup>2</sup> Da qui in poi, per una maggiore semplicità di notazione e quando non diversamente specificato, la definizione inerente ad uno stesso "oggetto" viene presentata, dapprima, in relazione ai sistemi dinamici (2.1) e, successivamente, ai sistemi dinamici (2.2).

<sup>3</sup> Per una maggiore omogeneità di definizione si pone  $\phi[0, x] \stackrel{def}{=} x$ .

Tale insieme  $A$  si definisce insieme invariante per lo specificato sistema dinamico.

**Definizione 2.1.2.** Siano dati un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  e un insieme  $A \subset \mathbf{R}^n$  tale che si abbia

$$g^t(A) \stackrel{def}{=} \bigcup_{a \in A} g^t(a) \subset A \quad \forall t \in \mathbf{Z} \quad (2.3.2)$$

dove

$g^t(\cdot)$ :  $t$ -esima iterata del sistema dinamico<sup>4</sup>.

Tale insieme  $A$  si definisce insieme invariante per lo specificato sistema dinamico.

**Definizione 2.2.1.** Siano dati un sistema dinamico autonomo  $\dot{x}(t) = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente soluzione, in corrispondenza della condizione iniziale  $x(0)$ ,  $\phi[t, x(0)]$ , un insieme  $\{\phi[t, x(0)], t \in \mathbf{R}\}$  e un insieme  $\{(t, \phi[t, x(0)]), t \in \mathbf{R}\}$ . Il primo di questi due ultimi insiemi si definisce orbita per lo specificato sistema dinamico e il secondo si definisce traiettoria per lo specificato sistema dinamico.

**Definizione 2.2.2.** Siano dati un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , un insieme  $\{g^t[x(0)], t \in \mathbf{Z}\}$  e un insieme  $\{(t, g^t[x(0)]), t \in \mathbf{Z}\}$ . Il primo di questi due ultimi insiemi si definisce orbita per lo specificato sistema dinamico e il secondo si definisce traiettoria per lo specificato sistema dinamico.

Ora, é possibile illustrare alcuni concetti relativi all'evoluzione temporale asintotica sia dei sistemi dinamici (2.1) che dei sistemi (2.2) mediante le seguenti definizioni (per i cui maggiori dettagli si veda [Eckmann J.-P., 1985], [Devaney R. L., 1986], [Brock W. A., 1989], [Medio A., 1992] e [Rinaldi S., 1993a]).

**Definizione 2.3.1.** Siano dati un sistema dinamico autonomo  $\dot{x}(t) = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente soluzione  $\phi[t, x(0)]$ , con  $x(0)$  prescelta condizione iniziale, un insieme chiuso e invariante per tale sistema  $A \subset \mathbf{R}^n$  e un insieme  $B \subset \mathbf{R}^n$ . L'insieme  $A$  si definisce attrattore per lo specificato sistema dinamico se soddisfa le due seguenti condizioni:

---

<sup>4</sup> Per una maggiore omogeneità di definizione si pone  $g^0[x] \stackrel{def}{=} x$ .

(2.3.1.1)  $A$  é indecomponibile, cioè per ogni coppia di insiemi aperti  $X'$ ,  $X'' \in \mathbf{R}^n$ , esiste un numero reale  $T > 0$  tale che

$$\phi(t, X') \cap X'' \neq \emptyset \forall t > T; \quad (2.4.1)$$

(2.3.1.2)  $A$  é attraente, cioè esiste un intorno aperto e invariante di  $A$ ,  $U$ , tale che

$$\phi[t, x(0)] \rightarrow a \in A \text{ quando } t \rightarrow +\infty \forall x(0) \in U. \quad (2.5.1)$$

L'insieme  $B$  si definisce bacino di attrazione per l'attrattore specificato dall'insieme  $A$  se soddisfa la seguente condizione:

$$B = \bigcup_{t \leq 0} \phi[t, U]. \quad (2.6.1)$$

**Definizione 2.3.2.** Siano dati un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , un insieme chiuso e invariante per tale sistema  $A \subset \mathbf{R}^n$  e un insieme  $B \subset \mathbf{R}^n$ . L'insieme  $A$  si definisce attrattore per lo specificato sistema dinamico se soddisfa le due seguenti condizioni:

(2.3.2.1)  $A$  é indecomponibile, cioè per ogni coppia di insiemi aperti  $X'$ ,  $X'' \in \mathbf{R}^n$ , esiste un numero reale  $T > 0$  tale che

$$g^t(X') \cap X'' \neq \emptyset \forall t > T; \quad (2.4.2)$$

(2.3.2.2)  $A$  é attraente, cioè esiste un intorno aperto e invariante di  $A$ ,  $U$ , tale che

$$g^t[x(0)] \rightarrow a \in A \text{ quando } t \rightarrow +\infty \forall x(0) \in U. \quad (2.5.2)$$

L'insieme  $B$  si definisce bacino di attrazione per l'attrattore specificato dall'insieme  $A$  se soddisfa la seguente condizione:

$$B = \bigcup_{t \leq 0} g^t[U]. \quad (2.6.2)$$

In termini qualitativi, l'insieme dei punti che specifica l'attrattore é individuabile mediante la conoscenza di un suo solo punto qualsiasi, poichè

l'orbita determinata assumendo come condizione iniziale tale punto "visita" ogni altro punto che specifica l'attrattore stesso (dalla, rispettivamente, (2.3.1.1) e (2.3.2.1)) e la traiettoria determinabile assumendo come condizione iniziale un punto opportunamente "vicino" all'attrattore tende a convergere asintoticamente verso l'attrattore stesso (dalla, rispettivamente, (2.3.1.2) e (2.3.2.2)). È quasi superfluo porre in evidenza come il mancato soddisfacimento, da parte dell'insieme  $A$ , della condizione relativa alla proprietà di attrazione (rispettivamente, (2.3.1.2) e (2.3.2.2)), faccia definire tale stesso insieme repulsore per lo specificato sistema dinamico. L'eventuale soddisfacimento delle condizioni, rispettivamente, (2.3.1.1), (2.3.1.2) e (2.3.2.1), (2.3.2.2), si sostanzia nell'esistenza di un luogo di equilibrio "asintotico" per il sistema dinamico in oggetto. In particolare, alcuni fra gli attrattori usualmente più trattati in letteratura sono quelli qui di seguito definiti (per maggiori dettagli si veda [Eckmann J.-P., 1985], [Devaney R. L., 1986], [Brock W. A., 1989], [Medio A., 1992] e [Rinaldi S., 1993a]).

**Definizione 2.4.1.** *Sia dato un sistema dinamico autonomo  $\dot{x}(t) = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente soluzione  $\phi[t, x(0)]$ , con  $x(0)$  prescelta condizione iniziale, e avente attrattore  $A$ . L'attrattore  $A$  si definisce punto di equilibrio, detto anche punto fisso, se risulta rappresentabile nella seguente forma*

$$A = \{x^* : f(x^*) = 0\}, \text{ card}(A) = 1 \quad (2.7.1)$$

dove

$\text{card}(\cdot)$ : indica l'operatore cardinalità.

L'attrattore  $A$  si definisce orbita periodica di periodo  $T$ , detto anche ciclo limite di periodo  $T$ , con  $T \in \mathbf{R}^+$ , se risulta rappresentabile nella seguente forma

$$A = \{\phi[t, x^*], t \in [0, T[, T \in \mathbf{R}^+ : \phi[t + kT, x^*] = \phi[t, x^*], \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \forall t \in [0, T[\}. \quad (2.8.1)$$

**Definizione 2.4.2.** *Sia dato un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente attrattore  $A$ . L'attrattore*

$A$  si definisce punto di equilibrio, detto anche punto fisso, se risulta rappresentabile nella seguente forma

$$A = \{x^* : g(x^*) = x^*\}, \text{ card}(A) = 1. \quad (2.7.2)$$

L'attrattore  $A$  si definisce orbita periodica di periodo  $T$ , detto anche punto periodico di periodo  $T$ , con  $T \in \mathbf{Z}^+$ , se risulta rappresentabile nella seguente forma

$$A = \{g^t(x^*), t = 0, 1, \dots, T-1, T \in \mathbf{Z}^+ : g^{t+kT}(x^*) = g^t(x^*), \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \forall t = 0, 1, \dots, T-1\}. \quad (2.8.2)$$

Un'interessante caratterizzazione del concetto di attrattore associato ad uno specificato sistema dinamico deterministico, é quella derivante dal possedimento, o meno, della proprietà di stabilità da parte delle traiettorie di questi sistemi dinamici, ovvero della "insensibilità", o meno, delle evoluzioni temporali di tali sistemi ad eventuali "perturbazioni". In particolare, si danno le seguenti definizioni (per i cui maggiori dettagli si veda [Rinaldi S., 1974], [Eckmann J.-P., 1985], [Devaney R. L., 1986], [Brock W. A., 1989], [Medio A., 1992] e [Rinaldi S., 1993a]).

**Definizione 2.5.1.** Sia dato un sistema dinamico autonomo  $\dot{x}(t) = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente soluzione  $\phi[t, x(0)]$ , con  $x(0)$  prescelta condizione iniziale, e avente attrattore  $A$ . Tale attrattore si definisce stabile nel senso di Lyapunov se esiste un  $\varepsilon > 0$  per il quale esiste un  $\delta > 0$  tale che, per ogni coppia di condizioni iniziali  $x(0), y(0) \in \mathbf{R}^n$  per le quali si ha che  $\|x(0) - y(0)\| < \delta$ , si ha

$$\|\phi[t, x(0)] - \phi[t, y(0)]\| < \varepsilon \forall t \in [0, +\infty[. \quad (2.9.1)$$

**Definizione 2.5.2.** [Medio A., 1992a] Sia dato un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente attrattore  $A$ . Tale attrattore si definisce stabile nel senso di Lyapunov se esiste un  $\varepsilon > 0$  per il quale esiste un  $\delta > 0$  tale che, per ogni coppia di

condizioni iniziali  $x(0), y(0) \in \mathbf{R}^n$  per le quali si ha che  $\|x(0) - y(0)\| < \delta$ , si ha

$$\|g^t[x(0)] - g^t[y(0)]\| < \varepsilon \quad \forall t = 0, 1, \dots \quad (2.9.2)$$

In termini qualitativi, due orbite distintamente determinate assumendo come rispettive condizioni iniziali due punti opportunamente “vicini” risultano sempre altrettanto opportunamente “vicine” nel corso della loro evoluzione temporale

**Definizione 2.6.1.** Sia dato un sistema dinamico autonomo  $\dot{x}(t) = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente soluzione  $\phi[t, x(0)]$ , con  $x(0)$  prescelta condizione iniziale, e avente attrattore  $A$ . Tale attrattore si definisce asintoticamente stabile nel senso di Lyapunov se soddisfa le due seguenti condizioni:

(2.6.1.1)  $A$  é una soluzione stabile per lo specificato sistema dinamico;

(2.6.1.2) esiste un  $\eta$  tale che, per ogni coppia di condizioni iniziali  $x(0), y(0) \in \mathbf{R}^n$  per le quali si ha che  $\|x(0) - y(0)\| < \eta$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi[t, x(0)] - \phi[t, y(0)]\| = 0. \quad (2.10.1)$$

**Definizione 2.6.2.** Sia dato un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente attrattore  $A$ . Tale attrattore si definisce asintoticamente stabile nel senso di Lyapunov se soddisfa le due seguenti condizioni:

(2.6.2.1)  $A$  é un attrattore stabile per lo specificato sistema dinamico;

(2.6.2.2) esiste un  $\eta$  tale che, per ogni coppia di condizioni iniziali  $x(0), y(0) \in \mathbf{R}^n$  per le quali si ha che  $\|x(0) - y(0)\| < \eta$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|g^t[x(0)] - g^t[y(0)]\| = 0. \quad (2.10.2)$$

In termini qualitativi, due traiettorie distintamente determinate assumendo come rispettive condizioni iniziali due punti opportunamente “vicini”, risultano sempre altrettanto opportunamente “vicine” nel corso della loro intera evoluzione temporale e, asintoticamente, convergenti.

In conclusione di questa sezione, é da porre in evidenza come gli aspetti definatori fin qui presentati, preliminari a quelli sia definatori che teorici relativi alle dinamiche non lineari complesse, siano prevalentemente inerenti alle proprietà qualitative dei sistemi dinamici deterministici, poichè, come si é venuto determinando in letteratura fino dai primi pionieristici lavori di Poincaré H., tali sistemi dinamici non lineari complessi risultano, in generale, meglio indagabili mediante tale approccio qualitativo.

### 3. CAOS DETERMINISTICO

In questa sezione si presentano degli aspetti definatori relativi sia alle dinamiche deterministiche non lineari complesse in regime caotico deterministico che agli attrattori associati a tali dinamiche, detti attrattori strani. In particolare, poichè in letteratura non esiste uniformità di pareri sugli aspetti definatori degli “oggetti” inerenti al caos deterministico, in questa sezione ci si rifà alle definizioni verso le quali c'è più diffuso consenso (per i cui maggiori dettagli si veda [Ruelle D., 1979], [Eckmann J.-P. *at al.*, 1985], [Bergé P., 1986] e [Medio A., 1992]).

(3.A.1) Dinamica in regime caotico e attrattore strano: siano dati un sistema dinamico autonomo  $\dot{x} = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : I \rightarrow I$ ,  $I \subset \mathbf{R}^n$ , avente soluzione  $\phi[t, x(0)]$ , con  $x(0)$  prescelta condizione iniziale, e un insieme invariante per lo specificato sistema dinamico,  $A \subset I$ . Tale sistema si definisce dinamica in regime caotico e l'insieme  $A$  si definisce attrattore strano per lo specificato sistema dinamico, se quest'ultimo insieme soddisfa le tre seguenti condizioni:

(3.A.1.1)  $A$  è un attrattore per lo specificato sistema dinamico;

(3.A.1.2)  $\phi[\cdot, \cdot]$  mostra dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, cioè, dati  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente piccolo e  $\delta > 0$  opportunamente grande, per ogni coppia di punti  $x, y \in I$  tali che  $\|x - y\| < \varepsilon$ , esiste un numero reale  $T > 0$  tale che

$$\|\phi[T, x] - \phi[T, y]\| > \delta; \quad (3.1.1)$$

(3.A.1.3) l'insieme  $P$  dei punti periodici associati allo specificato sistema dinamico è denso in  $I$ , cioè

$$\overline{P} = I \quad (3.2.1)$$

dove

$\overline{P}$ : chiusura di  $P$ .

(3.A.2) Dinamica in regime caotico e attrattore strano: siano dati un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : I \rightarrow I$ ,  $I \subset \mathbf{R}^n$ , e un insieme invariante per lo specificato sistema dinamico,  $A \subset I$ . Tale sistema si definisce dinamica in regime caotico e l'insieme  $A$  si definisce attrattore strano per lo specificato sistema dinamico, se quest'ultimo insieme soddisfa le tre seguenti condizioni:

(3.A.2.1)  $A$  è un attrattore per lo specificato sistema dinamico;

(3.A.2.2)  $g[\cdot]$  mostra dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, cioè, dati  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente piccolo e  $\delta > 0$  opportunamente grande, per ogni coppia di punti  $x, y \in I$  tali che  $\|x - y\| < \varepsilon$ , esiste un numero intero  $T > 0$  tale che

$$\|g^T(x) - g^T(y)\| > \delta; \quad (3.1.2)$$

(3.A.2.3) l'insieme  $P$  dei punti periodici associati allo specificato sistema dinamico è denso in  $I$ , cioè

$$\overline{P} = I \quad (3.2.2)$$

dove

$\overline{P}$ : chiusura di  $P$ .

In termini qualitativi, l'insieme dei punti che specifica tale luogo di equilibrio, detto attrattore strano, è contenuto in  $I$  e, dunque, ivi limitato e non è decomponibile in luoghi d'equilibrio più semplici o elementari (dalle, rispettivamente (3.A.1.1) e (3.A.2.1)), tale insieme è non numerabile (dalle, rispettivamente, (3.A.3.1) e (3.A.3.2)) ed, infine, le traiettorie di avvicinamento a tale luogo di equilibrio, a partire da due distinti stati iniziali del sistema arbitrariamente vicini, tendono a divergere altrettanto arbitrariamente, rimanendo comunque in  $I$  (dalle, rispettivamente, (3.A.2.1) e (3.A.2.2)). In particolare, quest'ultima caratteristica ha evidenti riflessi applicativi poichè, se la dinamica di un sistema economico-finanziario è descrivibile mediante un sistema dinamico caotico noto, la precisa conoscenza

della traiettoria futura di tale sistema é indissolubilmente legata alla precisa conoscenza dello stato iniziale del sistema stesso. Una qualunque differenza, seppur piccola a piacere, del valore “misurato” dello stato iniziale da quello “vero”, si rifletterà in una progressiva divergenza (seppur limitata) della traiettoria “calcolata” da quella “vera”. Tale peculiarità risulta figurativamente esemplificata in quanto di seguito riportato: *“Il caos mescola le orbite nello spazio degli stati esattamente come un fornaio impasta il pane. Ci si può immaginare ciò che accade alle traiettorie vicine su un attrattore caotico versando nella pasta una goccia di colorante blu. L’impastatura é una combinazione di due azioni: lo stendimento della pasta, che fa diffondere il colorante, e il ripiegamento della pasta su se stessa. Dapprima la chiazza di colorante semplicemente si allunga, ma poi viene ripiegata e dopo un tempo piuttosto lungo si trova stirata e ripiegata molte volte. Osservando da vicino, si vede che l’impasto consiste in molti strati, alternativamente blu e bianchi. Già dopo 20 passaggi la lunghezza della macchia é aumentata di più di un milione di volte e il suo spessore si è assotigliato fino a dimensioni molecolari. Il colorante blu é completamente mescolato con l’impasto. Il caos agisce allo stesso modo, ma invece di mescolare pasta mescola lo spazio degli stati.”* [Crutchfield J. P. et al., 1987].

In relazione alla (3.A.1) e alla (3.A.2) é da porre in evidenza quanto segue:

(3.1) é possibile verificare che un sistema dinamico autonomo che può risultare in regime caotico, a cui é associato come luogo d’equilibrio “asintotico” un attrattore strano, può anche risultare in regime “standard”, a cui può essere associato come luogo d’equilibrio asintotico un punto fisso, un’orbita periodica, ... (ad esempio si veda la sezione 2. del **CAPITOLO VIII**;

(3.2) é possibile verificare che i sistemi dinamici deterministici autonomi (2.1) possono risultare in regime caotico solo quando si verifica, contemporaneamente, che  $f[\cdot] : I \rightarrow I$  é non lineare e che  $n \geq 3$  (ad esempio si veda [May R., 1976], [Bergé P., 1986], [Medio A., 1992] e [Rinaldi S., 1993b]). In particolare, la non linearità é richiesta poichè é possibile verificare che il “percorso” di tali sistemi dinamici da un regime “standard” ad un regime caotico é specificato dalla comparsa di biforcazioni, ovvero di “situazioni” in corrispondenza delle quali si verifica un determinato cambiamento qualitativo

dell'attrattore associato al sistema indagato (ad esempio, da punto fisso a orbita periodica), cambiamenti qualitativi che, é anche possibile verificare, si possono avere solo in corrispondenza di sistemi dinamici deterministici non lineari;

(3.3) é possibile verificare che i sistemi dinamici deterministici autonomi (2.2) possono risultare in regime caotico solo quando si verifica, contemporaneamente, che  $g[\cdot] : I \rightarrow I$  é, analogamente a quanto specificato nella precedente osservazione, non lineare e che  $n \geq 1$ .

#### 4. RILEVATORI DI "CAOTICITÀ DETERMINISTICA"

In generale, non risulta agevole determinare, o meno, la "caoticità deterministica" di una specificata dinamica non lineare mediante la diretta verifica formale del soddisfacimento, o meno, delle condizioni presentate, rispettivamente in (3.A.1) e in (3.A.2) (ad esempio si veda [Frank M. *et al.*, 1988]). Peraltro, risulta possibile determinare, o meno, indirettamente una tale caoticità mediante l'utilizzo di "oggetti" formali associati alle dinamiche deterministiche e capaci di rilevare alcuni degli aspetti teorici associati alle dinamiche deterministiche non lineari complesse. In particolare, i più importanti di tali aspetti sono la natura frattale dell'attrattore strano (ad esempio si veda [Rinaldi S., 1993a]) e la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali mostrata dal sistema specificato.

(4.A) Natura frattale dell'attrattore strano: in termini intuitivi e, per ciò stesso, non formalmente puntuali, la "frattalità" può essere presentata mediante la seguente elencazione delle sue principali peculiarità (per maggiori dettagli si veda [Mandelbrot B. B., 1987], [Devaney R. L., 1990], [Falconer K., 1990], [Mandelbrot B. B., 1990] e [Peitgen H.-O. *et al.* 1992]):

(4.A.1) gli oggetti frattali, di regola, risultano caratterizzati da una struttura fortemente irregolare e, non di rado, complessa;

(4.A.2) gli oggetti frattali, di regola, risultano caratterizzati da una struttura che presenta la stessa ricchezza di dettagli in qualunque scala d'osservazione;

(4.A.3) gli oggetti frattali, di regola, risultano caratterizzati da una struttura auto-somigliante in qualunque scala d'osservazione o, equivalentemente, da una omotetia interna;

(4.A.4) gli oggetti frattali, di regola, risultano costituiti da insiemi non numerabili di elementi;

(4.A.5) agli oggetti frattali, di regola, risultano associate dimensioni non intere ma frazionarie<sup>5</sup>.

In particolare, con riferimento a quest'ultima peculiarità, nel seguito di questa sezione si presentano sia degli aspetti definatori che degli aspetti teorici relativi ai concetti di misura più diffusamente impiegati nell'analisi degli oggetti frattali (per i cui maggiori dettagli si veda [Mandelbrot B. B., 1987] e [Falconer K., 1990]).

**Definizione 4.A.1.** *Siano dati uno spazio metrico  $\Omega$  avente dimensione  $n$ , con  $n \in \mathbb{N}^+$ , un suo insieme  $S$  tale che sia contenuto in un intorno sferico  $n$ -dimensionale  $I$  di  $\Omega$  avente raggio finito e un numero reale  $D$  tale che  $0 \leq D \leq n$ . Si approssimi  $S$  per eccesso mediante intorni sferici  $n$ -dimensionali  $I_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, N < +\infty$ , di  $\Omega$  aventi, rispettivamente, raggio  $\rho_i < \rho < +\infty$  tali che ciascun elemento di  $S$  sia situato in almeno uno di essi. Il numero reale  $D$  si definisce *dimensione di Hausdorff* di  $S$ , detta anche *dimensione di Hausdorff-Besicovitch* di  $S$ , e si indica con la notazione*

$$\dim_H(S) \stackrel{def}{=} D, \quad (4.1)$$

se risulta soddisfatta la seguente condizione

$$\gamma(d) \lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{1 \leq i \leq N} \sum_{i=1}^N \rho_i^d = \begin{cases} +\infty & \text{se } d < D \\ 0 & \text{se } d > D \end{cases}, \quad d > 0 \quad (4.2)$$

dove

$\gamma(d) = [\Gamma(0.5)]^d / \Gamma(1 + d/2)$ , con  $\Gamma(\cdot)$  funzione gamma, detta anche integrale Euleriano,

---

<sup>5</sup> Classici oggetti frattali sono l'insieme di Cantor, avente dimensione 0.6309, il "fiocco di neve" di von Koch, avente dimensione 1.2618 e la "spugna" di Sierpiński-Menger, avente dimensione 2.7268.

$\gamma(d)\rho_i^d$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ : volume  $n$ -dimensionale dell' $i$ -esimo intorno sferico  $n$ -dimensionale.

In relazione a tale definizione é da porre in evidenza quanto segue:

(4.A.1) é possibile verificare come la dimensione di Hausdorff, a differenza di altre, risulti definita per qualsiasi insieme;

(4.A.2) é possibile verificare come, se  $S$  é un insieme aperto tale che  $S \subset \Omega$ , allora si abbia  $\dim_H(S) = n$ ;

(4.A.3) é possibile verificare come, se  $S_1$  e  $S_2$  sono due insiemi tali che  $S_1, S_2 \subset \Omega$  e  $S_1 \subset S_2$ , allora si abbia  $\dim_H(S_1) \leq \dim_H(S_2)$ .

**Definizione 4.A.2.** Siano dati uno spazio metrico  $\Omega$  avente dimensione  $n$ , con  $n \in \mathbb{N}^+$ , un suo insieme  $S$  tale che sia contenuto in un intorno sferico  $n$ -dimensionale  $I$  di  $\Omega$  avente raggio finito, con  $0 < \rho < +\infty$  e un numero reale  $D$  tale che  $0 \leq D \leq n$ . Si approssimi  $S$  mediante intorni sferici  $n$ -dimensionali  $I_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, N(\rho) < +\infty$ , di  $\Omega$ , utilizzando il metodo che ne richieda il minor numero. Allora il numero reale  $D$  si definisce dimensione di box-counting di  $S$ , e si indica con la notazione

$$\dim_B(S) \stackrel{def}{=} D, \quad (4.3)$$

se risulta soddisfatta la seguente condizione

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \inf \frac{\ln N(\rho)}{\ln(1/\rho)} \right) = D = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \sup \frac{\ln N(\rho)}{\ln(1/\rho)} \right). \quad (4.4)$$

In relazione a tale definizione é da porre in evidenza quanto segue:

(4.A.4) é possibile verificare come la dimensione di box-counting, a differenza di altre, risulti definita per qualsiasi insieme;

(4.A.5) é possibile verificare come, se  $S_1$  e  $S_2$  sono due insiemi tali che  $S_1, S_2 \subset \Omega$  e  $S_1 \subset S_2$ , allora si abbia  $\dim_B(S_1) \leq \dim_B(S_2)$ .

É da notare come, nell'analisi degli oggetti frattali, raramente risultino utilizzate altre dimensioni capaci di cogliere la "frattalità", quali, ad esempio, la variante di Kolmogorov della dimensione di box-counting, la dimensione di Minkowski-Bouligand, ... (per i cui maggiori dettagli si veda [Mandelbrot B. B., 1987]), a causa delle difficoltà applicativo-computazionali loro inerenti.

(4.B) Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali mostrata da un sistema dinamico deterministico: in relazione alla dipendenza dalle condizioni iniziali mostrata da un generico sistema dinamico deterministico, in termini intuitivi e, per ciò stesso, non formalmente puntuali, si ha che l'insieme costituito da tutte le sue possibili condizioni iniziali tende a "convergere" asintoticamente al suo insieme attrattore. In particolare, poiché quest'ultimo insieme "occupa", di regola, una regione dello spazio degli stati più "piccola" di quella occupata dall'insieme costituito da tutte le sue possibili condizioni iniziali, si ha che, nel corso della specificata convergenza, anche la regione dello spazio degli stati "occupata" da quest'ultimo insieme si "contrae" al fine di convergere asintoticamente a quella occupata dal suo insieme attrattore. Tale contrazione si può realizzare secondo distinte modalità, principali, fra le quali, le seguenti:

(4.B.1) la regione dello spazio degli stati specificata si contrae contemporaneamente secondo tutte le  $n$  direzioni; a tale modalità di contrazione risulta associato come attrattore il punto fisso;

(4.B.2) la regione dello spazio degli stati specificata si contrae contemporaneamente secondo  $n - 1$  direzioni e non si contrae secondo la rimanente direzione; a tale modalità di contrazione risulta associato come attrattore l'orbita periodica;

(4.B.3) la regione dello spazio degli stati specificata, pur complessivamente contraendosi, si "stira" contemporaneamente secondo  $n_1 < n - 1$  direzioni, non si contrae secondo una direzione e si contrae secondo le rimanenti direzioni; a tale modalità di contrazione risulta associato come attrattore l'attrattore strano.

Gli aspetti teorici necessari a formalizzare quanto da ultimo premesso si presentano nella seguente definizione ( per i cui maggiori dettagli si veda [Benettin G. *et al.*, 1976], [Eckmann J.-P., 1985] e [Medio A., 1992]):

**Definizione 4.B.1.** Sia dato un sistema dinamico autonomo  $x(t + 1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : I \rightarrow I$ ,  $I \subset \mathbf{R}^n$ , e siano dati una coppia di punti  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in I$  e un numero intero  $j$ , con  $1 \leq j \leq n$ , tali che  $x_i = y_i$  se  $i \neq j$ . Si definiscono esponenti caratteristici di Lyapunov

per lo specificato sistema le seguenti quantità

$$\Lambda_j \stackrel{def}{=} \Lambda_j(x) \stackrel{def}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{y_j \rightarrow x_j} \frac{1}{t} \ln \frac{\|g^t(x) - g^t(y)\|}{|x_j - y_j|}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.5)$$

É da porre in evidenza come tale definizione sia anche valida in riferimento ai sistemi (2.1), poichè gli esponenti caratteristici di Lyapunov relativi a questi sistemi coincidono con quelli relativi agli stessi sistemi ai quali sia stata imposto che  $t \in \mathbf{Z}$  anzichè  $t \in \mathbf{R}$  (per maggiori dettagli si veda [Eckmann J.-P. *et al.*, 1985]). In termini qualitativi, questo indicatore permette di quantificare, in media, la dipendenza di un generico sistema dinamico autonomo dalle condizioni iniziali secondo la prescelta direzione, infatti, in termini approssimati si ha

$$\|g^t(x) - g^t(y)\| \cong |x_j - y_j| \exp(\Lambda_j t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6)$$

In particolare, le traiettorie che partono da due distinti stati iniziali del sistema dinamico,  $x$  e  $y$ , arbitrariamente vicini, lungo la direzione  $j$ -esima, con  $j = 1, 2, \dots, n$ , tendono a convergere se  $\Lambda_j < 0$ , a rimanere equidistanti se  $\Lambda_j = 0$  e a divergere se  $\Lambda_j > 0$ . Nel primo e nel secondo caso ( $\Lambda_j < 0$  e  $\Lambda_j = 0$ ) il sistema dinamico non mostra dipendenza sensibile alle condizioni iniziali; nel terzo caso ( $\Lambda_j > 0$ ) il sistema dinamico mostra dipendenza sensibile alle condizioni iniziali.

In relazione alla definizione (4.B.1) é da porre in evidenza quanto segue:

(4.B.1) é possibile verificare che, risultando soddisfatte date condizioni, si ha l'esistenza e la finitezza degli esponenti caratteristici di Lyapunov  $\Lambda_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, n$ , quasi ovunque relativamente ad una specificata misura di probabilità;

(4.B.2) é possibile verificare che, nel caso di sistemi dinamici deterministici autonomi lineari, gli esponenti caratteristici di Lyapunov  $\Lambda_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, n$ , si particularizzano nella parte reale degli autovalori associati a tale sistema (ad esempio si veda [Medio A., 1992]);

(4.B.3) é possibile verificare che, se allo specificato sistema dinamico deterministico indagato risulta associato un attrattore, allora si ha che

$\sum_{j=1}^n \Lambda_j < 0$ . In particolare, se tale attrattore é un punto fisso allora tutti gli  $n$  esponenti caratteristici di Lyapunov risultano negativi, se tale attrattore é un'orbita periodica allora  $n - 1$  esponenti caratteristici di Lyapunov risultano negativi ed il rimanente risulta uguale a zero, se tale attrattore é un attrattore strano allora  $n_1 < n - 1$  esponenti caratteristici di Lyapunov risultano positivi, uno risulta uguale a zero ed i rimanenti risultano negativi.

## 5. SULLA PREDICIBILITÀ DELLE DINAMICHE DETERMINISTICHE IN REGIME CAOTICO

In questa sezione si presentano degli aspetti teorici relativi alla predicibilità delle dinamiche deterministiche in regime caotico. In generale, secondo una diffusa concezione "Laplaciana", la "deterministicità" di uno specifico sistema dinamico comporta, *sic et simpliciter*, la sua esatta predicibilità relativamente ad un qualunque momento futuro (ad esempio si veda [Lambert K. *et al.*, 1981] e [Cramer F., 1994]). Peraltro, é possibile verificare come, in relazione ai sistemi dinamici deterministici in regime caotico, tale concezione, in generale, non risulti corretta. L'illustrazione di tale affermazione necessita previamente della seguente definizione (per i cui maggiori dettagli si veda [Benettin G. *et al.*, 1976], [Shaw R., 1984], [Eckmann J.-P. *et al.*, 1985], e [Medio A., 1992]).

**Definizione 5.1.** *Siano dati un sistema dinamico  $x(t + 1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : I \rightarrow I$ ,  $I$  insieme compatto, una misura di probabilità  $\mu(\cdot)$  su  $I$  e una partizione di  $I$   $\{I_i, i = 1, \dots, p < +\infty\}$ . Con la notazione  $g^{-t}[I_i]$ , con  $i = 1, 2, \dots, p$ , si indichi l'insieme  $\{x \in I : g^t[x] \in I_i\}$ , con la notazione  $I^{(t)}$  si indichi un'altra partizione  $\{\cup_{k=1}^t g^{-k}[I_i], i = 1, \dots, p < +\infty\}$  e con la notazione  $H(I^{(t)})$  si indichi la quantità  $\sum_{i=1}^p \mu\{\cup_{k=1}^t g^{-k}[I_i]\} \ln \mu\{\cup_{k=1}^t g^{-k}[I_1]\}$ . Si definisce entropia di Kolmogorov-Sinai la quantità*

$$h(\mu) \stackrel{def}{=} \lim_{d(I) \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} H(I^{(t)}) \quad (5.1)$$

dove

$d(I) \stackrel{def}{=} \max_{1 \leq i \leq p} \{\text{diam}(I_i)\}$ , dove  $\text{diam}(\cdot)$  indica l'operatore diametro.

È da porre in evidenza come tale definizione sia anche valida in riferimento ai sistemi (2.1), poichè l'entropia di Kolmogorov-Sinai relativa a questi sistemi coincide con quella relativa agli stessi sistemi ai quali sia stata imposto che  $t \in \mathbf{Z}$  anzichè  $t \in \mathbf{R}$  (per maggiori dettagli si veda [Eckmann J.-P. *et al.*, 1985]). L'entropia di Kolmogorov-Sinai permette di quantificare, in media, l'“informazione” distrutta o creata dal sistema dinamico deterministico indagato nel corso della sua evoluzione temporale<sup>5</sup>. In particolare, dato un generico sistema dinamico deterministico, si considerino due sue distinte traiettorie aventi, come rispettive origini, due condizioni iniziali arbitrariamente distanti che, dunque, forniscono distinte informazioni relativamente allo spazio degli stati. Nel caso in cui tali traiettorie risultino asintoticamente convergenti, le rispettive informazioni da loro fornite sullo spazio degli stati differiscono sempre meno al fluire del tempo e, asintoticamente, coincidono: il sistema considerato distrugge informazione nel corso della sua evoluzione temporale ( $h(\mu) < 0$ ). Nel caso in cui tali traiettorie risultino “parallele” le rispettive informazioni da loro fornite sullo spazio degli stati differiscono sempre ugualmente al fluire del tempo: il sistema considerato non distrugge e non crea informazione nel corso della sua evoluzione temporale ( $h(\mu) = 0$ ). Infine, nel caso in cui tali traiettorie risultino “indipendenti”, le rispettive informazioni da loro fornite sullo spazio degli stati differiscono sempre variabilmente al fluire del tempo: il sistema considerato crea informazione nel corso della sua evoluzione temporale ( $h(\mu) > 0$ ). È quasi superfluo porre in evidenza come i sistemi dinamici deterministici per i quali si verifica che  $h(\mu) < 0$  o, equivalentemente, che l'informazione contenuta nell'eventuale differenza, seppur grande a piacere, del valore “misurato” della condizione iniziale da quello “vero” viene asintoticamente ridotta o mantenuta, risultano predicibili, mentre quelli per i quali che  $h(\mu) > 0$  o, equivalentemente,

---

<sup>5</sup> Al fine di esprimere in bits l'informazione distrutta o creata dal sistema indagato, la quantità  $H(I^{(t)})$  deve essere calcolata utilizzando il logaritmo in base 2 anzichè quello in base  $e$ .

che l'informazione contenuta nell'eventuale differenza, seppur piccola a piacere, del valore "misurato" della condizione iniziale da quello "vero" viene continuamente variata, risultano predicibili solo nel breve periodo.

Ora, relativamente all'entropia di Kolmogorov-Sinai relativa ad uno specificato sistema deterministico, è possibile verificare che tra quest'ultima e gli esponenti caratteristici di Lyapunov associati allo stesso sistema dinamico deterministico si ha la seguente relazione:

$$h(\mu) \leq \sum_{j=1}^n \Lambda_j^+ \quad (5.2)$$

dove

$\Lambda_j^+$ ,  $j = 1, \dots, n$ : esponenti caratteristici di Lyapunov positivi, relazione che si particolarizza nella seguente

$$h(\mu) = \sum_{j=1}^n \Lambda_j^+ \quad (5.3)$$

se e solo se la misura di probabilità  $\mu(\cdot)$  risulta assolutamente continua secondo le direzioni dello spazio degli stati a cui risultano associati i  $\Lambda_j^+$ , con  $j = 1, 2, \dots, n$  (per maggiori dettagli si veda [Eckmann J.-P. *et al.*, 1985] e [Medio A., 1992]). In particolare, da entrambe le relazioni da ultime introdotte si ha che i sistemi dinamici deterministici a cui risulta associato come attrattore o un punto fisso o un'orbita periodica e, dunque, aventi, rispettivamente, o tutti gli  $n$  esponenti caratteristici di Lyapunov negativi o  $n - 1$  positivi ed il rimanente uguale a zero risultano predicibili poichè  $h(\mu) \leq 0$ ; specificamente dalla sola relazione (5.2) si ha che i sistemi dinamici deterministici a cui risulta associato come attrattore un attrattore strano e, dunque, aventi  $n_1 < n - 1$  esponenti caratteristici di Lyapunov positivi, uno uguale a zero ed i rimanenti negativi, possono, o meno, risultare predicibili in corrispondenza del rispettivo verificarsi o che  $h(\mu) \leq 0 < \sum_{j=1}^n \Lambda_j^+$ , o che  $0 < h(\mu) \leq \sum_{j=1}^n \Lambda_j^+$ ; infine, specificamente dalla sola relazione (5.3), si ha che questi ultimi sistemi risultano predicibili solo nel breve periodo poichè  $0 < h(\mu) = \sum_{j=1}^n \Lambda_j^+$ . Anche in questo senso le dinamiche deterministiche

non lineari complesse manifestano proprietà analoghe a quelle caratterizzanti le dinamiche stocastiche.

## 6. VERIFICHE NUMERICHE

In questa sezione si presentano gli aspetti applicativi ed i risultati di una semplice verifica numerica della dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali da parte dei sistemi dinamici deterministici in regime caotico. In un primo momento si é specificata una dinamica capace di “manifestare” caoticità deterministica mediante la scelta della seguente mappa, detta equazione logistica,

$$x(t+1) = \alpha x(t)[1 - x(t)] \quad (6.1)$$

dove

$\alpha$ : parametro,

considerata, in letteratura, la più semplice dinamica capace di risultare in regime caotico (ad esempio si veda [May R. M., 1976]) e la si é puntualizzata fissando il valore del parametro  $\alpha$  a 3.9. In un secondo momento si sono puntualizzati il valore “vero” e quelli “misurati” della condizione iniziale come  $x(0) = 0.25$  e  $x_i^-(0) = 0.25(1 - 1E - i)$ ,  $x_i^+(0) = 0.25(1 + 1E - i)$ , con  $i = 1, 2, \dots, 5$ . Infine, in un terzo momento si sono generate le serie temporali, rappresentabili come segue, corrispondenti al valore “vero” e a quelli “misurati” delle condizioni iniziali

$$\underline{x} = \{x(k), k = 0, 1, \dots, 24 : x(0) = 0.25, x(k+1) = 3.9x(k)[1 - x(k)]\}, \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \underline{x}_i^- &= \{x(k), k = 0, 1, \dots, 24 : x_i^-(0) = 0.25(1 - 1E - i), \\ & x(k+1) = 3.9x(k)[1 - x(k)]\}, \quad i = 1, 2, \dots, 5, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \underline{x}_i^+ &= \{x(k), k = 0, 1, \dots, 24 : x_i^+(0) = 0.25(1 + 1E - i), \\ & x(k+1) = 3.9x(k)[1 - x(k)]\}, \quad i = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dai risultati le cui esemplificazioni grafiche sono riportate dalla dalla Figura 1 alla Figura 5 é possibile sia rilevare come lo specificato sistema dinamico deterministico in regime caotico risulti, in generale, predicibile nel breve periodo, che rilevare come, per la relazione (4.6), la predicibilità di tale sistema aumenti al diminuire della differenza tra il valore “vero” e quelli “misurati” della condizione iniziale.



Figura 1

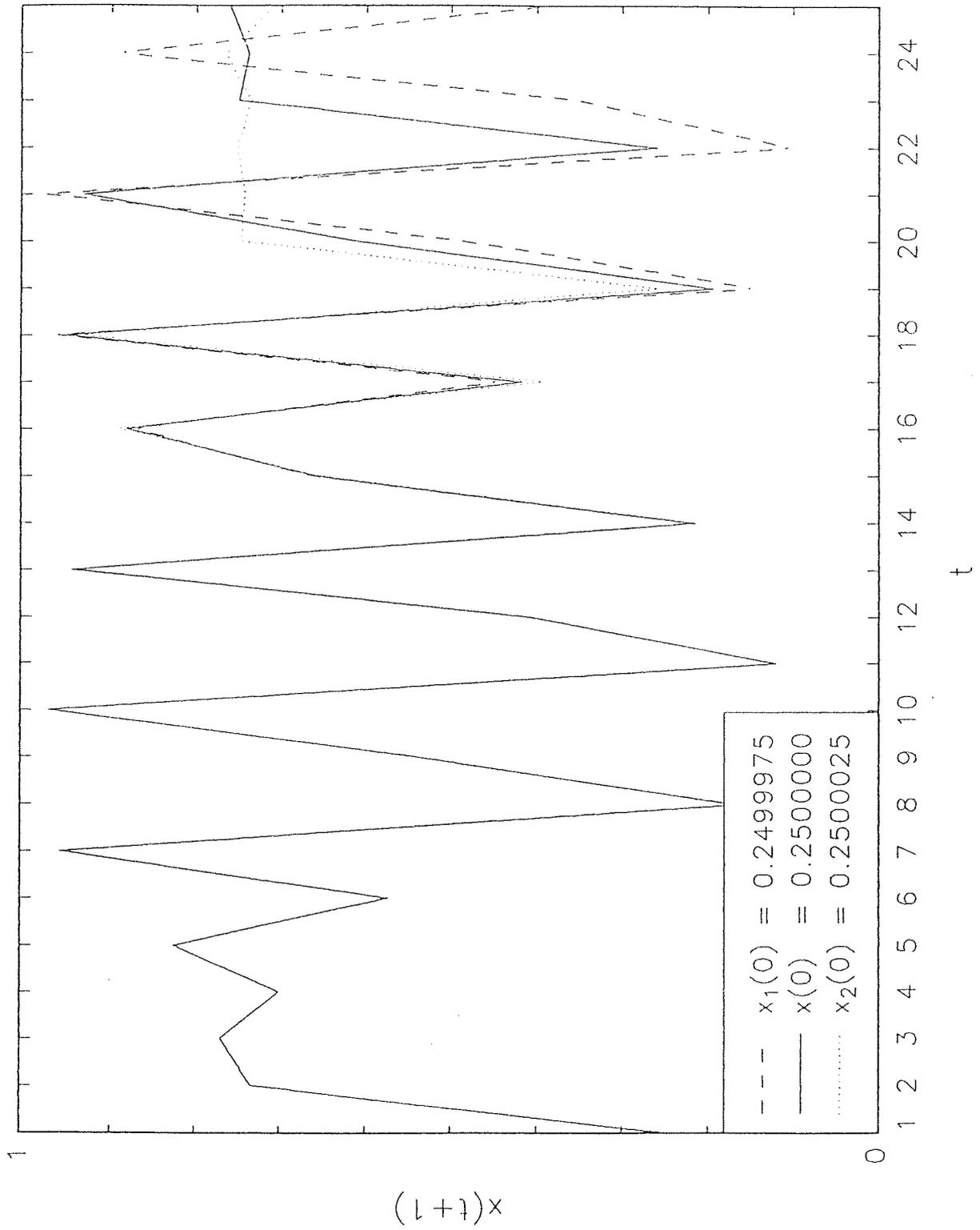


Figura 2

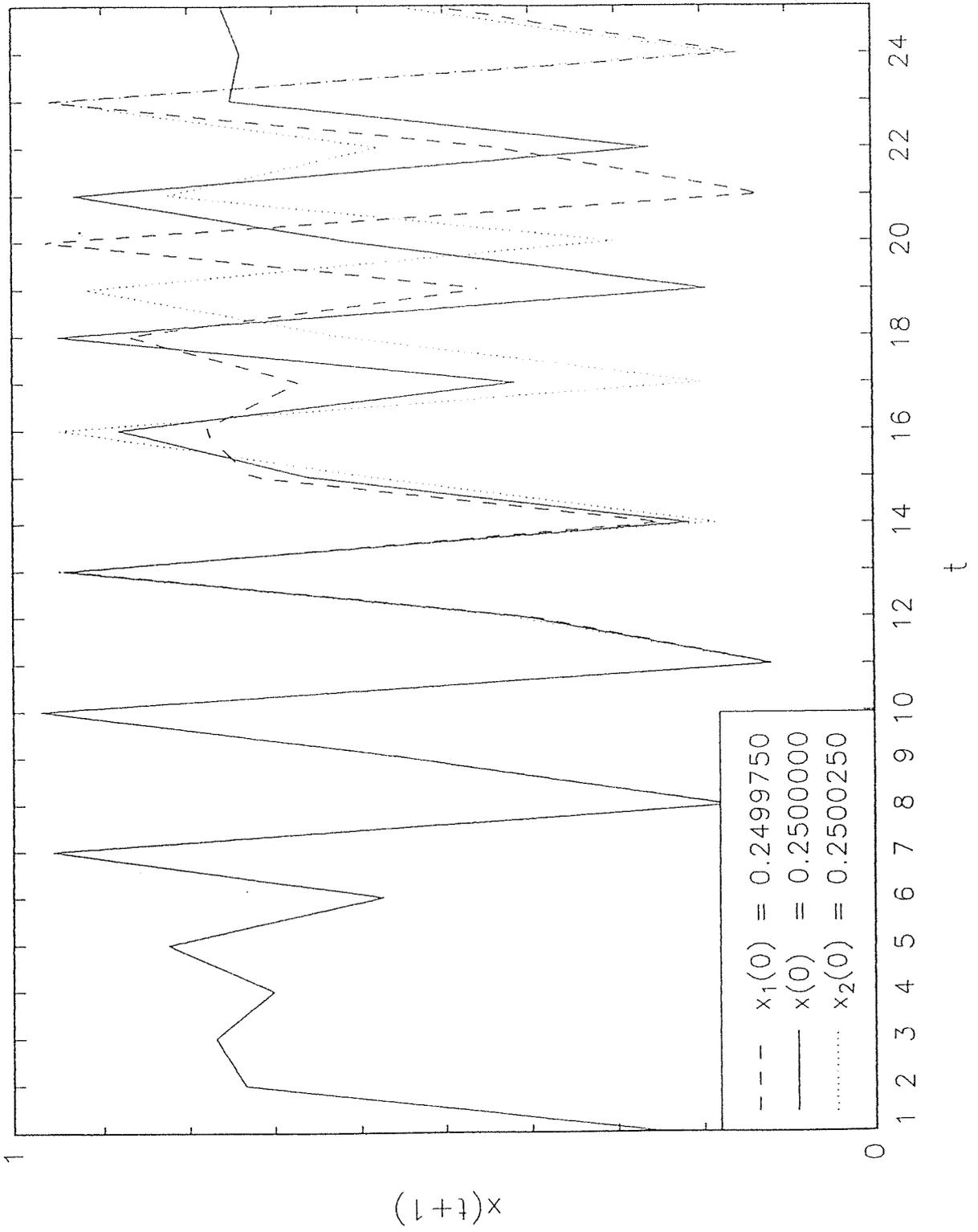


Figura 3

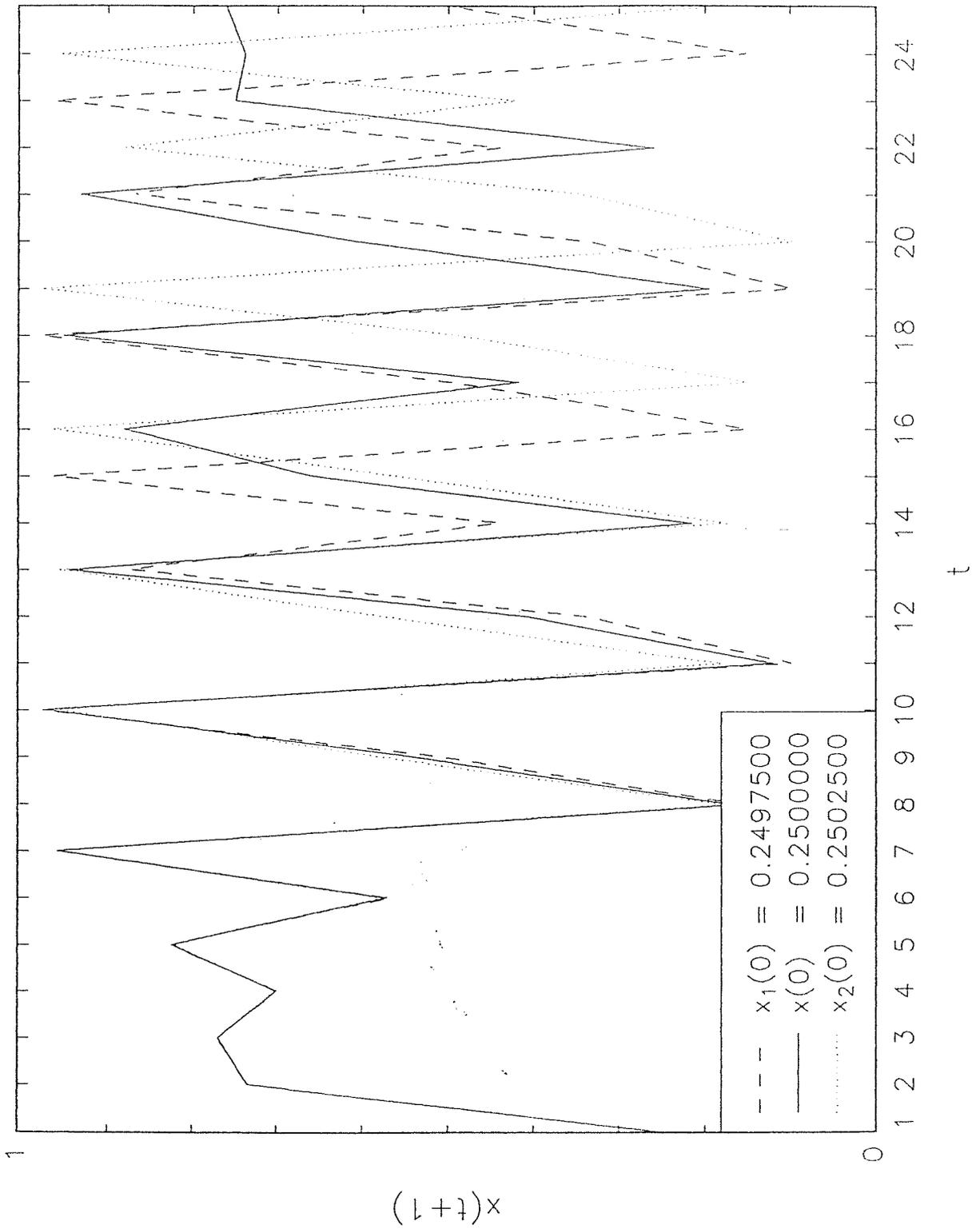


Figura 4

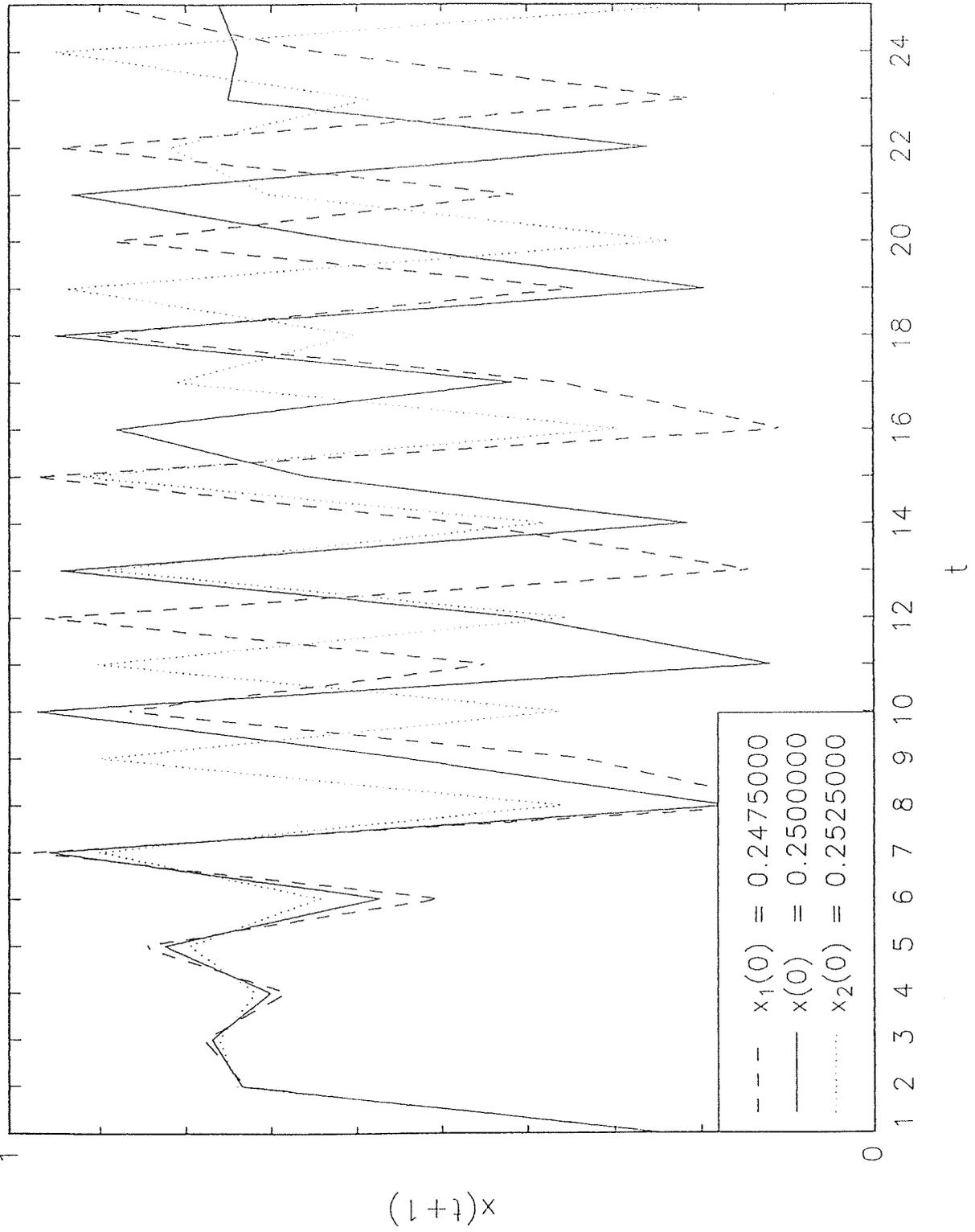


Figura 5

