Department of Applied Mathematics, University of Venice

QUADERNI DI DIDATTICA

Marta Cardin Paola Ferretti

Stefania Funari

Introduzione soft alla matematica per l'economia e la finanza: I SISTEMI LINEARI

Quaderno di Didattica n. 25/2008
Febbraio 2008

Introduzione soft alla matematica per l'economia e la finanza:
I SISTEMI LINEARI

Marta Cardin
<mcardin@unive.it>

Paola Ferretti
<ferretti@unive.it>

Stefania Funari
<funari@unive.it>

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia

(Febbraio 2008)

Sistemi di equazioni lineari

1 Introduzione allo studio dei sistemi lineari

Questo quaderno è dedicato allo studio dei sistemi lineari che, come si vedrà sono utili per modellizzare problemi di diversa natura. Vengono presentati qui di seguito alcuni semplici esempi.

Un problema geometrico.
Si voglia determinare l'intersezione di due rette di cui sia nota l'equazione. Si tratta quindi di risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

Al variare dei parametri, è noto che il problema precedente può avere una sola soluzione (rette incidenti), infinite soluzioni (rette coincidenti), nessuna soluzione (rette parallele).

Un problema di dieta.
Si supponga di voler preparare una colazione con pane, latte e marmellata in modo da ottenere 450 calorie, 17 grammi di proteine, 10 grammi di grasso, 120 grammi di carboidrati. La seguente tabella riporta il numero di calorie, le proteine (espresse in grammi), i grassi (espressi in grammi) e i carboidrati (espressi in grammi), fornite da ogni grammo di alimento.

	Latte	Pane	Marmellata
calorie	0.42	4.08	3.05
proteine	0.03	0.09	0.006
grassi	0.02	0.08	0.002
carboidrati	0.05	0.70	0.58

Se si indicano con x_1, x_2, x_3 rispettivamente il numero di grammi dei tre alimenti latte, pane e marmellata, quella che cerchiamo non è altro che la soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} 0.42x_1 & + & 4.08x_2 & + & 3.05x_3 & = & 450 \\ 0.03x_1 & + & 0.09x_2 & + & 0.006x_3 & = & 17 \\ 0.02x_1 & + & 0.08x_2 & + & 0.002x_3 & = & 10 \\ 0.05x_1 & + & 0.70x_2 & + & 0.58x_3 & = & 120 \end{cases}$$

Un problema di trasporto.
Si supponga di avere due fabbriche (A_1, A_2) che producono ogni giorno 110 e 220 quantità di un determinato bene, che deve essere fornito a due rivenditori (B_1, B_2) che richiedono il bene in quantità pari rispettivamente a 175 e 155. Se si indicano con x_1, x_2 le quantità di prodotto che dalla fabbrica A_1 saranno trasportate, rispettivamente, ai rivenditori B_1, B_2 e con x_3, x_4 le quantità di prodotto che dalla fabbrica A_2 saranno trasportate rispettivamente ai rivenditori B_1, B_2, dovranno essere soddisfatte le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 110 \\ x_3 & + & x_4 & = & 220 \\ x_1 & + & x_3 & = & 175 \\ x_2 & + & x_4 & = & 155 \end{cases}$$

Dagli esempi precedenti si può vedere che pur trattando problemi di diversa natura, si arriva ad una traduzione matematica dei problemi stessi che consiste in un sistema di equazioni lineari. Si vuole quindi affrontare il problema della formalizzazione del concetto di sistema lineare. Per scrivere un generico sistema di equazioni lineari è opportuno usare alcuni simboli per indicare il numero delle equazioni, il numero delle incognite, i dati del problema e le incognite. Se m è il numero delle equazioni, n il numero delle incognite $x_1, x_2, \dots x_n$, un generico sistema di equazioni lineari può scriversi come

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots\dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots\dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots\dots & & \dots\dots & & \dots\dots & & \dots\dots & = & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots\dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Risulta importante osservare che gli elementi che caratterizzano il sistema sono i dati del problema, rappresentati dai coefficienti a_{ij} e b_i, con $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.
Al fine di risolvere un sistema di equazioni lineari si potrebbero utilizzare alcune tecniche elementari; questo però va bene solamente per sistemi come quelli degli esempi precedentemente illustrati in cui non è elevato il numero delle equazioni o delle incognite. Il nostro scopo però è quello di una trattazione teorica che possa applicarsi ad un generico sistema. Per fare questo dobbiamo introdurre alcuni "oggetti" matematici come i vettori e le matrici.

2 Vettori ed operazioni tra vettori

Esistono molte situazioni che ci inducono a considerare liste ordinate di numeri reali, le cui componenti possono assumere diversi significati: prezzo di vendita di un determinato articolo, quantità acquistata di una determinata merce, numero mensile di arrivi in un comprensorio turistico. In riferimento agli esempi proposti nel paragrafo precedente, le componenti possono rappresentare le coordinate dell'eventuale/i punto/i di intersezione di due rette, i quantitativi espressi in grammi di alcuni alimenti (ad esempio latte, pane, marmellata) che costituiscono una dieta alimentare, le quantità di un bene trasportate dai luoghi di produzione ai punti vendita.

Vogliamo quindi considerare ennuple del tipo

$$(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n), \quad x_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, n$$

che costituiscono, per definizione, gli elementi del prodotto cartesiano $\mathbb{R}^n$.
La ennupla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ si chiama *vettore* e gli elementi $x_k \in \mathbb{R}$ costituiscono le sue *componenti*. Risulta spesso utile rappresentare un vettore con gli elementi disposti su una colonna ponendo $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Dati due vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ di $\mathbb{R}^n$, si definisce somma dei vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, indicata con $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, il vettore

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

Esempio Siano $\mathbf{x} = (-3, 4, 0, 2)$ e $\mathbf{y} = (-1, -4, 1, 6)$ due vettori di $\mathbb{R}^4$. Si ha

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (-3 - 1, 4 - 4, 0 + 1, 2 + 6) = (-4, 0, 1, 8)$$

Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$; valgono le proprietà

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
- $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$
- $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

dove $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$ è il *vettore nullo* e $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$ è *l'opposto* del vettore $\mathbf{x}$.

L'operazione di addizione fra vettori gode quindi delle stesse proprietà dell'addizione fra numeri reali; la prima è la proprietà commutativa dell'addizione, la seconda è la proprietà associativa, mentre la terza e la quarta affermano, rispettivamente, l'esistenza dell'elemento neutro rispetto all'operazione di addizione e l'esistenza dell'elemento simmetrico.

Dato il numero reale a ed un vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ di $\mathbb{R}^n$, si definisce prodotto dello scalare $a \in \mathbb{R}$ per il vettore $\mathbf{x}$, indicato con $a\mathbf{x}$, il vettore ottenuto ponendo

$$a\mathbf{x} := (ax_1, ax_2, ..., ax_n)$$

Esempio Sia $a = 4$ e $\mathbf{x} = (1, 6, 1/2, -2)$. Si ha $a\mathbf{x} = 4(1, 6, 1/2, -2) = (4, 24, 2, -8)$

L'operazione di prodotto per uno scalare soddisfa proprietà analoghe a quelle del prodotto tra numeri reali.

Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e $a, b \in \mathbb{R}$; valgono le proprietà

- $a(b\mathbf{x}) = ab\mathbf{x}$
- $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$
- $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$
- $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$

Dati due vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ di $\mathbb{R}^n$, si definisce prodotto scalare di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ il numero reale

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

A differenza dell'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore che dà come risultato un vettore, il prodotto scalare di due vettori associa ad ogni coppia di vettori un numero reale.

Esempio Siano $\mathbf{x} = (3, 1, 5)$ e $\mathbf{y} = (2, 2, 4)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Si ha

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 28$$

Valgono le seguenti proprietà del prodotto scalare.

Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$; valgono le proprietà

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$
- $(a\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$

Si osservi, inoltre, che il prodotto scalare del vettore nullo per un generico vettore $\mathbf{x}$, dà come risultato 0

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Nell'esempio che segue viene proposto un semplice contesto nel quale le definizioni finora proposte trovano impiego.

Esempio Una ditta possiede due negozi, A e B, in cui si vendono quattro articoli. Siano $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^4$, con

$$\mathbf{x}_A = (1000, 1500, 2300, 800), \quad \mathbf{x}_B = (500, 2100, 600, 500)$$

i vettori delle vendite annuali (numero di unità vendute di ciascun articolo) rispettivamente nel negozio A e B. Sia

$$\mathbf{p} = (35000, 12000, 6000, 25000)$$

il listino prezzi (vettore dei prezzi unitari di ciascun articolo), che risulta indipendente dal tipo di negozio.

Per avere il consuntivo generale delle vendite, occorre determinare il vettore somma

$$\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B = (1500, 3600, 2900, 1300)$$

il cui generico elemento rappresenta il numero complessivo di unità vendute dalla ditta di un determinato articolo.
Il ricavo complessivo (in euro) per ciascun negozio si calcola invece sommando il ricavo ottenuto dalla vendita di ciascun articolo, ottenuto a sua volta moltiplicando il prezzo dell'articolo per il numero di unità vendute. In altre parole il ricavo complessivo per ciascun negozio si calcola effettuando il prodotto scalare

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_A &= 35000 \cdot 1000 + 12000 \cdot 1500 + 6000 \cdot 2300 + 25000 \cdot 800 = 86800000 \\
\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_B &= 35000 \cdot 500 + 12000 \cdot 2100 + 6000 \cdot 600 + 25000 \cdot 500 = 58800000
\end{aligned}$$

Supponiamo ora che la ditta aumenti i prezzi del 2% ($a = 0.02$) su tutto il listino; la nuova lista dei prezzi è

$$\mathbf{p}' := (1 + a)\mathbf{p} = 1.02(35000, 12000, 6000, 25000) = (35700, 12240, 6120, 25500)$$

ed il ricavo complessivo di ciascun negozio diventerebbe

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}_A := 88536000, \quad \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}_B := 59976000$$

3 Dipendenza ed indipendenza lineare

Diamo alcune definizioni che ci saranno utili in seguito.

Siano $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$ vettori di $\mathbb{R}^n$. Si dice che il vettore $\mathbf{w}$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$, se esistono r scalari $c_1, c_2, ..., c_r$ tali che

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_r\mathbf{v}_r.$$

Gli scalari $c_1, c_2, ..., c_r$ sono detti coefficienti della combinazione lineare.

Si considerino, ad esempio, i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (3, 3, -2)$. Si può verificare che il vettore $\mathbf{v}_3$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ ed è verificata l'equazione $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$. Se si considerano, invece, i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$, non è possibile scrivere alcuno dei vettori come combinazione lineare dei rimanenti.

Come verrà precisato nella definizione che segue, i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono detti linearmente dipendenti nel primo caso, linearmente indipendenti, nel secondo.

I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se è possibile scrivere almeno uno di essi come combinazione lineare dei rimanenti. Altrimenti, sono detti linearmente indipendenti.

Si può dimostrare il risultato che segue

I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se dall'uguaglianza

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$$

segue $c_1 = c_2 = ... = c_r = 0$. I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se l'uguaglianza precedente vale con almeno uno dei coefficienti c_k $(k = 1, ..., r)$ diverso da zero.

I termini *se e solo se* che compaiono nel risultato precedente giustificano l'utilizzo di quanto proposto come definizione alternativa dei concetti di indipendenza e dipendenza lineare.

Seguono alcune osservazioni generali:

i) Ogni insieme di vettori contenente il vettore nullo $\mathbf{0}$ è costituito da vettori linearmente dipendenti.

ii) Due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno è multiplo dell'altro.

iii) I vettori $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, \mathbf{e}_n = (0, \cdots, 0, 1)\}$ sono linearmente indipendenti (sono detti vettori fondamentali).

iv) Sottoinsiemi di insiemi di vettori linearmente indipendenti sono costituiti da vettori linearmente indipendenti.

v) Insiemi ottenuti aggiungendo vettori ad insiemi di vettori linearmente dipendenti sono costituiti da vettori linearmente dipendenti.

Osservazione importante Il problema di vedere se un insieme dato di vettori è linearmente dipendente o quello di stabilire se un vettore risulta combinazione lineare di altri vettori non sono problemi semplici. Infatti entrambi i problemi, come avremo modo di sottolineare anche in seguito, si traducono nella risoluzione di un sistema lineare di equazioni.
Si considerino ad esempio i vettori $\mathbf{v_1} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v_2} = (2, 1, 3)$ e $\mathbf{v_3} = (1, 0, 3)$ e supponiamo di voler stabilire se $\mathbf{v_3}$ è combinazione lineare di $\mathbf{v_1}$ e di $\mathbf{v_2}$. Si devono ricercare le

soluzioni dell'equazione:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

nelle incognite c_1 e c_2 che si può scrivere nella forma:

$$\begin{cases} c_1 & + & 2c_2 & = & 1 \\ -c_1 & + & c_2 & = & 0 \\ 2c_1 & + & 3c_2 & = & 3 \end{cases}$$

Più in generale, consideriamo gli $n+1$ vettori m-dimensionali:

$$\mathbf{v_1} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}),\ \mathbf{v_2} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}), \ldots\ldots, \mathbf{v_n} = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$$

e $\mathbf{w} = (b_1, b_2, ..., b_m)$ e consideriamo il problema di stabilire se $\mathbf{w}$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$. Risulta allora necessario studiare l'equazione:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + ... + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{w}$$

nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il problema può essere scritto anche nel seguente modo:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots\ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e quindi il problema iniziale che consisteva nello stabilire se il vettore $\mathbf{w}$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ si riconduce allo studio delle soluzioni del sistema precedente, costituito da m equazioni in n incognite (le componenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$).
Possiamo quindi concludere che anche nel caso più generale il problema si riconduce allo studio di un sistema lineare di equazioni e precisamente del sistema :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & = & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

4 Matrici ed operazioni tra matrici

In molti problemi concreti una lista di numeri non risulta sufficiente per descrivere lo stato del sistema mentre risulta utile rappresentare dati o informazioni con una collezione bidimensionale di numeri.

Una matrice è una tabella di numeri che dipendono da due informazioni che tengono conto della riga e delle colonna in cui si posizionano, come per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 117 \end{pmatrix}$$

La matrice scritta sopra è una matrice (4×3), cioè ha 4 righe e 3 colonne.
Si definisce quindi matrice di dimensione $m \times n$ una tabella di $m \cdot n$ numeri a_{ij}, detti elementi della matrice, disposti in m righe e n colonne, e si scrive

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mj} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o, in forma compatta,

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, ..., m; \; j = 1, 2, ..., n.$$

Gli elementi della matrice sono identificati da due indici di posizione, rispettivamente di riga e di colonna; a_{ij} rappresenta l'elemento di A nella riga i-esima e nella colonna j-esima.
Un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ può essere visto come una matrice con una sola riga (*vettore riga*) o come una matrice con un'unica colonna (*vettore colonna*), cioè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vogliamo ora caratterizzare alcuni tipi particolari di matrici.

Matrice quadrata

Una *matrice* è detta *quadrata* se il numero di righe è uguale al numero di colonne. In questo caso il numero delle righe (colonne) è detto ordine della matrice. La matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 12 & 3 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

è una matrice quadrata di ordine 3.

Matrice nulla

Si indica con **O** la *matrice nulla* di dimensione $m \times n$ definita da $a_{ij} = 0$ per ogni i, j.

Matrici diagonali

Data una matrice quadrata di ordine n si definisce *diagonale principale* di A l'insieme degli elementi di uguale indice

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ii}, \ldots, a_{nn}.$$

La diagonale principale della matrice di ordine 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è costituita dagli elementi $1, 8, -1$.
Si dicono *matrici diagonali* le matrici quadrate per le quali $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, cioè matrici con elementi fuori della diagonale principale tutti uguali a 0:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Le matrice A e B definite da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sono matrici diagonali.

Matrice identità

La matrice quadrata di ordine n diagonale con gli elementi sulla diagonale principale uguali a 1 si indica con I_n,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},$$

e viene detta *matrice identità* di ordine n.

Matrici triangolari

Sempre nel caso di matrici quadrate si definiscono *matrici triangolari superiori* le matrici in cui $a_{ij} = 0$ se $i > j$, cioè con elementi sotto la diagonale principale tutti uguali a 0:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Analogamente vengono definite le *matrici triangolari inferiori.*
Le seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 8 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

sono evidentemente matrici triangolari, la prima triangolare superiore la seconda triangolare inferiore.

Matrice trasposta

Data una matrice A di dimensione $m \times n$, si definisce *matrice trasposta* di A la matrice A^T di dimensione $n \times m$ ottenuta dalla matrice A scambiando ordinatamente le righe con le colonne, cioè la matrice $A^T = (b_{ij})$ ha elementi $b_{ij} = a_{ji}$.

Per esempio se $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ allora $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Matrice simmetrica

Una matrice quadrata A di ordine n che coincide con la sua matrice trasposta ($A = A^T$) si definisce *matrice simmetrica.* In altri termini, una matrice A è simmetrica se per ogni i, j, segue $a_{ij} = a_{ji}$.
Le matrici A, B e C definite da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 9 \\ 5 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

sono evidentemente matrici simmetriche .

Come nel caso dei vettori, possono essere definite operazioni che permettono di definire nuove matrici a partire da matrici assegnate. Tali operazioni possiedono molte (non tutte) delle proprietà che caratterizzano le analoghe operazioni definite sull'insieme dei numeri reali.

Date due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ di dimensione $m \times n$, si definisce somma di A e di B la matrice $A + B$ di dimensione $m \times n$ che si ottiene sommando gli elementi delle matrici A e B di uguale indice

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}), \quad i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n.$$

Dalla definizione proposta si deduce che due matrici si possno sommare solo se hanno la stessa dimensione.

Esempio Siano A e B matrici di dimensione 2×3, definite come segue,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & -2+6 & 3-2 \\ 2+0 & 0+2 & 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

L'operazione di somma tra matrici gode di proprietà analoghe a quelle già viste nel caso della somma tra vettori. Più precisamente

Siano A, B, C matrici di dimensione $m \times n$; valgono le proprietà

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \mathbf{O} = \mathbf{O} + A = A$
- $A + (-A) = \mathbf{O}$

dove $\mathbf{O}$ è la *matrice nulla* e $-A = (-a_{ij})$ è *la matrice opposta* della matrice A.

Esempio Sia

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha

$$A + \mathbf{O} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

L'operazione di moltiplicazione per uno scalare introdotta nel caso di vettori può essere estesa al caso delle matrici.

Dato il numero reale a e una matrice $A = (a_{ij})$ di dimensione $m \times n$, si definisce prodotto dello scalare a per la matrice A, la matrice aA che si ottiene moltiplicando tutti gli elementi di A per lo scalare a

$$aA := (aa_{ij}), \quad i = 1, 2, ..., m; \; j = 1, 2, ..., n.$$

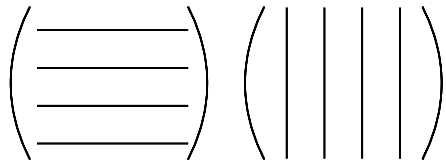
Esempio Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ allora $5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & -10 \\ 15 & 35 \end{pmatrix}$

Anche in questo caso valgono alcune semplici proprietà .

Se A, B, C sono matrici di dimensione $m \times n$ e $a, b \in \mathbb{R}$ allora

- $a(bA) = abA$
- $1A = A$
- $0A = \mathbf{O}$
- $a(A + B) = aA + aB$
- $(a + b)A = aA + bA$

Tutte le operazioni finora introdotte costituiscono una ovvia generalizzazione di quanto già proposto nel caso di vettori: le proprietà di cui esse godono sono le stesse. La definizione di prodotto scalare tra vettori può essere utilizzata per definire l'operazione di prodotto tra matrici, operazione che, come vedremo, permette di definire a partire da due assegnate matrici una nuova matrice, la matrice prodotto. Per moltiplicare due matrici possiamo vedere la prima come una collezione di righe e la seconda come una collezione di colonne con uno schema del tipo



ed eseguire il prodotto tra un vettore riga ed un vettore colonna in tutti i modi possibili riportando con ordine i risultati su una nuova matrice che verrà detta prodotto delle due. Chiaramente ciò risulta possibile solo se il numero delle colonne della prima matrice coincide con il numero di righe della seconda. Vediamo un esempio:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 5 & 1\cdot 3+2\cdot 7 \\ 3\cdot 2+4\cdot 1 & 3\cdot 0+4\cdot 5 & 3\cdot 3+4\cdot 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 10 & 17 \\ 10 & 20 & 37 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Diamo quindi la definizione di prodotto tra due matrici .

Data la matrice $A = (a_{ij})$ di dimensione $m \times n$ e la matrice $B = (b_{ij})$ di dimensione $n \times p$, si definisce prodotto delle matrici A e B la matrice $C = AB$ di dimensione $m \times p$ il cui generico elemento c_{ij} rappresenta il risultato del prodotto scalare fra la i-esima riga $\mathbf{a}_i^r$ della matrice A e la j-esima colonna $\mathbf{b}_j^c$ della matrice B

$$c_{ij} := \mathbf{a}_i^r \cdot \mathbf{b}_j^c = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,p.$$

Esempio Moltiplichiamo le seguenti matrici:

(i) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot 7 & (-1)\cdot 3+2\cdot(-1)+0\cdot 5 \\ 4\cdot 1+1\cdot 0+(-2)\cdot 7 & 4\cdot 3+1\cdot(-1)+(-2)\cdot 5 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) il prodotto $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -8 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ non risulta definito.

(iii) $\begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + (-\frac{1}{2}) \cdot (-1) & 4 \cdot 2 + (-\frac{1}{2}) \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$

Negli esempi proposti si vede che:

(i) Moltiplicando una matrice (2×3) con una matrice (3×2) si ha una matrice(2×2).
(iii) Moltiplicando una matrice (2×2) con una matrice (2×2) si ha una matrice(2×2).
(iv) Moltiplicando una matrice (2×2) con una matrice (2×1) si ha una matrice(2×1).

Più in generale il prodotto di una matrice di dimensione $(m \times n)$ con una matrice di dimensione $(n \times p)$ è una matrice di dimensione $(m \times p)$.

Consideriamo quindi alcune proprietà del prodotto tra matrici.

Siano A, B, C matrici le cui dimensioni consentono di eseguire i prodotti AB, AC e BC. Valgono le seguenti proprietà

- $AI_n = I_n A = A$ dove A è una matrice quadrata di ordine n;
- $(AB)C = A(BC)$;
- $(A + B)C = AC + BC$

dove I_n è la *matrice identità* di ordine n.

Esempio

$$\text{Siano} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot -2 \\ 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

ancora:

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$AC + BC = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

e possiamo notare che $(A + B)C = AC + BC$.

In generale l'operazione di moltiplicazione tra matrici non gode della proprietà commutativa come risulta anche dal seguente esempio.

Esempio Siano A e B matrici rispettivamente di ordine 2×3 e 3×2, definite come segue,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

mentre

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1(-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 4 \cdot 0 + 3(-1) & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 + 5(-1) & 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 17 \\ -5 & 2 & 19 \end{pmatrix}$$

e quindi $AB \neq BA$.

Non vale nemmeno la legge di annullamento del prodotto in quanto da $AB = \mathbf{O}$ non segue necessariamente che almeno una delle due matrici è la matrice nulla $\mathbf{O}$.

Esempio Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è facile verificare che $AB = \mathbf{O} = BA$.

Si osservi che nel caso delle matrici quadrate, la matrice identità svolge lo stesso ruolo svolto dal numero 1 nel caso del prodotto tra numeri reali. Inoltre nell'insieme dei numeri reali si definisce *inverso* o *reciproco* di un numero a, quel numero che moltiplicato per a dà come risultato il numero 1. Analogamente può essere definita la *matrice inversa* di una matrice quadrata.

Una matrice quadrata A si dice invertibile se esiste un'unica matrice B tale che

$$AB = I_n = BA.$$

In tal caso B è detta l'inversa di A e si indica con A^{-1}.

Il problema di stabilire se una matrice risulta invertibile non è semplice e lo risolveremo solo nel paragrafo 2.6. Le matrici non invertibili non sono necessariamente nulla, come risulta dal seguente esempio in cui viene proposto il caso di una matrice non nulla e non invertibile.

Esempio Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e B una matrice qualsiasi dello stesso ordine

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

risulta evidente che AB non può mai essere uguale alla matrice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi si può facilmente concludere che la matrice A non è invertibile.

Si osservi che nel caso di particolari matrici può risultare facile determinare la matrice inversa. Si pensi ad esempio alle matrici diagonali: si può verificare che una matrice diagonale A è invertibile se e solo se gli elementi a_{ij} sulla diagonale sono tutti non nulli. Inoltre in tal caso la matrice inversa è anch'essa una matrice diagonale con elementi uguali a $1/a_{ij}$.

Esempio Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa di A è data da

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

5 Matrici e sistemi di equazioni lineari

Consideriamo un elementare sistema di due equazioni in due incognite :

$$\begin{cases} 2x & + & y & = & 3 \\ 5x & + & 3y & = & 7 \end{cases}$$

e cerchiamo di rappresentarlo facendo riferimento alle matrici e al prodotto tra matrici. Cercheremo di risolverlo facendo riferimento ad un metodo che risulterà applicabile in ipotesi più generali.
Scriviamo quindi il sistema in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ e supponiamo di conoscere la matrice inversa di A , $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
Se premoltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per A^{-1} otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Quindi ricordando la definizione di matrice inversa, otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 7 \\ (-5) \cdot 3 + 2 \cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ottenendo quindi la soluzione $x = 2$ e $y = -1$.
Evidentemente il procedimento proposto poggia sull'ipotesi di esistenza della matrice inversa A^{-1} della matrice A.
La scrittura del sistema di equazioni lineari fatta facendo riferimento a matrici, vettori e al prodotto tra questi, è possibile anche nel caso più generale di m equazioni in n incognite. Infatti un generico sistema di m equazioni lineari in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & = & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

può essere scritto nella forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove $\mathbf{x}$ è un vettore (il vettore delle incognite) di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{b}$ un vettore di $\mathbb{R}^m$. Le informazioni che caratterizzano il sistema sono contenute nella matrice A e nel vettore $\mathbf{b}$.

Esempi Ritorniamo agli esempi proposti all'inizio del capitolo e scriviamo i sistemi lineari nella forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Nel problema dell'intersezione tra due rette si ha che :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -c \\ -f \end{pmatrix}.$$

Nel problema della dieta, la matrice e il vettore associati al sistema sono:

$$A = \begin{pmatrix} 0.42 & 4.08 & 3.05 \\ 0.03 & 0.09 & 0.006 \\ 0.02 & 0.08 & 0.002 \\ 0.05 & 0.70 & 0.58 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 450 \\ 17 \\ 10 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Infine, nel caso del problema di trasporto proposto valgono le seguenti uguaglianze:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 110 \\ 220 \\ 175 \\ 155 \end{pmatrix}.$$

Negli esempi proposti non sempre ha senso definire la matrice inversa A^{-1} della matrice A: infatti la matrice A può non essere invertibile o non essere quadrata. Nel caso dei sistemi di n equazioni in n incognite risulterà interessante andare a studiare il problema dell'invertibilità della matrice A: riusciremo così a risolvere con una tecnica analoga a quella vista nell'esempio all'inizio del paragrafo i sistemi lineari di n equazioni in n incognite la cui matrice risulta invertibile.

6 Determinante di una matrice

Si presentano in questo paragrafo la definizione e alcune proprietà del determinante di una matrice quadrata e si concentrerà in particolare l'attenzione sul risultato che lega il concetto di determinante a quello di vettori linearmente dipendenti e indipendenti; mentre nel paragrafo successivo si vedrà come attraverso il determinante sia possibile stabilire l'invertibilità o meno di una matrice.

Ad ogni matrice quadrata A è possibile associare un numero reale detto determinante, indicato in generale con il simbolo $\det(A)$ oppure $|A|$, attraverso il quale è possibile stabilire alcune proprietà della matrice. Prima di dare una regola per il calcolo del determinante, premettiamo alcune definizioni e introduciamo i relativi simboli.

Data una matrice quadrata A di ordine n, si definisce *minore complementare* dell'elemento a_{ij}, e si indica con M_{ij}, il determinante della matrice quadrata di dimensione $n-1$ che si ottiene dalla matrice A sopprimendo la riga di indice i e la colonna di indice j.
Si definisce *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij} il minore complementare dell'elemento a_{ij} o il suo opposto, a seconda che la somma degli indici $i+j$ sia un numero pari o dispari

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

La definizione di determinante di una matrice quadrata A di ordine n, può essere data per ricorrenza, il che significa che si calcola il determinante di una matrice di ordine n una volta noto il calcolo del determinante di matrici di ordine $n-1$.

Data una matrice quadrata A di ordine $n=1$, costituita dal solo elemento a, $A=(a)$, si definisce determinante di A, l'elemento a stesso

$$\det(A) = a.$$

Supposto noto il determinante di una qualsiasi matrice di ordine $n-1$, si definisce determinante di una matrice A di ordine n

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}$$

Il determinante di A si calcola sommando gli elementi della prima riga della matrice A moltiplicati per i loro complementi algebrici.

Nel caso particolare di una matrice quadrata di ordine $n=2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esempio Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

il determinante è dato da:

$$\det(A) = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 7.$$

Nel caso particolare di una matrice quadrata di ordine $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

si perviene alla seguente formulazione:

$$\det(A) = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Esempio Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

il calcolo del determinante conduce ai seguenti calcoli

$$\det(A) = 5\det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 1\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = -28.$$

La definizione proposta di determinante fa riferimento a quanto è noto come sviluppo di Laplace secondo la prima riga; si può però dimostrare che il determinante può essere calcolato, indifferentemente, mediante lo sviluppo su una qualunque riga o colonna di A.

Il determinante di una matrice quadrata A di ordine n è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una qualsiasi riga i per i rispettivi complementi algebrici:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$$

oppure dalla somma dei prodotti degli elementi di una qualsiasi colonna j per i rispettivi complementi algebrici:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$$

Nella scelta della riga o della colonna rispetto alla quale scrivere lo sviluppo di Laplace è utile verificare se vi sia una riga od una colonna che contiene il maggior numero di zeri e quindi fare riferimento a questa per la scrittura della formula, in modo da ridurre il calcolo.

Esempio Si consideri la matrice dell'esempio precedente:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

sviluppando il determinante secondo gli elementi della seconda riga si ottiene

$$\det(A) = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = -28.$$

Le matrici di grandi dimensioni in generale possono richiedere molte operazioni. Si osservi, ad esempio, che per calcolare il determinante di una matrice 5x5 è necessario calcolare in generale 60 $(5 \cdot 4 \cdot 3)$ determinanti di matrici quadrate di ordine 2 (si devono infatti calcolare 5 determinanti di matrici quadrate di ordine 4, ciascuno dei quali richiede il calcolo di 4 determinanti di matrici di ordine 3, a ciascuna delle quali è associato il calcolo del determinante di 3 matrici quadrate di ordine 2).

Per alcune tipologie di matrici, invece, il calcolo del determinante è immediato; si verifica infatti facilmente che il determinante delle matrici diagonali e delle matrici triangolari si ottiene moltiplicando fra loro gli elementi della diagonale principale:

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = d_1 \cdot d_2 \cdot d_n.$$

In particolare, il determinante della matrice identità è uguale ad uno

$$\det(I_n) = 1.$$

Si possono inoltre verificare le seguenti proprietà .

Siano A, B matrici quadrate di ordine n. Valgono le seguenti proprietà

- $\det(A^T) = \det(A)$;
- se A ha una riga (colonna) di zeri allora $\det(A) = 0$;
- se A ha due righe (colonne) uguali, allora $\det(A) = 0$;
- se gli elementi di una riga (colonna) di A sono moltiplicati per uno scalare k allora anche $\det(A)$ è moltiplicato per k;
- $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Si riporta adesso l'enunciato di un importante teorema che consente di tornare sulla nozione di dipendenza e indipendenza lineare.

Il determinante di una matrice quadrata A di ordine n è uguale a zero se e solo se gli n vettori colonna (o vettori riga) della matrice sono linearmente dipendenti.

Il teorema fornisce quindi una tecnica per stabilire se n vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti o indipendenti. Basta considerare una matrice ottenuta dall'accostamento degli n vettori, come colonne o come righe della matrice; se il determinante di tale matrice risulta uguale a zero i vettori sono linearmente dipendenti, altrimenti sono indipendenti. Il seguente esempio può essere chiarificatore.

Esempio Si vuole stabilire se i seguenti quattro vettori $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti o indipendenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si consideri la matrice quadrata A di ordine $n = 4$ ottenuta prendendo come colonne i vettori dati:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcola il determinante della matrice:

$$\det(A) = -2\det\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

Per il teorema precedente si può concludere che i vettori sono linearmente dipendenti.

Concludiamo enunciando due risultati che saranno richiamati nel paragrafo successivo.

Teorema di Binet Siano A, B matrici quadrate di ordine n. Allora il determinante della matrice prodotto AB è uguale al prodotto dei determinanti: $$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Il secondo risultato fornisce una risposta a cosa si ottiene se si sommano i prodotti degli elementi di una riga per i complementi algebrici di un'altra riga.

Sia A una matrice quadrata di ordine n. La somma dei prodotti degli elementi di una riga i per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga k è uguale a zero:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + ... + a_{in}A_{kn} = 0, \qquad i \neq k.$$

7 Il problema dell'invertibilità

Vogliamo cercare di determinare le condizioni che garantiscono l'invertibilità di una generica matrice di ordine 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Vale il seguente teorema che si dimostra con la risoluzione di un sistema di 4 equazioni in 4 incognite.

Una matrice A di ordine 2 è invertibile se e solo se

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

In tal caso la matrice inversa di A è

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Osservando la matrice ottenuta è facile comprendere una semplice regola di calcolo: per trovare l'inversa di A di ordine 2 basta scambiare tra loro gli elementi sulla diagonale principale, cambiare di segno gli altri elementi e dividere tutto per il determinante di A. Inoltre il teorema ci permette di affermare che condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità di una matrice quadrata di ordine 2 è che essa abbia determinante diverso da zero.
Il risultato appena visto si può estendere al caso di matrici di ordine qualunque.

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora A è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero ($|A| \neq 0$). Inoltre se tale condizione è verificata, la matrice A^{-1} ha elementi b_{ij} dati da

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}.$$

Dimostrazione Supponiamo dapprima che esista la matrice inversa A^{-1} tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Calcolando il determinante si ottiene

$$\det(AA^{-1}) = \det(A^{-1}A) = \det(I_n)$$

per il teorema di Binet e ricordando che $\det(I_n) = 1$ si può scrivere che

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(A^{-1})\det(A) = 1.$$

L'uguaglianza precedente può essere verificata solo se il determinante della matrice non si annulla, per cui si ottiene che $\det(A) \neq 0$.
Diamo adesso un procedimento di costruzione della matrice inversa che fornisce anche una dimostrazione della sua esistenza nel caso in cui il determinante della matrice sia diverso da zero. Si consideri la matrice quadrata A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e si costruisca la trasposta della matrice dei complementi algebrici degli elementi di A; si denoti tale matrice con A^* (matrice aggiunta):

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Si consideri il prodotto AA^* della matrice A per la matrice aggiunta. Lo sviluppo di Laplace del determinante ci permette di dire che gli elementi della diagonale principale della matrice prodotto AA^* sono uguali al determinante di A; tutti gli altri elementi della matrice prodotto AA^* sono invece uguali a zero, poichè la somma dei prodotti degli elementi di una riga della matrice A per i complementi algebrici di un'altra riga è nulla. La stessa cosa avverrebbe se si calcolasse il prodotto A^*A, quindi:

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A|I_n$$

Nell'ipotesi che il determinante della matrice A sia diverso da zero, possiamo dividere per il determinante e si ottiene:

$$A\left(\frac{A^*}{|A|}\right) = \left(\frac{A^*}{|A|}\right)A = I_n$$

Ricordando la definizione di matrice inversa, possiamo concludere che la matrice A è invertibile e si ha

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

per cui ricordando come è stata costruita la matrice aggiunta A^* si può scrivere il generico elemento b_{ij} della matrice inversa come

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}.$$

Si veda il seguente esempio che riassume quanto detto.

Esempio Sia

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poichè la matrice A ha determinante $|A| = -76$, per il teorema precedente la matrice A è invertibile. Inoltre i complementi algebrici associati alla matrice sono i seguenti:

$$A_{11} = \det\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -23, \quad A_{12} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2, \quad A_{13} = \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 6,$$

$$A_{21} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 8, \quad A_{22} = \det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4, \quad A_{23} = -\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -12,$$

$$A_{31} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = 13, \quad A_{32} = -\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = -22, \quad A_{33} = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -10.$$

Pertanto

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = -\frac{1}{76}\begin{pmatrix} -23 & 8 & 13 \\ -2 & 4 & -22 \\ 6 & -12 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/76 & -8/76 & -13/76 \\ 1/38 & -1/19 & 11/38 \\ -3/38 & 3/19 & 5/38 \end{pmatrix}.$$

8 Il Teorema di Cramer

Si consideri un generico sistema di n equazioni lineari in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & = & \ldots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

che, scritto in forma matriciale, ammette la formulazione $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{x}$ è il vettore delle incognite, $\mathbf{b}$ il vettore dei termini noti e A è la matrice $n \times n$ dei coefficienti del sistema.
Nel paragrafo 2.5 abbiamo risolto un sistema di due equazioni lineari in due incognite facendo riferimento alla matrice inversa A^{-1} della matrice dei coefficienti A.
La procedura utilizzata può essere generalizzata al caso in cui n non è necessariamente uguale a due: il teorema di Cramer presenta una condizione che caratterizza l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Teorema di Cramer Sia A una matrice di ordine n. Il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ un'unica soluzione se e solo se la matrice A ha determinante $|A| \neq 0$. In tal caso la soluzione $\mathbf{x}$ ha componenti x_i $(i = 1, \ldots, n)$ con

$$x_i = \frac{D_i}{|A|}$$

dove D_i è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i-esima con il vettore $\mathbf{b}$ dei termini noti

$$D_i = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione Supponiamo che la matrice A abbia determinante $|A| \neq 0$: allora esiste la matrice inversa A^{-1} e la soluzione del sistema $\mathbf{x}$ è data da

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Infatti se si premoltiplica $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ per A^{-1} si ottiene

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b},$$

da cui, sviluppando il primo membro, utilizzando la proprietà associativa dell'operazione di moltiplicazione fra matrici ed il fatto che $I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$, si ha

$$A^{-1}(A\mathbf{x}) = (A^{-1}A)\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

cioè
$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$
Quindi, se la matrice dei coefficienti A è invertibile, il sistema ammette un'unica soluzione e questa è data da $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.
Poichè
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$
segue che
$$\mathbf{x} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$
cioè
$$x_i = \frac{1}{|A|}\left(b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \ldots + b_nA_{ni}\right).$$
L'espressione tra parentesi rappresenta il determinante della matrice
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 & ... & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$
ottenuta da A sostituendo il vettore $\mathbf{b}$ alla colonna i.
Viceversa, se il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette una ed una sola soluzione, qualunque sia il vettore $\mathbf{b}$, nel caso particolare in cui $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, risolvere il sistema significa determinare quel vettore $\mathbf{x}$ tale che
$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$
Per ipotesi la soluzione $\mathbf{x}$ è unica: quindi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. In altre parole, $\mathbf{0}$ è l'unico vettore $\mathbf{x}$ tale che
$$x_1\mathbf{a}_1^c + x_2\mathbf{a}_2^c + \cdots + x_n\mathbf{a}_n^c = \mathbf{0}.$$
Ma allora le colonne di A sono linearmente indipendenti e quindi, ricordando una delle proprietà del determinante, $|A| \neq 0$.

Un sistema di equazioni lineari si dice *sistema di Cramer* se la matrice dei coefficienti A è una matrice quadrata di ordine n (il numero di equazioni è uguale al numero n delle incognite) con determinante diverso da zero (quindi A invertibile).

Esempio Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det(A) = -2 \neq 0$, la matrice è invertibile e la soluzione (unica) del sistema è data da

$$x_1 = \left(\frac{1}{-2}\right) \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{-2}\right) \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$x_3 = \left(\frac{1}{-2}\right) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

La soluzione del sistema così come proposta nell'enunciato del teorema permette di ottenere in un modo equivalente la soluzione $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

9 Il rango di una matrice

Nel paragrafo precedente abbiamo affrontato lo studio delle soluzioni di un sistema di n equazioni in n incognite e abbiamo riconosciuto che il calcolo del determinante $|A|$ della matrice dei coefficienti A e la verifica che $|A|$ sia diverso da zero garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione. Due questioni rimangono però aperte. La prima riguarda il caso in cui il determinante $|A|$ sia uguale zero; la seconda è relativa al caso in cui il numero di equazioni non sia necessariamente eguale al numero di incognite. Il concetto di rango di una matrice che andremo a definire ci aiuterà ad affrontare e a dare risposta a queste due questioni.
Come abbiamo visto, inoltre, il calcolo del determinante di una matrice dà informazioni relativamente alla possibile dipendenza lineare dei vettori riga e colonna che costituiscono la matrice. Infatti per poter riconoscere in modo semplice se n vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti o meno si calcola il determinante della matrice A ottenuta scrivendo i vettori come righe o colonne: se tale determinante è nullo, i vettori sono linearmente dipendenti, altrimenti sono linearmente indipendenti.
Chiaramente, il problema di riconoscere se m vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti o meno non può essere affrontato facendo riferimento al calcolo del determinante della matrice associata A (di dimensione $m \times n$ se i vettori sono scritti come vettori riga, di dimensione $n \times m$ se i vettori sono scritti come vettori colonna) ma, come vedremo suggerito dall'esempio che segue, facendo riferimento a sottomatrici quadrate che possono essere definite a partire dalla matrice A e al calcolo del loro determinante.

Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Evidentemente i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Se consideriamo le possibili sottomatrici di ordine 2 estraibili dalla matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

si ottengono le matrici

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ottenute cancellando, rispettivamente, la terza, la seconda, la prima riga.
Essendo quadrate, è possibile calcolare il loro determinante, ottenendo i valori

$$det(B_1) = 0, \qquad det(B_2) = 1, \qquad det(B_3) = 0.$$

Il determinante non nullo della matrice B_2 suggerisce che i due vettori non possono essere proporzionali: la presenza, quindi, di una sottomatrice di ordine 2 con determinante non nullo fa intuire che i due vettori siano linearmente indipendenti.
La procedura qui seguita può essere generalizzata al caso di m vettori di $\mathbb{R}^n$: si individueranno le sottomatrici quadrate estraibili dalla matrice A e verrà studiato il loro determinante. Nel caso di una matrice 3x4, ad esempio, è possibile individuare sottomatrici quadrate di ordine 1 , 2 , 3 e per tali sottomatrici è possibile calcolare il determinante. La definizione di *rango* o *caratteristica* di una matrice fa riferimento al calcolo dei determinanti delle possibili sottomatrici quadrate.

Il rango di una matrice A, indicato con il simbolo *r(A)*, corrisponde al massimo ordine di una matrice quadrata estraibile da A con determinante non nullo.

In altri termini, il rango di A è r se esiste una sottomatrice di ordine r con determinante diverso da zero e tutte le possibili sottomatrici quadrate di ordine maggiore hanno determinante uguale a zero.
Ad esempio dire che $r(A) = 2$ se A è una matrice 3×4, significa affermare che esiste almeno una sottomatrice quadrata di ordine 2 con determinante non nullo e tutte le sottomatrici di ordine 3 hanno determinante uguale a zero.

Esempio Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poichè A è una matrice di dimensione 3×4, la massima dimensione di una sua sottomatrice quadrata è 3. Pertanto $r(A) \leq 3$.

Si noti che in generale $r(A) \leq \min\{m, n\}$ se la matrice A è una matrice $m \times n$.

Per verificare se la caratteristica di A sia 3 è necessario calcolare i determinanti di tutte le possibili sottomatrici 3×3

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det(A_1) = -148$ è possibile affermare che la caratteristica di A è 3.
Si osservi che nel caso in cui tutte le matrici A_1, A_2, A_3, A_4 avessero avuto determinante nullo sarebbe stato necessario analizzare le sottomatrici di ordine 2 e calcolare il loro determinante. Nel caso in cui si fosse trovata una matrice di ordine 2 con determinante non nullo si sarebbe potuto concludere che la caratteristica di A è 2. Diversamente (cioè tutte la matrici di ordine 2 hanno determinante nullo), si sarebbe affermato che la caratteristica di A è 1, poichè la matrice A è non nulla.
Si ottiene il seguente teorema, particolarmente interessante ai fini dello studio della dipendenza o indipendenza lineare di m vettori di $\mathbb{R}^n$.

Il rango *r(A)* è il massimo numero di righe (colonne) linearmente indipendenti di A.

In altre parole, se $r(A) = r$ allora in A vi sono al massimo r righe linearmente indipendenti; inoltre r è anche uguale al massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A.

Esempio Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il rango *r(A)* è 2 poichè

$$det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -3 \neq 0.$$

Ciò è equivalente ad affermare che i due vettori riga

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, come pure i due vettori colonna

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esempio Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poichè $det(A) = 0$ allora $r(A) \leq 2$. Con riferimento all'esempio precedente, si ottiene $r(A) = 2$. I tre vettori riga

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti, come pure i vettori colonna

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

10 Il Teorema di Rouchè-Capelli

Si consideri un generico sistema di m equazioni lineari in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & = & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

che può essere scritto nella forma matriciale $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{x}$ denota il vettore delle incognite, $\mathbf{b}$ il vettore dei termini noti e A è la matrice $m \times n$ dei coefficienti del sistema.
Per poter riconoscere se un sistema di questo tipo ammette soluzione è possibile fare riferimento al concetto di rango definito nel paragrafo precedente. Il teorema che segue caratterizza l'esistenza delle soluzioni di un sistema, nel senso che presenta una condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema ammetta soluzione.
Sia $(A|\mathbf{b})$ la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta affiancando alla matrice A il vettore $\mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Teorema di Rouchè-Capelli Il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di m equazioni in n incognite ammette soluzione se e solo se

$$r(A) = r(A|\mathbf{b}).$$

Dimostrazione Supponiamo sia verificata la condizione $r(A) = r = r(A|\mathbf{b})$.
Poichè $r(A) = r$ esistono r colonne linearmente indipendenti della matrice A, indichiamole con $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r$, tali per cui ogni altra colonna della matrice A risulta combinazione lineare dei vettori $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r$. Inoltre $r = r(A|\mathbf{b})$ e quindi essendo r il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di $(A|\mathbf{b})$, il vettore $\mathbf{b}$ deve necessariamente essere combinazione lineare delle colonne $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r$ di A. Dunque il sistema ammette soluzione.
Supponiamo viceversa che il sistema ammetta soluzione ovvero che il vettore $\mathbf{b}$ risulti combinazione lineare delle colonne $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r$ della matrice A. Se $r = r(A)$ consideriamo il rango della matrice $(A|\mathbf{b})$; sicuramente $r(A|\mathbf{b}) \geq r$. Se fosse $r(A|\mathbf{b}) > r$ dovrebbero esistere $r + 1$ colonne di $(A|\mathbf{b})$ linearmente indipendenti; fra questi vettori deve comparire il vettore $\mathbf{b}$. Ma ciò risulta assurdo perchè ogni colonna della matrice A si scrive come combinazione lineare delle colonne $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r$ e quindi anche $\mathbf{b}$ è combinazione delle colonne $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r$. Da ciò segue che necessariamente $r(A|\mathbf{b}) = r$.

11 Esempi

Consideriamo quindi alcuni esempi di sistemi di equazioni lineari, nei quali si farà riferimento ai risultati proposti nei teoremi di Cramer e di Rouchè-Capelli.

Esempio 1

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

di tre equazioni in tre incognite. La matrice dei coefficienti A ed il vettore $\mathbf{b}$ dei termini noti sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Poichè $|A| = 0$, non è possibile sapere se il sistema ammette soluzione o meno: nel caso in cui il sistema ammetta soluzione, questa certamente non è unica. Infatti il teorema di Cramer ci assicura che, essendo il determinante nullo, certamente il sistema non ammette un'unica soluzione. Rimane aperto ilproblema dell'esistenza delle eventuali soluzioni. Per dare risposta al quesito, è necessario calcolare il rango delle matrici A e $(A|\mathbf{b})$. Poichè

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

la matrice A ha rango 2.
D'altro canto, la matrice $(A|\mathbf{b})$

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ammette come sottomatrice la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

il cui determinante pari a 10 permette di concludere che il rango di $(A|\mathbf{b})$ è uguale a 3. Pertanto il sistema non ammette soluzione.

Esempio 2

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \end{cases}$$

per il quale la matrice A (si noti che è la stessa dell'esempio precedente) ed il vettore dei termini noti $\mathbf{b}$ sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A ha rango 2. Dobbiamo quindi verificare se anche $(A|\mathbf{b})$ ha rango 2. La matrice $(A|\mathbf{b})$ è in questo caso

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ed ammette tutte sottomatrici di ordine 3 con determinante nullo (si osservi che la prima riga di $(A|\mathbf{b})$ è uguale al doppio della terza riga cui viene sommata la seconda riga). Anche la matrice $(A|\mathbf{b})$ ammette quindi rango 2.

Poichè le righe di $(A|\mathbf{b})$ sono linearmente dipendenti è possibile trascurare una delle equazioni che compaiono nel sistema e, ad esempio, riscrivere il sistema nella forma

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 5 \end{cases}$$

in cui viene tralasciata la terza equazione. La scelta di tralasciare la terza riga è legata al fatto che la terza riga della matrice A e la terza riga di $(A|\mathbf{b})$ (che contiene i coefficienti associati alla terza equazione) è combinazione lineare delle prime due equazioni.

Sappiamo infatti che il rango di A e $(A|\mathbf{b})$ è uguale a 2, poichè

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Se si riscrive il sistema nella forma

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 - x_3 \\ -x_1 & + & x_2 & = & 5 + x_3 \end{cases}$$

è possibile fare riferimento al teorema di Cramer per risolvere il sitema essendo non nullo il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ottengono così le soluzioni

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - x_3 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Si osservi che poichè $r = r(A) = r(A|\mathbf{b}) = 2$ sappiamo che esiste una sottomatrice 2×2 con determinante non nullo. Abbiamo considerato solo le equazioni che corrispondono alle righe di tale sottomatrice: le restanti $m - r$ equazioni possono essere trascurate. Abbiamo così ottenuto le soluzioni $\mathbf{x}$ che dipendono dalla variabile x_3: sono infinite, e dipendono dalla scelta di un parametro (la componente x_3). Ciò viene descritto affermando sintenticamente che le soluzioni sono ∞^{n-r}, cioè sono infinite e dipendono da $n - r$ parametri.

Esempio 3: un'applicazione economica

Si riporta, come conclusione, una breve descrizione di una tra le più classiche applicazioni economiche dei sistemi di equazioni lineari, il modello input-output di Leontief.

Si consideri un sistema economico suddiviso in n settori produttivi, ciascuno dei quali produce un certo bene; inoltre ogni bene è prodotto da un unico settore, per cui è possibile identificare ciascun settore con il bene da esso prodotto.

I settori sono fra loro interdipendenti, il che significa che ogni bene è visto sia come risultato della produzione (output), sia come un fattore produttivo (input) utilizzato per la produzione degli altri beni, da cui l'appellativo input-output dato al modello. Inoltre il modello, nella sua versione cosiddetta "aperta", considera l'esistenza di una domanda esterna per ciascun bene, espressa ad esempio dai consumatori finali.

In tale situazione, ogni settore dovrà produrre una quantità sufficiente a soddisfare la domanda complessiva del bene; quindi, per ogni settore i-esimo, deve valere la condizione:

$$\text{offerta totale del bene } i = \text{domanda totale del bene } i$$

dove la domanda totale comprende sia la domanda interna da parte dei vari settori, sia la domanda esterna.
Indicata con x_i la quantità prodotta del bene i-esimo, con x_{ij} la quantità del bene i utilizzata come input dal settore j e con d_i la domanda esterna dello stesso bene, la condizione precedente può scriversi come:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{in} + d_i$$

Nell'ipotesi che il fabbisogno del generico input i sia proporzionale al volume di produzione del generico settore j che lo richiede, cioè

$$x_{ij} = a_{ij} x_j$$

la relazione precedente può scriversi come:

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n + d_i$$

Il coefficiente a_{ij}, chiamato coefficiente tecnico di produzione, rappresenta la quantità del bene i necessaria per produrre una unità del bene j.

Scrivendo l'uguaglianza precedente per tutti i settori del sistema economico, si ottiene il seguente sistema di n equazioni lineari in n incognite:

$$\begin{cases} x_1 & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{1n}x_n & + & d_1 \\ x_2 & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{2n}x_n & + & d_2 \\ \ldots & = & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots \\ x_n & = & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{nn}x_n & + & d_n \end{cases}$$

Si vogliono determinare i valori delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cioè i livelli di produzione di ciascun settore, in modo che per ogni settore la quantità complessivamente prodotta riesca a soddisfare la domanda sia ad uso interno che esterno.
Il sistema può scriversi in forma compatta come:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

rappresentano, rispettivamente, la matrice dei coefficienti tecnici di produzione, il vettore delle produzioni dei settori ed il vettore dei consumi finali.

Si osservi che l'equazione $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$ può scriversi come:

$$(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

La condizione $|I - A| \neq 0$ assicura che il sistema ottenuto sia matematicamente possibile e garantisce l'unicità della soluzione. In questa situazione, infatti, la matrice $(I - A)$ risulta invertibile e la soluzione del sistema può scriversi come:

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}$$

Tale soluzione è però significativa da un punto di vista economico solo se le sue componenti sono non negative, in quanto rappresentano livelli di produzione in termini fisici oppure i loro corrispondenti valori nell'unità monetaria considerata. Se questo non accade il sistema economico si dice *non vitale.* Se si volesse quindi proseguire nell'analisi del modello input-output, si dovrebbero studiare altre proprietà del modello ed imporre condizioni che assicurino la vitalità del sistema economico.

Si supponga ad esempio che l'economia di una certa regione sia composta da tre settori, agricoltura, industria e servizi e sia data la seguente matrice (quadrata, di ordine 3) dei coefficienti tenici di produzione:

$$A = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.10 & 0.25 \\ 0.50 & 0.25 & 0.45 \\ 0.10 & 0.30 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

Ciascuna colonna della matrice A individua la tecnologia di produzione di ciascun settore; ad esempio per la produzione unitaria del bene 1 (fornito dal settore agricolo) occorrono 0.2 unità dello stesso bene 1, occorrono 0.5 unità del bene 2 (fornito dal settore industriale) e 0.1 unità del bene 3 (fornito dal settore dei servizi).
Si vogliono calcolare i livelli di produzione di ciascun settore, indicati con x_1, x_2, x_3, in modo che, tenuto conto della domanda interna, la produzione sia in grado di soddisfare anche il seguente vettore di domanda finale:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 11500 \\ 12500 \end{pmatrix}$$

Si tratta di risolvere il sistema di equazioni lineari scritto in forma matriciale come:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d} \quad \Rightarrow \quad (I - A)\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

La matrice $I - A$ risulta uguale a

$$I - A = \begin{pmatrix} 0.80 & -0.10 & -0.25 \\ -0.50 & 0.75 & -0.45 \\ -0.10 & -0.30 & 0.85 \end{pmatrix}$$

Essa è invertibile (avendo determinante $|I - A| = 0.29875 \neq 0$) e la matrice inversa è data da:

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.682008368 & 0.535564854 & 0.778242678 \\ 1.573221757 & 2.192468619 & 1.623430962 \\ 0.753138075 & 0.836820084 & 1.841004184 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema può quindi trovarsi come:

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 27661.09 \\ 56518.83 \\ 37907.95 \end{pmatrix}$$

Quindi, per soddisfare la domanda, l'economia dovrà attivare una produzione di $x_1 = 27661.09$ nel settore agricolo, $x_2 = 56518.83$ nel settore industriale e $x_3 = 37907.95$ nel settore dei servizi.