УДК 338.3

И. А. Быкадоров [1], Е. Моретти [2], А. Эллеро [2]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: bykad@math.nsc.ru

[2] Dipartimento di Matematica Applicata, Universita Ca'Foscari Di Venezia
Dorsoduro 3825/E, 30123, Venezia, Italia
E-mail: emoretti@unive.it; ellero@unive.it

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СЕГМЕНТИРОВАННОГО МАРКЕТИНГА *

Рассматривается линейная модель оптимального управления для маркетинга продуктов, которые производятся некоторой фирмой и продаются ритейлерами (посредниками) на разных сегментах рынка. Временной горизонт разделен на два «примыкающих» (последовательных непересекающихся) интервала – период производства и период продаж. В период производства фазовыми переменными являются уровни запасов и два вида гудвилов (для потребителей и ритейлеров), имеется три вида управлений: производством, качеством продукции и рекламой. В период продаж фазовыми переменными являются уровни продаж и два вида гудвилов, управлениями – коммуникации посредством рекламы, промоушена и стимулирования ритейлеров. Исходная задача сводится к эквивалентной задаче нелинейного программирования.

Ключевые слова: оптимальное управление, реклама, сегментация.

Введение

В статье рассматривается линейная модель оптимального управления маркетингом продуктов, которые производятся одной фирмой, а продаются ритейлерами (посредниками) на различных сегментах рынка.

Более точно, фирма производит и продает некоторый сезонный продукт с различными «атрибутами» в течение двух последовательных временных интервалов, в первый из которых осуществляется производство, а во второй – продажа продукта. В период производства фирма управляет уровнем производства и качеством продукции, а также осуществляет рекламу как среди ритейлеров, так и на различных сегментах потребительского рынка. В период продаж фирма имеет более глубокие возможности для осуществления коммуникаций [1] посредством промоушена для потребителей, стимулирования ритейлеров, а также рекламы (как для потребителей, так и для ритейлеров). Затраты на коммуникации влияют на поведение потребителей и ритейлеров, изменяя тем самым их гудвилы [2]. Таким образом, гудвилы потребителей и ритейлеров являются фазовыми переменными. Фирма максимизирует свою прибыль при наличии ограничений на минимальные уровни гудвилов в конце периода продаж. Тем самым обобщаются линейные модели, предложенные в [3–5]. С целью упрощения изложения будем рассматривать только случай одного (единого) вида коммуникаций для всех сегментов и всех ритейлеров.

Статья организована следующим образом. Сначала формулируется задача линейного оптимального управления для сегментированного маркетинга и предлагается ее декомпозиция на параметрические подзадачи. Затем приводится решение этих подзадач, что позволяет да-

* Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Университета Ка'Фоскари (Венеция, Италия), Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4113.2008.6) и РГНФ (проект 09-02-00337).

[1] Под *коммуникациями* понимается совокупность всевозможных видов рекламы товара, таких как реклама в СМИ, промоушен («продвижение» товара, например, путем проведения всевозможных акций), а также стимулирование торговых фирм к приобретению и хранению продукции.

[2] Под гудвилом (qoodwill) часто понимают активы, капитал фирмы, не поддающиеся материальному измерению (репутация, техническая компетенция, связи и т. д.), влияющие на отношение продавца, посредника и потребителя к товару. Этот термин в рассматриваемом контексте был введен M. Nerlove и K. J. Arrow в [6].

ISSN 1818-7862. Вестник НГУ. Серия: Социально-экономические науки. 2009. Том 9, выпуск 4

лее свести исходную задачу оптимального управления к эквивалентной задаче нелинейного программирования. В конце статьи – обсуждение полученных результатов и направления предполагаемых дальнейших исследований. Все доказательства приведены в Приложении.

Линейная модель сегментированного маркетинга

Рассмотрим модель с n сегментами рынка и r ритейлерами. Следуя [4], предполагаем, что производство и продажи осуществляются на интервалах $[t_0, t_1]$ (*период производства*) и $[t_1, t_2]$ (*период продаж*). Введем множества индексов $I = \{1, ..., n\}$ и $J = \{1, ..., r\}$.

Фазовые переменные и управления. В период производства рассматриваются фазовые переменные:

$m_i(t)$ – уровень запасов в i-м сегменте, $i \in I$, в момент $t, t \in [t_0, t_1]$;

и управления:

$u_i(t)$ – темп производственных затрат в i-м сегменте, $i \in I$, в момент $t, t \in [t_0, t_1]$;

q – темп затрат на улучшение качества производимой продукции; как и в линейной модели несегментированного (однородного) рынка [4], считаем q постоянной и неотрицательной.

В период продаж фазовыми переменными являются:

$x_i(t)$ – уровень продаж в i-м сегменте, $i \in I$, в момент $t, t \in [t_1, t_2]$ (т. е. за время $t - t_1$).

Далее, как на интервале производства, так и на интервале продаж, рассматриваются фазовые переменные:

$C_i(t)$ – гудвил потребителя в i-м сегменте, $i \in I$, в момент $t, t \in [t_0, t_2]$;

$R_j(t)$ – гудвил j-го ритейлера, $j \in J$, в момент $t, t \in [t_0, t_2]$;

и управление:

$a(t)$ – темп коммуникационных затрат в момент $t, t \in [t_0, t_2]$.

Гудвил потребителя $C_i(t)$ показывает, насколько легко потребители в i-м сегменте делают выбор, покупать ли продукт. Гудвил ритейлера $R_j(t)$ показывает, насколько желательно для j-го ритейлера хранить продукт для продажи (ср. [4]). Относительно управления $a(t)$ предполагается, что в период производства коммуникациями является реклама, а в период продаж – реклама, промоушен и стимулирование ритейлера.

Динамика. Динамика модели существенно различна для периода производства $[t_0, t_1]$ и периода продаж $[t_1, t_2]$.

Динамика в период производства. В период производства $[t_0, t_1]$ динамика описывается $2n + r$ уравнениями: n уравнений для уровней запасов $m_i(t)$ в i-м сегменте, $i \in I$, n уравнений для гудвилов потребителя $C_i(t)$ в i-м сегменте, $i \in I$, и r уравнений для гудвилов $R_j(t)$ j-го ритейлера, $j \in J$.

Для i-го сегмента, $i \in I$, динамика уровней запасов определяется уравнением

$$\dot{m}_i(t) = k_{u_i} u_i(t), \tag{1}$$

где k_{u_i} – маргинальная продуктивность производственных затрат, $k_{u_i} > 1$.

Таким образом, предполагается, что прирост запасов прямо пропорционален производственным затратам.

Далее, в i-м сегменте, $i \in I$, динамика уровня гудвила определяется уравнением

$$\dot{C}_i(t) = -\delta_{C_i} C_i(t) + \varepsilon_{c_i}^{(p)} a(t), \tag{2}$$

где δ_{C_i} – коэффициент дисконтирования (*decay rate*) гудвила $C_i(t)$, $\delta_{C_i} > 0$;

$\varepsilon_{c_i}^{(p)}$ – маргинальная продуктивность коммуникационных затрат a в терминах гудвила C_i в период производства, $\varepsilon_{c_i}^{(p)} \geq 0$ [3].

Первое слагаемое в правой части (2) описывает «эффект забывания» потребителя, а второе – показывает, что рост затрат на рекламу линейно влияет на прирост репутации фирмы.

Наконец, для *j*-го ритейлера, $j \in J$, динамика уровня гудвила задается уравнением

$$\dot{R}_j(t) = -\delta_{R_j} R_j(t) + \varepsilon_{R_j}^{(p)} a(t), \tag{3}$$

где δ_{R_j} – коэффициент дисконтирования (*decay rate*) гудвила $R_j(t)$, $\delta_{R_j} > 0$;

$\varepsilon_{R_j}^{(p)}$ – маргинальная продуктивность коммуникационных затрат a в терминах гудвила R_j в период производства, $\varepsilon_{R_j}^{(p)} \geq 0$.

Интерпретация слагаемых в правой части (3) аналогична (2).

Динамика в период продаж. В период продаж $[t_1, t_2]$ динамика также описывается $2n + r$ уравнениями: n уравнений для уровней продаж $x_i(t)$ в *i*-м сегменте, $i \in I$, n уравнений для гудвилов потребителя $C_i(t)$ в *i*-м сегменте, $i \in I$, и r уравнений для гудвилов $R_j(t)$ *j*-го ритейлера, $j \in J$. Интерпретация слагаемых в правых частях уравнений (4)–(6) аналогична приведенной для динамики в период производства.

Для *i*-го сегмента, $i \in I$, динамика уровней продаж определяется уравнением

$$\dot{x}(t) = -\alpha_i x_i(t) + \gamma_{C_i} C_i(t) + \sum_{j \in J} \gamma_{x_i R_j} R_j(t) + \varepsilon_{x_i}^{(s)} a(t) + l_{x_i}(t_1 - t_0) q, \tag{4}$$

где α_i – параметр насыщения рынка (*saturation aversion*), $\alpha_i > 0$;

γ_{C_i} – продуктивность гудвила $C_i(t)$ в терминах продаж, $\gamma_{C_i} > 0$;

$\gamma_{x_i R_j}$ – продуктивность гудвила $R_j(t)$ в терминах продаж в *i*-м сегменте *j*-м ритейлером, $\gamma_{x_i R_j} \geq 0$;

$\varepsilon_{x_i}^{(s)}$ – маргинальная продуктивность коммуникационных затрат типа промоушена в терминах продаж $x_i(t)$ в период продаж, $\varepsilon_{x_i}^{(s)} \geq 0$;

l_{x_i} – маргинальная продуктивность темпа затрат q для продаж, $l_{x_i} \geq 0$.

Отметим, что $(t_1 - t_0)q$ – это общие затраты на улучшение качества в период производства $[t_0, t_1]$ (напомним: рассматривается постоянное управление q).

Далее, для *i*-го сегмента, $i \in I$, динамика уровня гудвила определяется уравнением

$$\dot{C}_i(t) = \beta_i x_i(t) - \delta_{C_i} C_i(t) + \varepsilon_{C_i}^{(s)} a(t) + l_{C_i}(t_1 - t_0) q, \tag{5}$$

где β_i – продуктивность «торговой репутации» (*word-of-mouth*) в терминах гудвила $C_i, \beta_i > 0$;

δ_{C_i} – коэффициент дисконтирования гудвила C_i (такой же, как и в период производства), $\delta_{C_i} > 0$;

$\varepsilon_{C_i}^{(s)}$ – маргинальная продуктивность коммуникационных затрат рекламного типа в терминах гудвила C_i в период продаж, $\varepsilon_{C_i}^{(s)} \geq 0$;

l_{C_i} – маргинальная продуктивность затрат q для гудвила C_i, $l_{C_i} \geq 0$.

Наконец, динамика гудвила R_j для *j*-го ритейлера, $j \in J$, задается уравнением

[3] Неравенство $\varepsilon_{c_i}^{(p)} > 0$ означает, что в период производства коммуникационные затраты способствуют росту гудвила C_i. Аналогично интерпретируются случаи положительности определяемых ниже величин $\varepsilon_{R_j}^{(p)}, \varepsilon_{x_i}^{(s)}, \varepsilon_{C_i}^{(s)}, \varepsilon_{R_j}^{(s)}$.

$$\dot{R}_j(t) = -\delta_{R_j} R_j(t) + \varepsilon_{R_j}^{(s)} a(t) + l_{R_j}(t_1 - t_0)q, \tag{6}$$

где δ_{R_j} – коэффициент дисконтирования гудвила R_j (такой же, как и в период производства), $\delta_{R_j} > 0$;

$\varepsilon_{R_j}^{(s)}$ – маргинальная продуктивность коммуникационных затрат рекламного и стимулирующего типа в терминах гудвила R_j в период продаж, $\varepsilon_{R_j}^{(s)} \geq 0$;

l_{R_j} – маргинальная продуктивность темпа затрат q для гудвила R_j, $l_{R_j} \geq 0$.

Граничные условия. Естественными граничными условиями на уровни запасов и продаж являются следующие: $m_i(t_0) = x(t_1) = 0, \quad x_i(t_2) \leq m_i(t_1), \quad i \in I$.

Далее, граничные условия для гудвилов потребителя имеют вид

$$C_i(t_0) = C_i^0, \quad C_i(t_2) \geq C_i^2, \quad i \in I,$$

где C_i^0 – начальное значение гудвила C_i;

C_i^2 – нижняя граница гудвила C_i в конечный момент времени t_2.

Граничные значения для гудвилов ритейлеров имеют вид

$$R_j(t_0) = R_j^0, \quad R_j(t_2) \geq R_j^2, \quad j \in J,$$

где R_j^0 – начальное значение гудвила R_j;

R_j^2 – нижняя граница гудвила R_j в конечный момент времени t_2.

Кроме того, зададим условия на управления:

$$u_i(t) \in [0, \bar{u}_i], \quad i \in I, \quad t \in [t_0, t_1],$$
$$a(t) \in [a, \bar{a}], \quad t \in [t_0, t_2], \quad q \in [0, \bar{q}],$$

где $\bar{u}_i, \bar{a}, \bar{q}$ – верхние границы для $u_i(t), a(t), q$ соответственно.

Целевой функционал. Прибыль фирмы определяется как разность между доходом и полными затратами (на производство, улучшение качества и коммуникации) и задается функционалом

$$\sum_{i \in I} p_i x_i(t_2) - \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i \in I} c_i m_i(t) + \sum_{i \in I} u_i(t) + q \right] dt - \int_{t_0}^{t_2} a(t) dt, \tag{7}$$

где p_i – (экзогенно заданная) цена продажи единицы продукта в i-м сегменте, $p_i > 0$;

c_i – предельные издержки на хранение единицы продукции в единицу времени в i-м сегменте, $c_i > 0$.

Первый блок в (7) представляет собой валовой доход; второй – издержки на производство, хранение и улучшение качества продукции; последний блок – издержки на коммуникации.

Формулировка модели. Сведем воедино элементы модели, описанные ранее. Определим:

- n-мерные вектора фазовых переменных $m(t), x(t), C(t)$ с элементами $m_i(t), x_i(t), C_i(t), i \in I$, соответственно;
- r-мерные вектора фазовых переменных $R(t)$ с элементами $R_j(t), j \in J$;
- n-мерный вектор управления $u(t)$ с элементами $u_i(t), i \in I$;
- n-мерные постоянные вектора $p, c, C^0, l_x, l_C, C^2, \bar{u}, \varepsilon_C^{(p)}, \varepsilon_x^{(s)}, \varepsilon_C^{(s)}$ с элементами $p_i, c_i, C_i^0, l_{x_i}, l_{C_i}, C_i^2, \bar{u}_i, \varepsilon_{C_i}^{(p)}, \varepsilon_{x_i}^{(s)}, \varepsilon_{C_i}^{(s)}, i \in I$, соответственно;
- r-мерные постоянные вектора $R^0, l_R, R^2, \varepsilon_R^{(p)}, \varepsilon_R^{(s)}$ с элементами $R_j^0, l_{R_j}, R_j^2, \varepsilon_{R_j}^{(p)}, \varepsilon_{R_j}^{(s)}, j \in J$, соответственно;
- диагональные постоянные матрицы $k_u, \delta_C, \alpha, \gamma_C, \beta$ порядка n с диагональными элементами $k_{u_i}, \delta_{C_i}, \alpha_i, \gamma_{C_i}, \beta_i, i \in I$, соответственно;

• диагональную постоянную матрицу δ_R порядка r с диагональными элементами δ_{R_j}, $j \in J$;

• постоянную матрицу γ_R размера $n \times r$ с элементами $\gamma_{x_i R_j}$, $i \in I$, $j \in J$.

Кроме того, определим матрицы

$$A(t) = \begin{pmatrix} C(t) \\ R(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, t_2], \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ A(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_1, t_2],$$

$$A^0 = \begin{pmatrix} C^0 \\ R^0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} C^2 \\ R^2 \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \begin{pmatrix} \delta_C & 0_{nr} \\ 0_{rn} & \delta_R \end{pmatrix}, \qquad E_p = \begin{pmatrix} \varepsilon_C^{(p)} \\ \varepsilon_R^{(p)} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma_C & -\gamma_R \\ -\beta & \delta_C & 0_{nr} \\ 0_{rn} & 0_{rn} & \delta_R \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^{(s)} \\ \varepsilon_C^{(s)} \\ \varepsilon_R^{(s)} \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_C \\ l_R \end{pmatrix},$$

где, как обычно, 0_{nr} и 0_{rn} – это нулевые матрицы размера $(n \times r)$ и $(r \times n)$ соответственно.

Теперь, используя уравнения (1)–(3) в период производства, уравнения (4)–(6) в период продаж и целевой функционал (7), линейную модель маркетинга с n сегментами и r ритейлерами можно записать следующим образом.

P: максимизировать

$$p^T x(t_2) - \int_{t_0}^{t_1} [c^T m(t) + \sum_{i \in I} u_i(t) + q] dt - \int_{t_0}^{t_2} a(t) dt,$$

при условиях

$$\begin{aligned} &\dot{m}(t) = k_u u(t), \quad \dot{A}(t) = -\Delta A(t) + a(t) E_p, \quad t \in [t_0, t_1], \\ &m(t_0) = 0_n, \quad A(t_0) = A^0, \\ &\dot{X}(t) = -QX(t) + a(t)E + (t_1 - t_0) qL, \quad t \in [t_1, t_2], \\ &x(t_1) = 0_n, \quad x(t_2) \le m(t_1), \quad A(t_2) \ge A^2, \\ &0_n \le u(t) \le \bar{u}, \quad a(t) \in [0, \bar{a}], \quad q \in [0, \bar{q}]. \end{aligned}$$

Здесь, как обычно, t означает транспонирование, а 0_n является n-мерным нулевым вектором.

Замечание. Векторное неравенство $x(t_2) \le m(t_1)$ можно заменить на равенство $x(t_2) = m(t_1)$. Действительно, если на некотором допустимом решении задачи P выполняется строгое неравенство $x(t_2) < m(t_1)$, то, в силу специфической формы уравнений модели, можно снизить производство, увеличивая при этом значение целевой функции.

Сформулированная модель является достаточно общей и допускает различные спецификации. Некоторые возможные интерпретации модели и предложения по ее обобщению приведены в заключении.

Декомпозиция. Параметрические подзадачи. Задача P имеет ряд особенностей: ее система уравнений расщепляется на подсистемы, целевой функционал является аддитивным (сепарабельным), и т. д. Это позволяет провести декомпозицию задачи P.

Прежде чем описывать подход к решению задачи P, определим:

• n-мерный вектор $\tilde{m}$, чьи элементы $\tilde{m}_i$, $i \in I$, являются некоторыми параметрами;

• $(n + r)$-мерные вектора $\tilde{A}, \bar{A}$, чьи элементы $\tilde{A}_i, \bar{A}_i, i \in I, \tilde{A}_{n+j}, \bar{A}_{n+j}, j \in J$, соответственно, также являются некоторыми параметрами.

Как и в [5], задача P может быть решена следующим образом. Сначала решаются некоторые задачи оптимального управления, зависящие от параметров

$$\tilde{m} = m(t_1), \quad \tilde{A} = A(t_1), \quad \bar{A} \ge A^2;$$

затем решается координирующая задача – некоторая задача нелинейного программирования, в которой эти параметры рассматриваются как переменные.

Обозначим

$$\tilde{X}=\begin{pmatrix}0_n\\ \tilde{A}\end{pmatrix},\qquad \bar{X}=\begin{pmatrix}\tilde{m}\\ \bar{A}\end{pmatrix}.$$

Параметрические подзадачи $P_1=P_1(\tilde{m})$, $P_2=P_2(\tilde{A})$ и $P_3=P_3(\tilde{m},q,\tilde{A},\bar{A})$ могут быть записаны следующим образом.

P_1 : максимизировать

$$-\int_{t_0}^{t_1}[c^T m(t)+\sum_{i\in I}u_i(t)]dt,$$

при условиях

$$\dot{m}(t)=k_u u(t),\quad t\in[t_0,t_1],$$
$$m(t_0)=0_n,\quad m(t_1)=\tilde{m},$$
$$0_n\le u(t)\le\bar{u}.$$

P_2 : максимизировать

$$-\int_{t_0}^{t_1}a(t)dt,$$

при условиях

$$\dot{A}(t)=-\Delta A(t)+a(t)E_p,\quad t\in[t_0,t_1],$$
$$A(t_0)=A^0,\quad A(t_1)=\tilde{A},$$
$$a(t)\in[0,\bar{a}].$$

P_3 : максимизировать

$$-\int_{t_1}^{t_2}a(t)dt,$$

при условиях

$$\dot{X}(t)=-QX(t)+a(t)E+(t_1-t_0)qL,\quad t\in[t_1,t_2],$$
$$X(t_1)=\tilde{X},\quad X(t_2)=\bar{X},$$
$$a(t)\in[0,\bar{a}].$$

Отметим, что каждая из этих задач имеет простую содержательную интерпретацию: минимизация издержек на производство и хранение продукции (задача P_1), а также на коммуникации в период производства (задача P_2) и в период продаж (задача P_3).

Более того, задача P_1, в силу специфики ее уравнений, распадается на n более простых задач $P_1^{(i)}=P_1^{(i)}(\tilde{m}_i), i\in I$ (ср. параметрическую задачу $P_1(\tilde{m})$ в односегментном случае, [4]):

$P_1^{(i)}$ максимизировать

$$-\int_{t_0}^{t_1}[c_i m_i(t)+u_i(t)]dt,$$

при условиях

$$\dot m_i(t) = k_{u_i} u_i(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$
$$m_i(t_0) = 0, \quad m_i(t_1) = \tilde m_i,$$
$$u_i(t) \in [0, \overline{u}_i].$$

Пусть величины $\tilde F_1^{(i)} = \tilde F_1^{(i)}(\tilde m_i), i \in I, \quad \tilde F_2 = \tilde F_2(\tilde A), \quad F_3 = F_3(\tilde m, q, \tilde A, \overline{A})$ являются оптимальными значениями целевых функций задач $P_1^{(i)}, i \in I, \quad P_2, \quad P_3$ соответственно. Тогда задача P эквивалентна некоторой задаче нелинейного программирования, в которой целевой (максимизируемой) функцией является следующая функция:

$$p^T \tilde m - (t_1 - t_0)q + \sum_{i \in I} \tilde F_1^{(i)}(\tilde m_i) + \tilde F_2(\tilde A) + \tilde F_3(\tilde m, q, \tilde A, \overline{A}). \tag{8}$$

В дальнейшем будем предполагать, что для каждой параметрической подзадачи выполнено условие общности положения (УОП). (См. [1] или, более точно, [7. С. 166].) Необходимые и достаточные условия выполнения УОП будут сформулированы далее, см. леммы 1, 2 и 4.

Решение параметрических подзадач

В этом параграфе будет дано решение каждой из упомянутых выше параметрических подзадач. Как обычно (см., например, [1. С. 15]), будем предполагать, что все фигурирующие в этих задачах управления являются непрерывными слева и непрерывными в концах интервалов производства и продажи.

Процесс получения оптимальных решений задач $P_1^{(1)}, \ldots, P_1^{(n)}$ совпадает, по существу, с аналогичным процессом для случая $n = 1$ (см. [5]), т. е. имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Для каждого $i \in I$ оптимальное решение задачи $P_1^{(i)}$ имеет вид

$$u_i^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in (t_0, t_{u_i}), \\ \overline{u}_i, & t \in (t_{u_i}, t_1), \end{cases}$$
$$m_i^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t_{u_i}], \\ k_{u_i}\overline{u}_i(t - t_{u_i}), & t \in [t_{u_i}, t_1], \end{cases}$$

где момент переключения t_{u_i} определяется равенством $t_{u_i} = t_1 - \dfrac{\tilde m_i}{k_{u_i}\overline{u}_i}$. Оптимальное значение целевого функционала дается равенством

$$\tilde F_1^{(i)}(\tilde m_i) = \frac{c_i(\tilde m_i)^2}{2k_{u_i}\overline{u}_i} + \frac{\tilde m_i}{k_{u_i}}, \tag{9}$$

где

$$\tilde m_i \in [0,\ k_{u_i}\overline{u}(t_1 - t_0)]. \tag{10}$$

Отметим, что в [5] аналог утверждения 1 был установлен без предположения о выполнении УОП. Это неудивительно, поскольку имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Для каждого $i \in I$ в задаче $P_1^{(i)}$ выполняется условие общности положения.

Что касается УОП для задачи P_2, имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Для задачи P_2 условие общности положения выполнено в том и только в том случае, если

$$\varepsilon_{C_i}^{(p)} \neq 0 \quad \forall i \in I, \quad \varepsilon_{R_j}^{(p)} \neq 0 \quad \forall j \in J, \tag{11}$$
$$\delta_{C_i} \neq \delta_{C_j} \quad \forall 1 \le i < j \le n, \quad \delta_{R_i} \neq \delta_{R_j} \quad \forall 1 \le i < j \le r, \tag{12}$$
$$\delta_{C_i} \neq \delta_{R_j} \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J. \tag{13}$$

Напомним: предполагается, что для задачи P_2 выполнено УОП. Кроме того, все собственные числа матрицы $-\Delta$ (в правой части системы уравнений) являются вещественными. Поэтому число моментов переключений в оптимальном управлении $a^*(t)$ не может быть больше, чем $n+r$ (см. [7. С. 166]). Обозначим эти моменты переключений через $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$. Более того, удобно обозначить $\tau_{n+r+1} = t_1$.

Утверждение 2. В задаче P_2 оптимальное значение целевого функционала дается равенством

$$\tilde{F}_2 = \begin{cases} -\bar{a}\sum_{j=1}^{n+r}(-1)^j \tau_j, & \text{если} \quad n+r \quad \text{четно}, \\ -\bar{a}\sum_{j=1}^{n+r+1}(-1)^j \tau_j, & \text{если} \quad n+r \quad \text{нечетно}, \end{cases} \tag{14}$$

где моменты переключений $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$ таковы, что

$$t_0 \le \tau_1 \le \ldots \le \tau_{n+r} \le \tau_{n+r+1} = t_1 \tag{15}$$

и, более того, удовлетворяют условию

$$e^{t_1\Delta}\tilde{A} - e^{t_0\Delta}A^0 = \begin{cases} \bar{a}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n+r}(-1)^j e^{\tau_j\Delta}\right)\Delta^{-1}E_p, & \text{если} \quad n+r \quad \text{четно}, \\ \bar{a}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n+r+1}(-1)^j e^{\tau_j\Delta}\right)\Delta^{-1}E_p, & \text{если} \quad n+r \quad \text{нечетно}. \end{cases} \tag{16}$$

Рассмотрим теперь задачу P_3. Структура матрицы Q позволяет сравнительно легко вычислить ее собственные числа.

Лемма 3. Собственные числа матрицы Q имеют вид

$$\lambda_i = \frac{\alpha_i + \delta_{C_i} - \sqrt{(\alpha_i - \delta_{C_i})^2 + 4\beta_i\gamma_{C_i}}}{2}, \quad i \in I,$$
$$\lambda_{n+i} = \frac{\alpha_i + \delta_{C_i} + \sqrt{(\alpha_i - \delta_{C_i})^2 + 4\beta_i\gamma_{C_i}}}{2}, \quad i \in I,$$
$$\lambda_{2n+j} = \delta_{R_j}, \quad j \in J.$$

Заметим, что $\lambda_{2n+j} > 0 \quad \forall\, j \in J$. Кроме того, для каждого $i \in I$, поскольку $\beta_i > 0$ и $\gamma_{C_i} > 0$, собственные числа λ_i и λ_{n+i} являются вещественными; более того, $\lambda_{n+i} > 0$.

Для простоты изложения ограничимся рассмотрением случая, когда все собственные числа матрицы Q различны. Если матрица Q имеет кратные собственные числа, вычисления проводятся сходным образом (ср., например, [4]).

Пусть S – (невырожденная!) матрица собственных векторов матрицы Q [4].

[4] Более точно, пусть k-й столбец матрицы S является собственным вектором матрицы Q, соответствующий собственному числу λ_k. В силу предположения

$$(\lambda_{2n+j} - \lambda_i)(\lambda_{2n+j} - \lambda_{n+i}) \ne 0 \;\forall\, i \in I \;\forall\, j \in J$$

матрица S может быть записана, например, следующим образом:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1,2n-r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{2n-r,1} & \dots & S_{2n-r,2n-r} \end{pmatrix},$$

где для каждого $i \in I$ имеем

Обозначим

$$\Lambda = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2n+r}\} = S^{-1}QS. \tag{17}$$

Что касается УОП для задачи P_3, имеет место следующая лемма.

Лемма 4. Для задачи P_3 условие общности положения выполняется в том и только в том случае, если $\lambda_i \neq 0 \; \forall\, i \in I$ и, более того, вектор $S^{-1}E_s$ не имеет нулевых компонент.

Далее, поскольку выполнено УОП и все собственные числа матрицы Q являются вещественными, то число моментов переключений в оптимальном управлении $a^*(t)$ не может быть больше, чем $2n+r$. Обозначим эти моменты переключений через $\rho_1, \dots, \rho_{2n+r}$.
Более того, обозначим

$$G = e^{t_2\Lambda}S^{-1}\bar{X} - e^{t_1\Lambda}S^{-1}\tilde{X} + (e^{t_1\Lambda} - e^{t_2\Lambda})\Lambda^{-1}S^{-1}L,$$

где матрица Λ определена в (17).

Пусть $M \in I$ – число отрицательных собственных чисел матрицы Q.

Утверждение 3. Для задачи P_3 справедливы утверждения:

1) если M четно, то оптимальное значение целевого функционала дается равенством

$$\tilde{F}_3 = \begin{cases} -\bar{a} \cdot \sum\limits_{j=1}^{2n+r} (-1)^{-j}\rho_j, & \text{если} \quad r \quad \text{четно}, \\ -\bar{a} \cdot \sum\limits_{j=1}^{2n+r+1} (-1)^{-j}\rho_j, & \text{если} \quad r \quad \text{нечетно}, \end{cases} \tag{18}$$

где моменты переключения $\rho_1, \dots, \rho_{2n+r}$ таковы, что

$$t_1 = \rho_0 \le \rho_1 \le \dots \le \rho_{2n+r} \le \rho_{2n+r+1} = t_2 \tag{19}$$

и, кроме того, удовлетворяют условию

$$G = \begin{cases} \bar{a} \cdot \left(\sum\limits_{j=1}^{2n+r} (-1)^j e^{\rho_j\Lambda} \right) \Lambda^{-1}S^{-1}E_s, & \text{если} \quad r \quad \text{четно}, \\ \bar{a} \cdot \left(\sum\limits_{j=1}^{2n+r+1} (-1)^j e^{\rho_j\Lambda} \right) \Lambda^{-1}S^{-1}E_s, & \text{если} \quad r \quad \text{нечетно}; \end{cases} \tag{20}$$

2) если M нечетно, то оптимальное значение целевого функционала дается равенством

$$S_{k,i} = \begin{cases} \gamma_{C_i}, & \text{если} \quad k = i, \\ \alpha_i - \lambda_i, & \text{если} \quad k = n+i, \\ 0, & \text{если} \quad k \in \{1, \dots, 2n+r\} \setminus \{i, n+i\}, \end{cases}$$

$$S_{k,n+i} = \begin{cases} \gamma_{C_i}, & \text{если} \quad k = i, \\ \alpha_i - \lambda_{n+i}, & \text{если} \quad k = n+i, \\ 0, & \text{если} \quad k \in \{1, \dots, 2n+r\} \setminus \{i, n+i\}, \end{cases}$$

а для каждого $j \in J$ имеем

$$S_{k,2n+j} = \begin{cases} \dfrac{(\delta_{C_i} - \delta_{R_j})\gamma_{x_iR_j}}{(\delta_{R_j} - \lambda_i)(\delta_{R_j} - \lambda_{n+i})}, & \text{если} \quad k = i, i \in I, \\ \dfrac{\beta_i\gamma_{x_iR_j}}{(\delta_{R_j} - \lambda_i)(\delta_{R_j} - \lambda_{n+i})}, & \text{если} \quad k = n+i, i \in I, \\ 1, & \text{если} \quad k = 2n+j, \\ 0, & \text{если} \quad k \in \{2n+1, \dots, 2n+r\} \setminus \{2n+j\}. \end{cases}$$

Таким образом, матрица S является невырожденной.

$$\tilde{F}_3 = \begin{cases} -\bar{a} \cdot \sum_{j=0}^{2n+r+1} (-1)^{-j} \rho_j, & \text{если} \quad r \quad \text{четно}, \\ -\bar{a} \cdot \sum_{j=0}^{2n+r} (-1)^{-j} \rho_j, & \text{если} \quad r \quad \text{нечетно}, \end{cases} \tag{21}$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_{2n+r}$ удовлетворяют (19) и, кроме того,

$$G = \begin{cases} \bar{a} \cdot \left(\sum_{j=0}^{2n+r+1} (-1)^j e^{\rho_j \Lambda} \right) \Lambda^{-1} S^{-1} E_s, & \text{если} \quad r \quad \text{четно}, \\ \bar{a} \cdot \left(\sum_{j=0}^{2n+r} (-1)^j e^{\rho_j \Lambda} \right) \Lambda^{-1} S^{-1} E_s, & \text{если} \quad r \quad \text{нечетно}. \end{cases} \tag{22}$$

Координирующая задача

Утверждения 1, 2 и 3 дают явный вид для $\tilde{F}_1^{(i)}, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3$, а также условия на моменты переключений. Это позволяет сформулировать координирующую задачу. Напомним, что выполняются условия

$$\bar{A} \geq A^2, \qquad q \in [0, \bar{q}], \tag{23}$$

кроме того, моменты переключений должны удовлетворять условию

$$t_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_{n+r} \leq t_1 \leq \rho_1 \leq \ldots \leq \rho_{2n+r} \leq t_2 \,. \tag{24}$$

Если M четно, то координирующая задача является следующей.

Задача P_+: максимизировать (8) при условиях (10), (23), (24), (16), (20), где функции $\tilde{F}_1^{(i)}$ $\forall\, i \in I$, $\tilde{F}_2$, $\tilde{F}_3$ определены равенствами (9), (14), (18) соответственно.

Если же M нечетно, то координирующая задача имеет следующий вид.

Задача P_-: максимизировать (8) при условиях (10), (23), (24), (16), (22), где функции $\tilde{F}_1^{(i)}$ $\forall\, i \in I$, $\tilde{F}_2$, $\tilde{F}_3$ определены равенствами (9), (14), (21) соответственно.

Каждая из задач P_+ и P_- является задачей нелинейного программирования с $6n+4r+1$ переменными: $3n+2r+1$ переменными – параметрами $\tilde{m}, q, \tilde{A}, \bar{A}$, а также $3n+2r$ переменными – моментами переключений $\tau_1, \ldots, \tau_{n+r}, \rho_1, \ldots, \rho_{2n+r}$. Кроме того, в этих задачах имеется $3n+2r$ нелинейных ограничений в виде равенств и несколько простейших ограничений в виде неравенств. Целевые функции в этих задачах сравнительно просты, однако ограничения в виде равенств являются нелинейными и не могут быть разрешены явно.

Отметим, что ограничения координирующей задачи задают необходимые и достаточные условия разрешимости задачи P.

Заключение

В статье изучена модель маркетинга на сегментированном рынке с целью определения оптимальных затрат.

Отметим, что если рассматривается только один ритейлер и один сегмент рынка (т. е. $n=r=1$) и если общие коммуникационные затраты разделены на две части *a priori*, одна для ритейлера и одна для потребителей, то получается модель, изученная в [4].

Представляется интересным рассмотреть обобщение этой модели на случай нескольких видов коммуникаций. Например, может быть рассмотрен случай, когда каждый из d видов коммуникаций действует только для одного ритейлера и на одном сегменте рынка (т. е. $d=n+r$). Другая интерпретация задачи P может быть получена, если рассматривать d как число различных коммуникационных каналов, например: телевидение, радио, газеты, промоушен, стимулирование… каждый из которых оказывает различные эффекты на каждого ритейлера или сегмент в терминах как продаж, так и гудвилов. Однако для случая нескольких видов коммуникаций еще более усложняется даже описание модели. Что касается исследования модели, то требуется, прежде всего, уточнить (к сожалению, усложнить) формулировки утверждений 2 и 3.

Тем не менее, представляется, что дальнейшее изучение модели, в частности изучение координирующей задачи, а также разработка ее обобщений может быть направлением будущих исследований.

Приложение. Доказательства утверждений

Доказательство леммы 1. Как показано в [7. С. 166], требуется лишь показать, что

$$\det\begin{pmatrix} B_1 & A_1B_1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ k_u \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\det\begin{pmatrix} B_1 & A_1B_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & -ck_u \\ k_u & 0 \end{pmatrix} = c(k_u)^2 > 0.$$

Доказательство леммы 2. Как показано в [7. С. 166], требуется только показать, что

$$\det\begin{pmatrix} B_2 & A_2B_2 & \cdots & A_2^{n+r}B_2 \end{pmatrix} \neq 0, \tag{25}$$

где

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \Delta & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ E_p \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\det\begin{pmatrix} B_2 & A_2B_2 & \cdots & A_2^{n+r}B_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ E_p & \Delta E_p & \dots & \Delta^{n+r}E_p \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} \Delta E_p & \dots & \Delta^{n+r}E_p \end{pmatrix} = \det\Delta \cdot \det\begin{pmatrix} E_p & \Delta E_p & \dots & \Delta^{n+r-1}E_p \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{i\in I}\delta_{C_i}\cdot\prod_{j\in J}\delta_{R_j}\cdot\prod_{i\in I}\varepsilon_{C_i}^{(p)}\cdot\prod_{j\in J}\varepsilon_{R_j}^{(p)}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & \delta_{C_1} & \dots & \delta_{C_1}^{n+r-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \delta_{C_n} & \dots & \delta_{C_n}^{n+r-1} \\ 1 & \delta_{R_1} & \dots & \delta_{R_1}^{n+r-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \delta_{R_r} & \dots & \delta_{R_r}^{n+r-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{i\in I}\delta_{C_i}\varepsilon_{C_i}^{(p)}\cdot\prod_{j\in J}\delta_{R_j}\varepsilon_{R_j}^{(p)}\cdot\prod_{\substack{i\in I\\ j\in I\\ i<j}}(\delta_{Cj}-\delta_{C_i})\cdot\prod_{\substack{i\in J\\ j\in J\\ i<j}}(\delta_{Rj}-\delta_{R_i})\cdot\prod_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(\delta_{Rj}-\delta_{C_i}).$$

Напомним, что $\delta_{C_i} > 0\ \forall\, i\in I$, $\delta_{R_j} > 0\ \forall\, j\in J$. Следовательно, (25) выполнено в том и только в том случае, если выполнено (11)–(13).

Доказательство утверждения 2. Прежде всего установим некоторые вспомогательные утверждения.

Нижеследующая лемма устанавливает знак детерминанта матрицы, которую можно рассматривать как некоторое «обобщение» матрицы Вандермонда.

Лемма 2.1 Если $0<\mu_1<\ldots<\mu_{s-1}$ и $0<\xi_1<\ldots<\xi_s$, то

$$\det\begin{pmatrix} 1 & e^{\mu_1\xi_1} & \ldots & e^{\mu_{s-1}\xi_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & e^{\mu_1\xi_s} & \ldots & e^{\mu_{s-1}\xi_s} \end{pmatrix} > 0.$$

Используя лемму 2.1, можно также доказать следующее утверждение.

Лемма 2.2 Если $0<\xi_1<\ldots<\xi_s$, $\nu_1<\ldots<\nu_s$ и $\nu_i\neq 0 \quad \forall i\in\{1,\ldots,s\}$, то система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{s}u_i e^{\nu_i\xi_j}=1, \quad j=1,\ ...,s, \tag{26}$$

имеет единственное решение $(\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_s)$. Более того, функция

$$F_{\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_s}(t)=\sum_{i=1}^{s}\overline{u}_i e^{\nu_i t}-1$$

удовлетворяет равенству

$$sign\, F_{\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_s}(t)=(-1)^{M+1} \quad \forall\, t<\xi_1\,, \tag{27}$$

где M есть число отрицательных элементов в множестве $\{\nu_1,\ldots,\nu_s\}$.

Применяя принцип максимума Понтрягина, легко показать, что число моментов переключения совпадает с числом нулей функции

$$F_{u_1,\ldots,u_{n+r}}(t)=\sum_{j\in I}u_i e^{\delta_{C_j}t}+\sum_{j\in J}u_{n+j}e^{\delta_{R_j}t}-1, \quad t\in[t_0,t_1],$$

где $u_1,\ldots,u_{n+r}$ есть произвольные константы.

При фиксированных $\tau_1<\cdots<\tau_{n+r}$ линейная система

$$F_{u_1,\ldots,u_{n+r}}(\tau_i)=0, \quad i=1,\ldots,n+r,$$

имеет единственное решение $(\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_{n+r})$ в силу (12), (13) и леммы 2.2. Следовательно, если рассмотреть

$$t_0<\tau_1<\cdots<\tau_{n+r}<t_1\,,$$

то функция $F_{\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_{n+r}}(t)$ имеет в открытом интервале (t_0,t_1) ровно $n+r$ корней. Более того, $F_{\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_{n+r}}(t_0)<0$ в силу леммы 2.2.

Поэтому если $n+r$ четно, то для каждого $i\in\left\{0,1,\ldots,\dfrac{n+r-2}{2}\right\}$ имеем

$$a^*(t)=\begin{cases}0, & t\in(\tau_{2i},\tau_{2i-1}),\\ \overline{a}, & t\in(\tau_{2i+1},\tau_{2i+2}),\\ 0, & t\in(\tau_{n+r},\tau_{n+r+1});\end{cases} \tag{28}$$

если же $n+r$ нечетно, то для каждого $i\in\left\{0,1,\ldots,\dfrac{n+r-1}{2}\right\}$ имеем

$$a^*(t)=\begin{cases}0, & t\in(\tau_{2i},\tau_{2i-1}),\\ \overline{a}, & t\in(\tau_{2i+1},\tau_{2i+2}).\end{cases} \tag{29}$$

Отметим, что если имеет место (15), то все возможные виды оптимального управления $a^*(t)$ могут быть записаны в единой форме (28) и (29) соответственно. Следовательно, оптимальным значением целевого функционала является (14).

Для дальнейшего удобно ввести следующие формальные обозначения:

$$g(v)=\begin{cases} 0, & v=0,\\ \overline{a}\cdot\left(\sum_{j=1}^{v}(-1)^j e^{\tau_j\Delta}\right)\Delta^{-1}E_p, & v\in\{1,\dots,n+r\}.\end{cases}$$

Теперь прямыми вычислениями можно показать, что оптимальный вектор фазовых переменных имеет вид

$$A^*(t)=e^{-t\Delta}\cdot\left(e^{t_0\Delta}A^0+B(t)\right), \tag{30}$$

где если $n+r$ четно, то для каждого $i\in\left\{0,1,\dots,\frac{n+r-2}{2}\right\}$ имеем

$$B(t)=\begin{cases} g(2i), & t\in[\tau_{2i},\tau_{2i+1}],\\ g(2i+1)+\overline{a}\cdot e^{t\Delta}\Delta^{-1}E_p, & t\in[\tau_{2i+1},\tau_{2i+2}],\\ g(n+r), & t\in[\tau_{n+r},\tau_{n+r+1}];\end{cases}$$

если же $n+r$ нечетно, то для каждого $i\in\left\{0,1,\dots,\frac{n+r-1}{2}\right\}$ имеем

$$B(t)=\begin{cases} g(2i), & t\in[\tau_{2i},\tau_{2i+1}],\\ g(2i+1)+\overline{a}\cdot e^{t\Delta}\Delta^{-1}E_p, & t\in[\tau_{2i+1},\tau_{2i+2}].\end{cases}$$

Более того, используя непрерывность компонент вектора $A^*(t)$ (см. (30)) и граничные условия, легко показать, что моменты переключений $\tau_1,\dots,\tau_{n+r}$ должны удовлетворять (16).

Доказательство леммы 2.1. Доказательство проведем индукций по s. Для $s=2$ утверждение очевидно.

Предположим, что оно верно для $s=m$. Полагаем $s=m+1$. Рассмотрим функцию

$$G(t)=\det\begin{pmatrix} 1 & e^{\mu_1\xi_1} & \dots & e^{\mu_m\xi_1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & e^{\mu_1\xi_m} & \dots & e^{\mu_m\xi_m}\\ 1 & e^{\mu_1 t} & \dots & e^{\mu_m t}\end{pmatrix}.$$

Имеем

$$G(t)=\det\begin{pmatrix} 1 & e^{\mu_1\xi_1} & \dots & e^{\mu_{m-1}\xi_1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & e^{\mu_1\xi_m} & \dots & e^{\mu_{m-1}\xi_m}\end{pmatrix}\cdot e^{\mu_m t}-\det\begin{pmatrix} 1 & e^{\mu_1\xi_1} & \dots & e^{\mu_{m-2}\xi_1} & e^{\mu_m\xi_1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & e^{\mu_1\xi_m} & \dots & e^{\mu_{m-2}\xi_m} & e^{\mu_m\xi_m}\end{pmatrix}\cdot e^{\mu_{m-1}t}+\dots+$$

$$+(-1)^{m-1}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & e^{\mu_2\xi_1} & \dots & e^{\mu_m\xi_1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & e^{\mu_2\xi_m} & \dots & e^{\mu_m\xi_m}\end{pmatrix}\cdot e^{\mu_1 t}+(-1)^m\cdot\det\begin{pmatrix} e^{\mu_1\xi_1} & \dots & e^{\mu_m\xi_1}\\ \vdots & & \vdots\\ e^{\mu_1\xi_m} & \dots & e^{\mu_m\xi_m}\end{pmatrix}.$$

Следовательно (см., например, [1. С. 136]), функция $G(t)$ имеет не более m корней. Но $G(\xi_i)=0\quad\forall i=1,\dots,m$. Поэтому $G(t)\neq 0\quad\forall t>\xi_m$. Более того, в силу индукционного предположения,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & e^{\mu_1\xi_1} & \dots & e^{\mu_{m-1}\xi_1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & e^{\mu_1\xi_m} & \dots & e^{\mu_{m-1}\xi_m}\end{pmatrix}>0.$$

Поэтому $\lim_{t\to\infty}G(t)=+\infty$. Следовательно, $G(\xi_{m+1})>0$.

Доказательство Леммы 2.2. Рассмотрим

$$d=\det\begin{pmatrix} e^{\nu_1\xi_1} & \dots & e^{\nu_s\xi_1}\\ \vdots & & \vdots\\ e^{\nu_1\xi_s} & \dots & e^{\nu_s\xi_s}\end{pmatrix}.$$

Имеем

$$d = e^{\nu_1(\xi_1+\ldots+\xi_s)} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & e^{(\nu_2-\nu_1)\xi_1} & \ldots & e^{(\nu_s-\nu_1)\xi_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & e^{(\nu_2-\nu_1)\xi_s} & \ldots & e^{(\nu_s-\nu_1)\xi_s} \end{pmatrix},$$

поэтому, в силу леммы 1.1, $d>0$. Следовательно, система (26) имеет единственное решение $(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_s)$. Далее, функция $F_{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_s}(t)$ имеет не более s корней (см, например, [1. С. 136]). Но $F_{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_s}(\xi_j)=0 \quad \forall\, j\in\{1,\ldots,s\}$. Поэтому $F_{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_s}(t)\neq 0 \quad \forall\, t<\xi_1$.

Если $M=0$, то, поскольку $\nu_i\neq 0 \quad \forall\, j\in\{1,\ldots,s\}$, имеем

$$\lim_{t\to-\infty} F_{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_s}(t) = -1 < 0,$$

поэтому $F_{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_s}(t)<0 \quad \forall\, t<\xi_1$. Следовательно, (27) выполняется для $M=0$.

Рассмотрим теперь случай $M>0$. Имеем

$$\lim_{t\to-\infty} F_{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_s}(t) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \bar{u}_1<0, \\ +\infty, & \text{если } \bar{u}_1>0, \end{cases}$$

поэтому

$\bar{u}_1 \cdot F_{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_s}(t) > 0 \quad \forall\, t<\xi_1$. (31)

Можно показать, что $sign\,\bar{u}_1 = (-1)^{M-1}$. Действительно, $\bar{u}_1 = \dfrac{d_1}{d}$, где

$$d_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & e^{\nu_2\xi_1} & \ldots & e^{\nu_s\xi_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & e^{\nu_2\xi_s} & \ldots & e^{\nu_s\xi_s} \end{pmatrix}.$$

Если $M=1$, то $d_1>0$ в силу леммы 1.1.

Если же $M>1$, то

$$d_1 = (-1)^{M-1}\cdot\det\begin{pmatrix} e^{\nu_2\xi_1} & \ldots & e^{\nu_M\xi_1} & 1 & e^{\nu_{M+1}\xi_1} & \ldots & e^{\nu_s\xi_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\nu_2\xi_s} & \ldots & e^{\nu_M\xi_s} & 1 & e^{\nu_{M+1}\xi_s} & \ldots & e^{\nu_s\xi_s} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{M-1}\cdot e^{\nu_2(\xi_1+\ldots+\xi_s)}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & e^{(\nu_3-\nu_2)\xi_1} & \ldots & e^{(\nu_M-\nu_2)\xi_1} & e^{-\nu_2\xi_1} & e^{(\nu_{M+1}-\nu_2)\xi_1} & \ldots & e^{(\nu_s-\nu_2)\xi_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & e^{(\nu_3-\nu_2)\xi_s} & \ldots & e^{(\nu_M-\nu_2)\xi_s} & e^{-\nu_2\xi_s} & e^{(\nu_{M+1}-\nu_2)\xi_s} & \ldots & e^{(\nu_s-\nu_2)\xi_s} \end{pmatrix},$$

Поэтому, в силу леммы 1.1, $sign\, d_1 = (-1)^{M-1}$.

Следовательно, если $M>0$, то $sign\,\bar{u}_1 = (-1)^{M-1}$. Итак, в силу (31), равенство (27) имеет место для $M>0$.

Доказательство леммы 3. Обозначим, как обычно, через I_{2n+r}, I_n и I_r единичные матрицы порядка соответственно $2n+r$, n и r. Имеем

$$\det(Q-\lambda I_{2n+r}) = \det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda I_n & -\gamma_C & -\gamma_R \\ -\beta & \delta_C-\lambda I_n & 0_{nr} \\ 0_{rn} & 0_{rn} & \delta_R-\lambda I_r \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda I_n & -\gamma_C \\ -\beta & \delta_C-\lambda I_n \end{pmatrix}\times\det(\delta_R-\lambda I_r) =$$

$$= (-1)^n\det\begin{pmatrix} -\beta & \delta_C-\lambda I_n \\ \alpha-\lambda I_n & -\gamma_C \end{pmatrix}\times\det(\delta_R-\lambda I_r) = \det\begin{pmatrix} \beta & \lambda I_n-\delta_C \\ \alpha-\lambda I_n & -\gamma_C \end{pmatrix}\times\det(\delta_R-\lambda I_r).$$

В силу формулы дополнения по Шуру (см., например, [2. С. 35]), имеем

$$\det\begin{pmatrix} \beta & \lambda I_n-\delta_C \\ \alpha-\lambda I_n & -\gamma_C \end{pmatrix} = \det\beta\times\det\left(-\gamma_C-(\alpha-\lambda I_n)\cdot\beta^{-1}(\lambda I_n-\delta_C)\right).$$

Следовательно, поскольку матрицы $\alpha,\beta,\gamma_C,\delta_C,\delta_R$ являются диагональными, имеем

$$\det\left(Q-\lambda I_{2n+r}\right)=\prod_{i\in I}\left((\lambda-\alpha_i)(\lambda-\delta_{C_i})-\beta_i\gamma_{C_i}\right)\cdot\prod_{j\in J}(\delta_{R_j}-\lambda). \tag{32}$$

Утверждение леммы теперь легко следует из (32).

Доказательство леммы 4. Как показано в [7. С. 166], требуется лишь показать, что

$$\det\begin{pmatrix}B_3 & A_3B_3 & \dots & A_3^{2n+r}B_3\end{pmatrix}\neq 0, \tag{33}$$

где

$$A_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix},\qquad B_3=\begin{pmatrix}1\\ \\ E_s\\ \\ \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\det\begin{pmatrix}B_3 & A_3B_3 & \dots & A_3^{2n-r}B_3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ E_s & QE_s & \dots & Q^{2n+r}E_s\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}QE_s & \dots & Q^{2n+r}E_s\end{pmatrix}.$$

В силу (17) имеем $Q=S\Lambda S^{-1}$. Более того, очевидно, что $Q^i=S\Lambda^iS^{-1}\ \ \forall i$. Поэтому

$$\det\begin{pmatrix}QE_s & \dots & Q^{2n+r}E_s\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}S\Lambda S^{-1}E_s & S\Lambda^2S^{-1}E_s & \dots & S\Lambda^{2n+r}S^{-1}E_s\end{pmatrix}=$$

$$=\det(S\Lambda)\det\begin{pmatrix}S^{-1}E_s & \Lambda S^{-1}E_s & \dots & S\Lambda^{2n+r-1}S^{-1}E_s\end{pmatrix}=$$

$$=\det S\times\det\Lambda\times\prod_{i=1}^{2n+r}\left(S^{-1}E_s\right)_i\times\det\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{2n+r-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_{2n+r} & \dots & \lambda_{2n+r}^{2n+r-1}\end{pmatrix}=$$

$$=\det S\times\det\Lambda\times\prod_{i=1}^{2n+r}\left(\lambda_i'\times\left(S^{-1}E_s\right)_i\right)\times\prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{2n-r}\left(\lambda_j-\lambda_i\right),$$

где, как обычно, через $\left(S^{-1}E_s\right)_i$ обозначена i-я компонента вектора $S^{-1}E_s$. Таким образом, (33) имеет место в том и только в том случае, если выполнены условия леммы.

Доказательство утверждения 3. Применяя принцип максимума Понтрягина, легко показать, что число моментов переключения совпадает с числом нулей функции

$$F_{u_1,\dots,u2n+r}(t)=\sum_{i\in I}u_ie^{\lambda_{2i-1}t}+\sum_{i\in I}u_{n+i}e^{\lambda_{2i}t}+\sum_{j\in J}u_{2n-j}e^{\lambda_{2n+j}t}-1,\quad t\in[t_1,t_2],$$

где $u_1,\dots,u_{2n+r}$ – некоторые произвольные константы.

В силу леммы 2.2 (см. доказательство утверждения 2), для всех $\rho_1<\dots<\rho_{2n+r}$ линейная система

$$F_{u_1,\dots,u2n-r}(\rho_i)=0,\quad i=1,\dots,2n+r,$$

имеет единственное решение [5] $(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_{2n-r})$. Поэтому если $t_1<\rho_1<\dots<\rho_{2n+r}<t_2$, то функция $F_{\bar{u}_1,\dots,\bar{u}2n+r}(t)$ имеет на открытом интервале (t_1,t_2) ровно $2n+r$ нулей. Более того, в силу леммы 2.2 имеем

$$sign\,F_{\bar{u}_1,\dots,\bar{u}2n+r}(t_1)=(-1)^{M+1}. \tag{34}$$

1. Пусть M четно. Тогда в силу (34) структура оптимального управления $a^*(t)$ является следующей:

если r четно, то для всех $i\in\left\{0,1,\dots,n+\dfrac{r-2}{2}\right\}$

[5] Напомним: предполагается, что $\lambda_i\neq\lambda_j\quad\forall\,1\le i<j\le 2n+r$.

$$a^*(t)=\begin{cases}0, & t\in(\rho_{2i},\rho_{2i+1}),\\ \bar a, & t\in(\rho_{2i+1},\rho_{2i+2}),\\ 0, & t\in(\rho_{2n+r},\rho_{2n+r+1});\end{cases}\qquad(35)$$

если же r нечетно, то для всех $i\in\left\{0,1,\ldots,n+\dfrac{r-1}{2}\right\}$

$$a^*(t)=\begin{cases}0, & t\in(\rho_{2i},\rho_{2i+1}),\\ \bar a, & t\in(\rho_{2i+1},\rho_{2i+2}).\end{cases}\qquad(36)$$

Отметим, что если имеет место (19), то все возможные виды оптимального управления $a^*(t)$ могут быть записаны в единой форме (35) и (36) соответственно. Поэтому оптимальным значением целевого функционала является (18).

Для дальнейшего удобно ввести следующие формальные обозначения:

$$g_+(v)=\begin{cases}0, & v=0,\\ \bar a\cdot\left(\sum\limits_{j=1}^{v}(-1)^j e^{\rho_j\Lambda}\right)\Lambda^{-1}S^{-1}E, & v\in\{1,\ldots,2n+r\}.\end{cases}$$

Теперь прямыми вычислениями можно показать, что оптимальный вектор фазовых переменных имеет вид

$$X^*(t)=Se^{-t\Lambda}\cdot\left\{e^{t_0\Lambda}\left[S^{-1}\tilde X-\Lambda^{-1}S^{-1}L\right]+Y(t)\right\},\qquad(37)$$

причем если r четно, то для каждого $i\in\left\{0,1,\ldots,n+\dfrac{r-2}{2}\right\}$ имеем

$$Y(t)=\begin{cases}g_+(2i), & t\in[\rho_{2i},\rho_{2i+1}],\\ g_+(2i+1)+\bar a\cdot e^{t\Lambda}\Lambda^{-1}S^{-1}E, & t\in[\rho_{2i+1},\rho_{2i+2}],\\ g_+(2n+r), & t\in[\rho_{2n+r},\rho_{2n+r+1}];\end{cases}$$

если же r нечетно, то для каждого $i\in\left\{0,1,\ldots,n+\dfrac{r-1}{2}\right\}$ имеем

$$Y(t)=\begin{cases}g_+(2i), & t\in[\rho_{2i},\rho_{2i+1}],\\ g_+(2i+1)+\bar a\cdot e^{t\Lambda}\Lambda^{-1}S^{-1}E, & t\in[\rho_{2i+1},\rho_{2i+2}].\end{cases}$$

В силу непрерывности компонент вектора $X^*(t)$ и граничных условий моменты переключений $\rho_1,\ldots,\rho_{2n+r}$ должны удовлетворять (20).

2. Пусть M нечетно. Тогда в силу (34) структура оптимального управления $a^*(t)$ является следующей:

если r четно, то для всех $i\in\left\{0,1,\ldots,n+\dfrac{r-2}{2}\right\}$

$$a^*(t)=\begin{cases}\bar a, & t\in(\rho_{2i},\rho_{2i+1}),\\ 0, & t\in(\rho_{2i+1},\rho_{2i+2}),\\ \bar a, & t\in(\rho_{2n+r},\rho_{2n+r+1});\end{cases}\qquad(38)$$

если же r нечетно, то для всех $i\in\left\{0,1,\ldots,n+\dfrac{r-1}{2}\right\}$

$$a^*(t)=\begin{cases}\bar a, & t\in(\rho_{2i},\rho_{2i+1}),\\ 0, & t\in(\rho_{2i+1},\rho_{2i+2}).\end{cases}\qquad(39)$$

Отметим, что если имеет место (19), то все возможные виды оптимального управления $a^*(t)$ могут быть записаны в единой форме (38) и (39) соответственно. Поэтому оптимальным значением целевого функционала является (21).

Для дальнейшего удобно ввести следующие формальные обозначения:

$$g_-(v)=\bar{a}\times\left(\sum_{j=0}^{v}(-1)^{j+1}e^{\rho_j\Lambda}\right)\Lambda^{-1}S^{-1}E,\quad v\in\{0,1,\ \dots,\ 2n+r\}.$$

Прямыми вычислениями можно показать, что оптимальный вектор фазовых переменных имеет вид (37), причем при четном r имеем для каждого $i\in\left\{0,1,\dots,n+\dfrac{r-2}{2}\right\}$

$$Y(t)=\begin{cases} g_-(2i+1)+\bar{a}\cdot e^{t\Lambda}\Lambda^{-1}S^{-1}E, & t\in[\rho_{2i},\rho_{2i+1}],\\ g_-(2i+r), & t\in[\rho_{2i+1},\rho_{2i+2}],\\ g_-(2n+r)+\bar{a}\cdot e^{t\Lambda}\Lambda^{-1}S^{-1}E, & t\in[\rho_{2n+r},\rho_{2n+r+1}];\end{cases}$$

если же r нечетно, то для каждого $i\in\left\{0,1,\dots,n+\dfrac{r-1}{2}\right\}$ имеем

$$Y(t)=\begin{cases} g_-(2i)+\bar{a}\cdot e^{t\Lambda}\Lambda^{-1}S^{-1}E, & t\in[\rho_{2i},\rho_{2i+1}],\\ g_-(2i+1), & t\in[\rho_{2i+1},\rho_{2i+2}].\end{cases}$$

В силу непрерывности компонент вектора $X^*(t)$ и граничных условий, моменты переключений $\rho_1,\dots,\rho_{2n+r}$ должны удовлетворять (22).

Список литературы

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов: 2-е изд. М.: Наука, 1969.
2. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
3. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* Minimization of communication expenditure for seasonal products // RAIRO Operations Research. 2002. Vol. 36. P. 109–127.
4. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* A model for the marketing of a seasonal product with different goodwills for consumer and retailer // Journal of Statistics & Management Systems. 2003. Vol. 6. P. 115–133.
5. *Favaretto D. and Viscolani B.* A single season production and advertising control problem with bounded final goodwill // Journal of Information and Optimization Sciences. 2000. Vol. 21. P. 337–357.
6. *Nerlove M., Arrow K. J.* Optimal advertising policy under dynamic conditions // Economica. 1962. Vol. 29. P. 129–142.
7. *Seierstad A. and Sydsæter K.* Optimal Control Theory with Economic Applications. North-Holland: Amsterdam, 1987.

Материал поступил в редколлегию 23.06.2009

I. A. Bykadorov, E. Moretti, A. Ellero

A MODEL FOR MULTI-SEGMENT MARKETING

We consider a linear optimal control model for the marketing of seasonal products which are produced by the same firm and sold by retailers in different market segments. The horizon is divided in two consecutive non-intersecting intervals, production and selling periods, respectively. The production period state variables are the inventory levels and two kinds of goodwills (for consumers and for retailers) while the selling period state variables are the sales levels and the two kinds of goodwills. In the production interval there are three kinds of controls: on production, quality and advertising, while in the selling one the controls are on communication via advertising, promotion for consumers and incentives for retailers. We consider the case of several kinds of communications. The optimal control problem is transformed into an equivalent nonlinear programming problem.

Keywords: optimal control, advertising, seasonal products, segmentation.