

Opzioni su titoli che pagano dividendi: proprietà e tecniche di valutazione

MARTINA NARDON
<mnardon@unive.it>

PAOLO PIANCA
<pianca@unive.it>

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari Venezia

(Novembre 2009)

Abstract. Nell'affrontare il problema della valutazione di opzioni emesse su titoli azionari si deve tenere in considerazione la presenza del pagamento di uno o più dividendi. Tale problema risulta particolarmente importante anche per le negoziazioni del mercato italiano, soprattutto in seguito all'emissione dei contratti di opzione a lunga scadenza da parte di Borsa Italiana SpA. Solo recentemente è stata proposta in letteratura una soluzione analitica che può essere utilizzata nel caso di opzioni *call* europee e americane e di opzioni *put* europee. Per le opzioni *put* americane si deve ricorrere a metodi di valutazione di tipo numerico, primo fra tutti il metodo degli alberi binomiali che nelle sperimentazioni eseguite ha fornito ottime approssimazioni dei valori analitici. L'impiego del metodo binomiale richiede, peraltro, qualche accorgimento in quanto dopo lo stacco di un dividendo l'albero non ricombina dando luogo a una crescita non lineare nel numero dei nodi nei vari stadi. In questo contributo verranno analizzati alcuni modelli di valutazione di opzioni emesse su attività che pagano dividendi; particolare attenzione sarà rivolta al modello proposto da Haug *et al.* (2003) e ad alcuni metodi binomiali. Infine, verranno presentati alcuni esempi numerici.

Keywords: Option pricing, dividendi discreti, metodi binomiali.

JEL Classification Numbers: C63, G13.

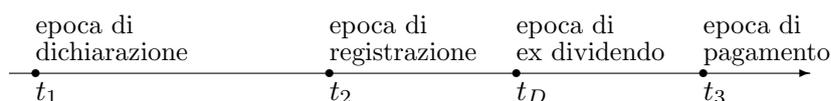
MathSci Classification Numbers: 60J65, 60HC35, 62L20.

Referente:

Martina Nardon Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari Venezia
Dorsoduro 3825/E
30123 Venice, Italy
Phone: [++39] 041 2346924
Fax: [++39] 041 5221756
E-mail: mnardon@unive.it

1 Introduzione

I dividendi sono una parte degli utili che vengono periodicamente distribuiti ai possessori dei titoli azionari. Il *payout ratio* esprime in termini percentuali la porzione di utili distribuiti. Alla data di dichiarazione, che di norma precede di alcuni giorni o di qualche settimana il pagamento effettivo, la società annuncia di distribuire un dividendo il cui ammontare può essere una percentuale del prezzo dell'azione osservato nel giorno dello stacco (tecnicamente si può parlare di *dividend yield* discreto) o una percentuale del valore nominale del titolo azionario o una somma di importo fissato (dividendo discreto). All'epoca di dichiarazione viene notificata la data di quotazione ex-dividendo, t_D . Dopo tale data il titolo azionario viene negoziato al netto del dividendo. All'epoca di registrazione, che di norma coincide con la data ex-dividendo (o la precede o la segue di alcuni giorni lavorativi), vengono ufficialmente identificati i possessori dei titoli che riceveranno il dividendo. Solo i proprietari dei titoli che vengono registrati hanno diritto a riscuotere il dividendo. La data del pagamento effettivo del dividendo segue di qualche giorno la data ex-dividendo. Di norma, per ragioni di semplicità, nei modelli finanziari si suppone che l'epoca di pagamento del dividendo coincida con la data ex-dividendo. Lo schema che segue sintetizza le varie epoche coinvolte con la distribuzione di un dividendo.



In Italia la maggior parte dei dividendi viene distribuita con cadenza annuale. In altri paesi la distribuzione del dividendo può verificarsi più volte in un anno.

Empiricamente si osserva che alla data ex-dividendo il prezzo del titolo azionario diminuisce di un ammontare proporzionale al pagamento del dividendo. Il fattore di proporzionalità dipende essenzialmente dalle varie forme di tassazione. Si dimostra facilmente che, se si vogliono escludere opportunità di arbitraggio, la diminuzione del prezzo del titolo azionario in seguito allo stacco deve coincidere con l'ammontare del dividendo netto.

Si consideri un'opzione call europea c , emessa su un titolo azionario che all'epoca $t = 0$ vale S_0 , con prezzo d'esercizio X e con scadenza all'epoca T ; sia, inoltre, r il tasso istantaneo di interesse su base annua che supponiamo noto e costante per tutta la durata dell'opzione. La famosa disuguaglianza di Merton (1973) relativa alla limitazione del prezzo di tale opzione

$$c_0 \geq \max [0, S_0 - X e^{-rT}] \quad (1)$$

può essere facilmente estesa al caso in cui, durante la vita dell'opzione, il titolo azionario (bene sottostante) paga, all'epoca $t_D < T$, un dividendo discreto D e diviene¹

$$c_0 \geq \max [0, S_0 - X e^{-rT} - D e^{-rt_D}] . \quad (2)$$

¹Le opzioni negoziate nei mercati regolamentati sono protette contro *stock splits*, cioè contro frazionamenti dei titoli azionari, e *stock dividends*, cioè contro nuove azioni concesse ai proprietari di vecchie azioni, ma non sono protette contro i dividendi in denaro, nel senso che il pagamento di un dividendo in denaro lascia invariati tutti i termini contrattuali. Le opzioni trattate nei mercati *over-the-counter* sono parzialmente protette dalla distribuzione di un dividendo in denaro in quanto, di norma, in seguito allo stacco di un dividendo si ha una riduzione del prezzo d'esercizio di un importo uguale al dividendo pagato.

Per la dimostrazione della disuguaglianza (2) si possono costruire i due portafogli:

Portafoglio A: un'opzione call europea e titoli a capitalizzazione integrale per un importo uguale a

$$D e^{-rt_D} + X e^{-rT};$$

Portafoglio B: un titolo azionario.

All'epoca di scadenza il valore del portafoglio A è

$$W_T^A = \begin{cases} S_T - X + X + D e^{r(T-t_D)} & \text{se } S_T \geq X \\ X + D e^{r(T-t_D)} & \text{se } S_T < X, \end{cases} \quad (3)$$

mentre il valore del portafoglio B, nell'ipotesi che il dividendo una volta incassato venga investito in titoli a capitalizzazione integrale, è

$$W_T^B = S_T + D e^{r(T-t_D)}. \quad (4)$$

Dato che per tutti i possibili valori del titolo azionario si ha $W_T^A \geq W_T^B$, la disuguaglianza (2) risulta verificata in base all'ipotesi di non arbitraggio.

Si osservi che nel caso di opzioni put europee con argomentazioni simili si può dimostrare che vale la disuguaglianza

$$p_0 \geq \max [0, X e^{-rT} - S_0 + D e^{-rt_D}]. \quad (5)$$

Si noti che la disuguaglianza (2) può essere facilmente estesa al caso in cui durante la vita dell'opzione il titolo azionario stacca due o più dividendi; nel caso in cui vengono distribuiti due dividendi di importo D_1 e D_2 , rispettivamente alle epoche t_1 e t_2 si ha

$$c_0 \geq \max [0, S_0 - X e^{-rT} - D_1 e^{-rt_1} - D_2 e^{-rt_2}]. \quad (6)$$

Per quanto riguarda poi la relazione di parità fra i prezzi di opzioni call e put di tipo europeo in presenza di un dividendo D pagato all'epoca t_D , dal confronto fra il precedente Portafoglio A e il

Portafoglio C: una put europea e un titolo azionario,

si ha

$$c_0 + D e^{-rt_D} + X e^{-rT} = p_0 + S_0. \quad (7)$$

Naturalmente, se l'uguaglianza (7) o le disuguaglianze (2) e (5) non sono verificate si presenta la possibilità di un arbitraggio. A tal proposito si deve precisare che è fondamentale verificare che i prezzi delle opzioni e dei titoli azionari siano osservati esattamente alla stessa epoca; inoltre, nel determinare l'esistenza di arbitraggi non si debbono trascurare i costi di transazione. Si osservi anche che la relazione di parità (7) vale solo per le opzioni europee; se le opzioni sono di tipo americano, si dimostra facilmente che l'equazione (7) si modifica nel modo seguente

$$C_0 + D e^{-rt_D} - X \leq P_0 + S_0 \leq C_0 + D e^{-rt_D} - X e^{-rT}, \quad (8)$$

dove C_0 e P_0 indicano rispettivamente il valore all'epoca $t = 0$ di un'opzione call e di un'opzione put di tipo americano.

2 Opzioni call americane su titoli azionari che pagano dividendi

Con riferimento ai mercati finanziari si noti che le opzioni sugli indici azionari negoziate nei mercati ufficiali sono prevalentemente di tipo europeo; quelle sui singoli titoli azionari sono di norma di tipo americano. È ben noto che non è mai conveniente esercitare anticipatamente un'opzione call americana emessa su un titolo azionario che non paga dividendi. Come si suole affermare *l'opzione vale più viva che morta*, ovvero la vendita è più vantaggiosa dell'esercizio. In presenza di dividendi pagati durante la vita dell'opzione, si verifica immediatamente che l'esercizio anticipato di una call americana può essere conveniente solo immediatamente prima di una data di stacco dei dividendi e pertanto la disuguaglianza (2) viene sostituita dalla seguente relazione²

$$C_0 \geq \max [0, S_0 - X e^{-rt_D}, S_0 - X e^{-rT} - D e^{-rt_D}] . \quad (9)$$

Si consideri un'opzione call americana su azioni; si supponga, e questo è il caso che si riscontra nella maggior parte dei mercati, che durante la vita dell'opzione il titolo azionario paghi un solo dividendo di ammontare D all'epoca $t_D < T$. Come osservato, in tal caso l'esercizio anticipato può risultare conveniente solo immediatamente prima della data di stacco: indichiamo con t_D^- tale epoca. Con l'esercizio si ottiene

$$S_{t_D^-} - X + D .$$

Se l'opzione non viene esercitata, a parità di altre condizioni, il prezzo dell'azione subito dopo lo stacco (epoca $t_D^+ = t_D$) si riduce a

$$S_{t_D} = S_{t_D^-} - D . \quad (10)$$

Chiaramente la convenienza all'esercizio, subito prima dello stacco del dividendo, dipende da numerosi fattori. In ogni caso, con l'esercizio all'epoca t_D si incassa il dividendo D , ma si versa X e quindi si perdono gli interessi dall'epoca t_D all'epoca di scadenza T . In effetti il verificarsi della disuguaglianza

$$D \leq X [1 - e^{-r(T-t_D)}] \quad (11)$$

costituisce una condizione sufficiente per la non convenienza all'esercizio anticipato di una opzione call americana³. Il significato pratico della relazione (11) si può sintetizzare affermando che non è conveniente esercitare un'opzione call americana subito prima dello stacco del dividendo se l'ammontare del dividendo è inferiore all'interesse che si percepisce

²Nel caso di un'opzione *put* americana si ha la seguente limitazione

$$P_0 \geq \max [0, X e^{-rt_D} - S_0 + D e^{-rt_D}, X - S_0] .$$

³Nel caso di un'opzione *put* americana si deve tenere presente che lo stacco di un dividendo comporta un incremento del valore dell'opzione: Relativamente alla facoltà di esercizio anticipato di un'opzione *put* americana, il possessore si trova di fronte a un dilemma nel senso che se non esercita l'opzione perde l'interesse derivante dall'esercizio e se la esercita non trae profitto dal fatto che la *put* si incrementa di valore in seguito allo stacco di un dividendo. Ovviamente l'esercizio in $t < T_D$ dà un profitto massimo se $S_t = 0$; se in $t = 0$

implicitamente rimandando fino alla data di scadenza il versamento del prezzo d'esercizio. I fondamenti logici che stanno alla base dell'equazione (11) si possono utilizzare anche nel caso in cui durante la vita dell'opzione vengono distribuiti più dividendi di importo noto D_1, \dots, D_n . Non risulta conveniente l'esercizio subito prima dello stacco del dividendo D_i se l'ammontare del dividendo è minore dell'interesse che si può ottenere rimandando il pagamento del prezzo d'esercizio fino all'epoca dello stacco del dividendo successivo, cioè se

$$D_i \leq X \left[1 - e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \right]. \quad (12)$$

D'altra parte, può risultare conveniente l'esercizio subito prima dello stacco del dividendo se all'epoca t_D^- vale la disuguaglianza

$$D > X \left[1 - e^{-r(T-t_D)} \right]. \quad (13)$$

Infatti, supposto per semplicità che sia all'epoca dello stacco t_D sia all'epoca di scadenza T l'opzione sia *in-the-money* ($S_{t_D} > X$ e $S_T > X$), l'esercizio subito prima dello stacco è conveniente se il valore del portafoglio che si ottiene in seguito all'incasso del dividendo supera il valore dell'opzione non esercitata, cioè se

$$D + S_{t_D^-} - X > c(S_{t_D}, X, T - t_D). \quad (14)$$

Quest'ultima disuguaglianza valutata all'epoca di scadenza diviene

$$D e^{r(T-t_D)} + S_T - X e^{r(T-t_D)} > S_T - X; \quad (15)$$

relazione che, una volta semplificata, coincide con la disuguaglianza (13).

Si osservi che la disuguaglianza (13) è verificata se la data di stacco è vicina alla scadenza (la differenza $T - t_D$ è "piccola") e se il dividendo è "alto". Dopo lo stacco del dividendo le opzioni call europee e americane, a parità di condizioni, hanno lo stesso valore.

3 Dividendi e dinamica continua dei prezzi azionari

Le relazioni e le proprietà discusse nel paragrafo precedente non hanno richiesto alcuna ipotesi relativamente alla dinamica dei prezzi del titolo azionario sottostante. Se come spesso accade si suppone che i prezzi siano governati da un processo aleatorio di tipo *moto browniano geometrico*, e se si accettano le usuali ipotesi sull'efficienza dei mercati, si può cercare di estendere il modello di Black e Scholes (1973) con lo scopo di ottenere una formula analitica che consenta di valutare un'opzione emessa su un titolo azionario che durante la vita dell'opzione paga uno o più dividendi.

La dinamica moto browniano geometrico, che di solito viene ipotizzata per descrivere il comportamento dei prezzi dei titoli azionari, soddisfa all'equazione differenziale stocastica

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad S_0 > 0, \quad (16)$$

si ha $S_0 = 0$, l'esercizio immediato comporta all'epoca dello stacco t_D l'interesse

$$X(e^{rt_D} - 1).$$

Pertanto, se

$$D > X[e^{rt_D} - 1];$$

l'esercizio anticipato non è conveniente in $[0, t_D]$.

dove $\sigma > 0$ è la volatilità dei rendimenti istantanei dei prezzi e $W = (W_t)_{t \geq 0}$ è un moto browniano (o *processo di Wiener*) standard, considerato in una misura di probabilità neutrale al rischio. Nel caso in cui è prevista la distribuzione un dividendo ad un tasso istantaneo di ammontare q su base annua (*dividend yield* continuo)⁴, il processo dei prezzi soddisfa alla seguente equazione differenziale stocastica

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad S_0 > 0. \quad (17)$$

Una applicazione del *lemma di Itô* consente di affermare che l'equazione (17) ha la seguente soluzione⁵

$$S_t = S_0 e^{(r-q-\sigma^2/2)t + \sigma W_t} \quad S_0 > 0. \quad (18)$$

Si noti che sia S_t , soluzione dell'equazione (18), che la soluzione della (16), per $t \geq 0$, sono variabili aleatorie distribuite in modo log-normale.

Se il dividendo viene distribuito solo in corrispondenza di poche epoche, l'ipotesi di una dinamica del tipo (17) non può essere accettata in quanto poco rappresentativa della realtà. Un approccio possibile in tal caso prevede che i dividendi siano pagati in corrispondenza di specificate epoche t_1, t_2, \dots, t_J , e che l'ammontare di ciascun dividendo sia proporzionale al prezzo dell'azione osservato al momento dello stacco. Tale ipotesi trova una giustificazione accettabile se si considera un processo dei prezzi che riguarda un orizzonte temporale piuttosto lungo. La proporzionalità del dividendo assicura che, se il prezzo del titolo azionario aumenta, il dividendo si incrementa in termini assoluti. Formalmente il processo dei prezzi ipotizzato nel caso di un insieme di dividendi proporzionali ai prezzi rilevati all'epoca di stacco è

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t - \sum_{t_j \leq t} D_j dS_{t_j} \quad j = 1, \dots, J, \quad 0 \leq t_j \leq t, \quad (19)$$

dove D_j rappresenta il dividendo, espresso in termini percentuali rispetto al prezzo del titolo e pagato all'epoca t_j . La soluzione dell'equazione (19) è

$$S_t = \prod_{j=1}^J (1 - D_j) S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t + \sigma W_t}. \quad (20)$$

Tale soluzione non dipende dalle epoche di stacco dei dividendi e risulta ancora di tipo log-normale; il pagamento dei dividendi viene sintetizzato con un aggiustamento del prezzo iniziale.

Se il periodo di tempo considerato non è particolarmente lungo, e questo è il caso che maggiormente interessa nella pratica quando si considerano opzioni emesse sui singoli titoli azionari, i dividendi vengono notificati dalle società come importi monetari di ammontare specificato (non proporzionale al prezzo del titolo azionario), che vengono pagati agli azionisti nelle epoche *ex-dividendo*. Nel caso di un unico dividendo D pagato all'epoca t_D , il processo dei prezzi si presenta discontinuo e del tipo

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t dW_t & t \neq t_D \\ S_{t_D^+} &= S_{t_D^-} - D, \end{aligned} \quad (21)$$

⁴Sotto tale ipotesi, il dividendo pagato nell'intervallo temporale di ampiezza dt è $(q S_t dt)$, proporzionale al tasso q e al prezzo dell'attività sottostante all'epoca t .

⁵La soluzione dell'equazione (16) si ottiene per $q = 0$.

dove $S_{t_D^-}$ e $S_{t_D^+}$ rappresentano rispettivamente i livelli dei prezzi subito prima e subito dopo lo stacco del dividendo D . A causa di tale discontinuità, la soluzione non è più log-normale e dipende dall'epoca di stacco del dividendo. La soluzione dell'equazione (21) risulta essere

$$S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma W_t} - D e^{(r-\sigma^2/2)(t-t_D)+\sigma W_{t-t_D}} I_{\{t \geq t_D\}}, \quad (22)$$

dove $I_{\{t \geq t_D\}}$ è la funzione indicatrice⁶ dell'evento $\{t \geq t_D\}$.

Si noti che si possono calcolare facilmente i momenti della soluzione (22). Ad esempio, il valore atteso dei prezzi azionari futuri in presenza di un dividendo discreto è⁷

$$\mathbb{E}(S_t) = e^{rt} (S_0 - D e^{-rt_D} I_{\{t_D \geq t\}}). \quad (23)$$

Esempio 1 Con lo scopo di confrontare l'impatto delle diverse ipotesi presentate sulla distribuzione dei dividendi la figura 1 mostra una realizzazione dei vari processi presentati; precisamente, TR1 è una realizzazione del processo PA senza dividendi, TR2 è una realizzazione del processo PB con dividend yield continuo q , TR3 è una realizzazione del processo PC con dividend yield discreto $D_1 = q_1 S_{t_D}$, TR4 è una realizzazione del processo PD con dividendo discreto in denaro D . Le traiettorie sono basate su una discretizzazione a 100 passi delle dinamiche presentate in precedenza (si vedano le relazioni (16), (17), (19) e (21)) e si riferiscono alla seguente scelta dei parametri: $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $q = 0.1$, $q_1 = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$, $t_D = 0.5$, $D_{t_D} = 10$. La relazione utilizzata per la costruzione delle traiettorie⁸, nel caso senza dividendi, è

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \epsilon}$$

con ϵ numero casuale generato da una distribuzione normale standard $\mathcal{N}(0,1)$. Si noti che in corrispondenza dell'epoca di stacco del dividendo, t_D , le traiettorie TR3 e TR4 subiscono un "salto" di ampiezza D_1 e D , rispettivamente.

Si osservi che dall'epoca iniziale $t = 0$ e fino all'epoca di stacco del dividendo t_D le traiettorie dei processi PA, PC e PD coincidono, mentre la traiettoria del processo PB si colloca più in basso dando luogo a una differenza delle quotazioni che tende ad aumentare con il trascorrere del tempo. Si noti anche che la traiettoria del processo PC riportata in figura prevede che il pagamento del dividend yield discreto avvenga quando il prezzo

⁶Si ha

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

⁷Con riferimento al caso $t > t_D$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t) &= S_0 \mathbb{E} \left(e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t} \right) - D \mathbb{E} \left(e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(t-t_D)+\sigma W_{t-t_D}} \right) \\ &= S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\frac{\sigma^2}{2}t} - D e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(t-t_D)+\frac{\sigma^2}{2}(t-t_D)} \\ &= S_0 e^{rt} - D e^{r(t-t_D)} \\ &= e^{rt} (S_0 - D e^{rt_D}), \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza discende dal valore medio di una variabile aleatoria log-normale.

⁸Nella relazione ricorsiva si è considerato $\Delta t = T/n$, con $n = 100$.

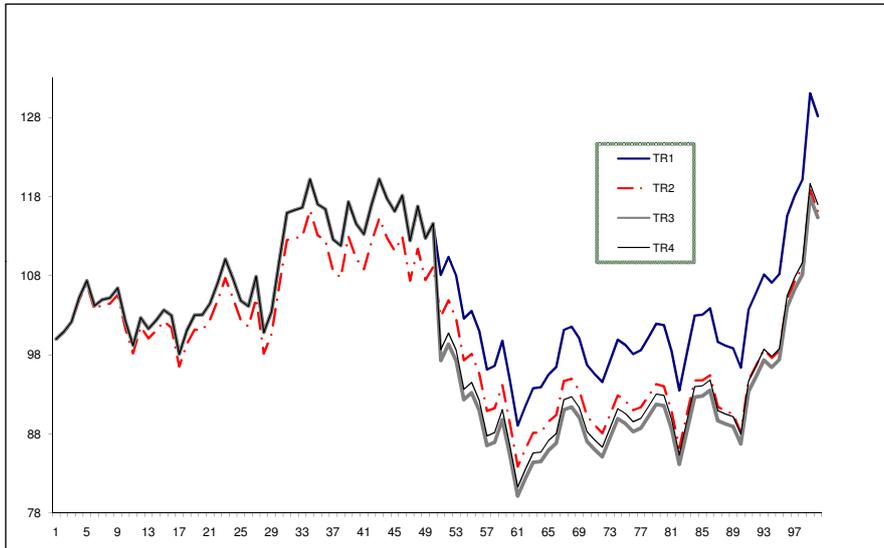


Figura 1: Dinamica browniana del prezzo di un titolo azionario con $S_0 = 100$, $\sigma = 0.3$, $t_D = 0.5$, $T = 1$, in assenza di dividendi (processo PA , traiettoria TR1), con “dividend yield” continuo $q = 0.1$ (processo PB , traiettoria TR2), con “dividend yield” discreto q_1 (processo PC , traiettoria TR3) e con dividendo in denaro $D_{t_D} = 10$ (processo PD , traiettoria TR4).

dell'attività sottostante è pari a $S_{t_D} = 114.58$, dando luogo a un dividendo discreto D_1 maggiore dell'ammontare del dividendo in denaro D ,

$$D_1 = 0.1 \cdot S_{t_D} = 11.458 > D = 10.$$

Ne deriva che il salto della traiettoria del processo PC ha un'ampiezza superiore rispetto al salto della traiettoria del processo PD . Ovviamente si ha un effetto opposto se si considerano traiettorie con $S_{t_D} < 100$. I salti delle due traiettorie dei processi PC e PD hanno la stessa ampiezza se solo se $D = q \cdot S_{t_D}$. □

4 Modelli a tempo continuo per la valutazione di opzioni europee

Il prezzo teorico di un'opzione call europea in assenza di dividendi è dato dalla famosa formula di Black-Scholes⁹

$$c_{BS} = S_0 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2), \quad (24)$$

⁹Nel caso di un'opzione put di tipo europeo la formula diviene

$$p_{BS} = X e^{-rT} N(1 - d_2) - S_0 N(1 - d_1).$$

con

$$d_1 = \frac{\log \frac{S_0}{X} + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

dove $N(\cdot)$ è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria normale standard.

Se il bene sottostante paga un dividend yield continuo q , il prezzo dell'opzione call è

$$c_{Me} = S_0 e^{-qT} N(h_1) - X e^{-rT} N(h_2), \quad (25)$$

con

$$h_1 = \frac{\log \frac{S_0}{X} + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad h_2 = h_1 - \sigma\sqrt{T},$$

come dimostrato da Merton (1973).

Nel caso di un dividend yield discreto, con dividendo di importo D_1 pagato all'epoca t_D , si ha che il prezzo dell'opzione call europea all'epoca $t \geq 0$ è dato dalla formula

$$c(S_t, X; D_1) = \begin{cases} c_{BS}(S_t, X), & t > t_D \\ (1 - D_1) c_{BS}\left(S_t, \frac{X}{1 - D_1}\right) & t < t_D. \end{cases} \quad (26)$$

Si noti che nella formula di valutazione (26) non compare l'epoca in cui il dividend yield discreto viene pagato. Prima dello stacco del dividendo l'opzione è equivalente a $(1 - D_1)$ opzioni standard, ciascuna delle quali permette di acquistare alla scadenza un titolo azionario pagando $X/(1 - D_1)$. La formula di valutazione (26) può essere estesa al caso di n dividendi D_1, \dots, D_n pagati in base a dividend yield discreti $q_1 = D_1/S_{t_1}, \dots, q_n = D_n/S_{t_n}$, alle epoche t_1, \dots, t_n e si ha

$$c(S_t, X; D_1, \dots, D_n) = (1 - D_1) \cdots (1 - D_n) c\left(S_t, \frac{X}{(1 - D_1) \cdots (1 - D_n)}\right). \quad (27)$$

Il caso di dividendi discreti è indubbiamente il più difficile da analizzare e solo recentemente è stata proposta una rappresentazione integrale che consente di calcolare il valore "esatto" di un'opzione call in presenza di un dividendo discreto e non proporzionale.

I problemi connessi con la valutazione di opzioni in presenza di uno o più dividendi discreti e non proporzionali al prezzo dell'attività sottostante sono stati analizzati da numerosi autori. Inizialmente si è cercato di superare le difficoltà di trattare analiticamente la non log-normalità della soluzione (22), relativa alla dinamica dei prezzi in presenza di un dividendo discreto, definendo il prezzo del titolo azionario "cum dividendo" come la differenza fra il prezzo di mercato e il dividendo atteso attualizzato. Questa semplificazione sta alla base della procedura approssimata proposta da Merton (1973) e successivamente perfezionata da altri autori. La formula di valutazione proposta prevede di valutare l'opzione call con il modello di Black e Scholes, sostituendo semplicemente al prezzo del bene sottostante S_0 , osservato all'epoca di valutazione $t = 0$, la differenza

$$\bar{S} = S_0 - e^{-rt_D} D. \quad (28)$$

In tal modo si ottiene

$$c_{Me} = \bar{S} N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2), \quad (29)$$

con

$$d_1 = \frac{\log(\bar{S}/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Se durante la vita dell'opzione il titolo azionario sottostante paga n dividendi D_1, D_2, \dots, D_n rispettivamente alle epoche t_1, t_2, \dots, t_n , si può ancora utilizzare il modello (29) con

$$\bar{S} = S - \sum_{k=1}^n D_k e^{-r t_k}. \quad (30)$$

Dato che questa sostituzione comporta, prima dello stacco del dividendo, una diminuzione del prezzo del titolo azionario con un conseguente calo della volatilità assoluta $S\sigma$, la procedura proposta da Merton ha l'effetto di sottovalutare le opzioni call con un errore che risulta più marcato man mano che la data dello stacco si avvicina all'epoca di scadenza dell'opzione.

Alcuni autori hanno riconosciuto che la procedura proposta da Merton non può da sola risolvere il problema della presenza di un dividendo discreto e hanno suggerito degli aggiustamenti della formula di Black e Scholes che, oltre a considerare l'attualizzazione dei dividendi, prevedono di intervenire modificando la volatilità.

In tale direzione una formula molto diffusa nell'ambiente degli operatori (si veda ad esempio Chriss, 1997), consiste nel sostituire la volatilità σ con

$$\sigma_{Ch} = \frac{\sigma S}{S - e^{-r t_D} D}. \quad (31)$$

La formula di valutazione di un'opzione call europea diviene pertanto

$$c_{Ch} = \bar{S} N(g_1) - X e^{-r T} N(g_2), \quad (32)$$

con

$$g_1 = \frac{\log(\bar{S}/X) + (r + \sigma_{Ch}^2/2)T}{\sigma_{Ch}\sqrt{T}} \quad g_2 = g_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Questo approccio incrementa la volatilità relativa rispetto alla procedura precedente e tipicamente comporta una sovrastima delle valutazioni che risulta meno rilevante al crescere dell'intervallo $t_D - t_0$.

Una modifica più sofisticata della volatilità, proposta da Bener e Vorst (2001), consiste nel pesare nel calcolo della volatilità l'epoca dello stacco del dividendo, ottenendo

$$\sigma_{BV} = \sqrt{\frac{\sigma_{Ch}^2 t_D + \sigma^2 (T - t_D)}{T}}. \quad (33)$$

Un aggiustamento ancora più elaborato della varianza è stato proposto da Bos *et al.* (2003). Tale modifica, nel caso di un solo dividendo D pagato all'epoca t_D , prevede di considerare la seguente espressione per la varianza

$$\begin{aligned} \sigma_{BGS}^2 = \sigma^2 + \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2T}} \left\{ 4e^{(z_1^2/2 - \log S_0)} + D e^{-r t_D} \left[N(z_1) - N\left(z_1 - \frac{\sigma t_D}{\sqrt{T}}\right) \right] \right. \\ \left. + e^{(z_2^2/2 - 2 \log S_0)} D e^{-r t_D} \left[N(z_2) - N\left(z_2 - \frac{2\sigma t_D}{\sqrt{T}}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

con

$$z_1 = \frac{\log S_0 - \log [(X + D)e^{-r T}]}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \quad z_2 = z_1 + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}.$$

Un approccio totalmente diverso dai precedenti, proposto da Bos e Vandermark (2002), consiste nell'apportare modifiche congiunte sia al prezzo del titolo azionario sia al prezzo d'esercizio. Tale modifica prevede di sostituire nella formula BS il prezzo del bene sottostante S_0 con $S_0 - K_n$ e il prezzo d'esercizio X con $X + K_f e^{rT}$, dove

$$K_f = \frac{T - t_D}{T} D e^{r(T-t_D)} \quad \text{e} \quad K_n = \frac{t_D}{T} D e^{-rt_D} \quad (35)$$

rappresentano rispettivamente la parte "vicina" e la parte "lontana" del dividendo atteso.

La formula "esatta" di valutazione per le opzioni call europee in presenza di un dividendo discreto e non proporzionale è stata stata proposta recentemente da Haug *et al.* (2003) ed è basata sulla seguente rappresentazione integrale

$$c_{HHL}(S_0; D, t_D) = e^{-rt_D} \int_d^\infty c_{BS}(S_x - D, T - t_D) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad (36)$$

dove

$$d = \frac{\log(D/S_0) - (r - \sigma^2/2)t_D}{\sigma\sqrt{t_D}}, \quad (37)$$

$$S_x = S_0 e^{(r - \sigma^2/2)t_D + \sigma\sqrt{t_D}x} \quad (38)$$

e $c_{BS}(S_x - D, T - t_D)$ rappresenta il prezzo di un'opzione call europea calcolato con la formula di Black-Scholes in assenza di dividendi e con tempo alla scadenza $T - t_D$.

L'idea fondamentale che sta alla base della rappresentazione integrale (36) è che un istante dopo il pagamento del dividendo, epoca t_D^+ , il prezzo dell'opzione si riduce al prezzo di un'opzione in assenza di dividendi; subito prima dello stacco il prezzo dell'opzione è dato dal valore atteso attualizzato del prezzo di un'opzione call europea in assenza di dividendi, aggiustato per il pagamento del dividendo e quindi

$$c_{HHL}(S_0; D, t_D) = e^{-rt_D} \int_D^\infty c_E(S - D, t_D) \phi(S_0, S, t_D) dS, \quad (39)$$

dove $\phi(S_0, S, t_D)$ è la probabilità di transizione da S_0 ad S tra l'epoca $t = 0$ e $t = t_D$ (funzione di densità log-normale nel caso in cui la dinamica di S sia governata da un moto browniano geometrico). La dimostrazione¹⁰ della formula HHL è basata sulla neutralità al rischio e sull'osservazione che il prezzo dell'opzione è una funzione continua anche per $t = t_D$.

Si osservi, inoltre, che la relazione di parità consente di valutare a partire dalla formula (36) anche le opzioni put europee in presenza di un dividendo discreto. In ogni caso si noti che l'impiego della formula di valutazione proposta da Haugh *et al.* richiede particolare attenzione in quanto la funzione integranda si presenta come prodotto di due fattori che tendono rispettivamente a infinito e a zero. Inoltre, la (36) si presenta come integrale improprio e si richiede particolare attenzione nel troncamento dell'intervallo di integrazione.

5 Modelli a tempo continuo per la valutazione di opzioni americane

La prima procedura approssimata per la valutazione di un'opzione call americana in presenza di un dividendo discreto pagato all'epoca t_D è stata proposta dallo stesso Black (1975).

¹⁰Per maggiori dettagli si rinvia al contributo di Haug *et al.* (2003).

Tale approssimazione prevede di considerare come prezzo teorico il maggiore fra i prezzi di BS di due call: la prima scade all'epoca t_D , la seconda scade all'epoca T e considera come prezzo del bene sottostante la differenza $S_0 - De^{-rt_D}$.

Un modello, molto utilizzato e codificato in numerosi software commerciali, per la valutazione di opzioni call americane su titoli che pagano un dividendo discreto è stato proposto, semplificato e corretto rispettivamente da Roll (1977), Geske (1979a) e (1981), e Whaley (1981); tale modello (che verrà indicato con l'acronimo RGW), applica un approccio di tipo opzione composta per tenere conto della possibile convenienza dell'esercizio anticipato.

Il modello RGW si può sintetizzare nella formula seguente

$$C_0 = (S_0 - De^{-rt_D}) N(b_1) + (S_0 - De^{-rt_D}) N_2 \left(a_1, -b_1, -\sqrt{\frac{t_D}{T}} \right) - Xe^{-rT} N_2 \left(a_2, -b_2, -\sqrt{\frac{t_D}{T}} \right) - (X - D)e^{-rt_D} N(b_2) \quad (40)$$

dove

$$a_1 = \frac{\log [(S_0 - De^{-rt_D})/X] + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$$b_1 = \frac{\log [(S_0 - De^{-rt_D})/S^*] + (r + \sigma^2/2)t_D}{\sigma\sqrt{t_D}} \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{t_D}.$$

La funzione $N_2(\cdot, \cdot, \cdot)$ è la distribuzione normale bi-variata con coefficiente di correlazione $\rho = -\sqrt{t_D/T}$ e il prezzo al quale è ottimale esercitare S^* è la soluzione dell'equazione¹¹

$$c(S^*, X, T - t_D) = S^* + D - X, \quad (41)$$

con $c(S^*, X, T - t_D)$ prezzo di BS di un'opzione call europea su un titolo il cui prezzo è S^* e vita residua $T - t_D$. Il prezzo S^* , può essere determinato in anticipo, senza dover attendere l'epoca t_D , ed è detto prezzo "critico" in quanto in corrispondenza di tale prezzo per il possessore dell'opzione americana è indifferente esercitare l'opzione all'epoca di stacco del dividendo o mantenerne il possesso fino alla scadenza. La determinazione del prezzo critico S^* richiede, comunque, l'impiego di una procedura di tipo iterativo.

La formula RGW è basata sulla costruzione di un portafoglio formato da tre opzioni call europee che replicano il payoff dell'opzione call americana e che tengono in considerazione la possibilità di esercizio anticipato subito prima della data ex-dividendo. Di questi portafogli replicanti se ne possono costruire più di uno e questo fatto spiega il motivo per cui la formula di valutazione si può trovare in letteratura con espressioni differenti. Un portafoglio replicante è formato da due call in posizione lunga con prezzo d'esercizio rispettivamente X e $S^* + D$ e con scadenza rispettivamente T e t_D^- ; la terza opzione del portafoglio replicante è un'opzione composta di tipo call su call in posizione corta sulla prima delle due call in posizione lunga, con prezzo d'esercizio $S^* + D - X$ e scadenza in t_D^- . Si può facilmente provare che effettivamente il portafoglio ora descritto replica l'opzione call americana emessa su un titolo azionario che all'epoca t_D paga un dividendo di ammontare

¹¹L'equazione (41) evidenzia l'uguaglianza fra il profitto che si ottiene con l'esercizio e il valore di continuazione.

D . A tal proposito si osservi che un istante prima dello stacco del dividendo la struttura del payoff dell'opzione americana è

$$C(S_{t_D^-}, t_D^-) = \begin{cases} S_{t_D^-} + D - X & \text{se } S_{t_D^-} \geq S^* \\ c(t_D^+, X, T - t_D) & \text{se } S_{t_D^-} < S^*. \end{cases} \quad (42)$$

dove:

- $S_{t_D^-} + D - X$ è il valore di esercizio dell'opzione americana,
- $c(t_D^+, X, T - t_D)$ è il valore dell'opzione europea che ha le stesse caratteristiche dell'opzione americana e con la quale non vi sono differenze dopo lo stacco del dividendo,
- S^* il valore critico dell'azione al di sopra del quale l'opzione americana viene esercitata.

Si verifica facilmente che all'epoca t_D^- il portafoglio formato dalle tre opzioni ha una struttura di payoff che è sintetizzata nella tabella 1 e che coincide con il payoff dell'opzione americana come descritto dalla relazione (42).

Tabella 1: Payoff all'epoca t_D^- del portafoglio replicante l'opzione call americana

	$S_{t_D^-} \geq S^*$		$S_{t_D^-} < S^*$	
	Azione	Valore	Stato	Valore
a) 1 ^a opzione europea	ceduta in seguito all'esercizio della composta	$S_{t_D^-} + D - X$	viva	$c(S(t_D, X, T - t_D))$
b) 2 ^a opzione europea	esercitata	$S_{t_D^-} - S^* - (S^* + D)$	scade senza valore	0
c) opzione composta	esercitata	$S_{t_D^-} + D - X - S^* - D + X$	scade senza valore	0
Risultato: a) + b) - c)		$S_{t_D^-} + D - X$		$c(t_D, X, T - t_D)$

Per quanto riguarda la valutazione del portafoglio replicante, si noti che il prezzo delle due opzioni call in posizione lunga è calcolabile con la formula di Black-Scholes. Il prezzo della call in posizione corta è ottenibile dalla teoria delle opzioni composte (si veda Geske, 1979b). Combinando le varie formule di valutazione e semplificando si ottiene la formula (40).

Il modello RGW è stato considerato per più di venti anni come una brillante soluzione in forma chiusa al problema di valutare opzioni call americane su titoli azionari che pagano un dividendo discreto. Sebbene alcuni autorevoli testi considerino tuttora la formula (40) come la soluzione esatta (si vedano ad esempio Hull, 2006, e Whaley, 2006), in effetti tale modello non dà sempre buoni risultati. Si possono addirittura presentare delle situazioni

nelle quali l'impiego della formula RGW consente di effettuare degli arbitraggi. Ad esempio, si consideri un'opzione call americana emessa su un titolo azionario con quotazione $S_0 = 100$ che paga un dividendo $D = 4$ all'epoca $t_D = 51$ settimane, con prezzo d'esercizio $X = 100$, tasso di interesse $r = 0.05$, volatilità $\sigma = 0.3$ e scadenza $T = 1$. Utilizzando la formula RGW si ottiene $C_{RGW} = 13.64$. Consideriamo un'altra call americana emessa sullo stesso titolo azionario, con analoghe caratteristiche ma con scadenza in $T = 50$ settimane, una settimana prima dello stacco del dividendo. Per prezzare questa seconda opzione (call americana su un bene che non paga dividendi) si può usare il modello di Black-Scholes e si ottiene $C_{BS} = 13.92 > 13.64 = C_{RGW}$. Si ha quindi un'opportunità di arbitraggio. Se poi il dividendo staccato è $D = 10$ si ha $C_{RGW} = 12.96$ e quindi l'entità dell'arbitraggio diviene ancora più rilevante.

Lo stesso Whaley (2006), nella sua recente monografia, riporta un esempio che evidenzia i limiti del modello RGW. I dati riportati da Whaley relativi all'opzione call americana in presenza di un dividendo discreto sono: $S_0 = X = 50$, $T = 90$ giorni, $\sigma = 0.36$, $D_{t_D} = 2$, $t_D = 75$ giorni, $r = 0.05$. Con tali dati il prezzo critico è $S^* = 49.060$ e il valore della call americana in base al modello RGW è $C_{RGW} = 3.445$, mentre il valore corretto è 3.57041 . Non si accorge Whaley che il prezzo di Black-Scholes di un'opzione call europea con le stesse caratteristiche dell'opzione americana ma con scadenza il giorno prima dello stacco del dividendo ($T = 74/365$) è 3.47193 e quindi tale prezzo risulta superiore a quello dell'opzione americana che stacca un dividendo all'epoca $t_D = 75/365$.

La spiegazione della scarsa precisione della formula RGW è dovuta al fatto che il modello RGW, come tutte i modelli basati sull'attualizzazione dei dividendi futuri, non è specificato correttamente dato che prevede che la dinamica del prezzo del bene sottostante sia regolata da un moto browniano geometrico. In effetti, come risulta dalla precedente relazione (21) il processo dei prezzi non è un moto browniano geometrico in tutto l'intervallo $[0, T]$ in quanto in t_D presenta un salto di ampiezza D .

Anche per la valutazione delle opzioni call americane in presenza di un dividendo in denaro è disponibile una rappresentazione integrale proposta ancora da Haug *et al.* (2003) e sintetizzata dalla seguente espressione

$$C_{HHL}(S_0; D, t_D) = e^{-rt_D} \int_d^\infty \max\{S_x - X, c_{BS}(S_x - D, T - t_D)\} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad (43)$$

dove d ed S_x sono specificati dalle formule (37) e (38).

6 Applicazioni numeriche dei modelli continui

Con lo scopo di illustrare i vari approcci proposti in letteratura per la valutazione di opzioni call sia europee che americane emesse su titoli che pagano dividendi è stata effettuata una approfondita analisi numerica che viene in parte sintetizzata nelle tabelle 2 e 3. In particolare, la tabella 2 si riferisce a opzioni di tipo europeo emesse su titoli azionari con valore corrente $S_0 = 100$ che pagano un dividendo discreto $D = 5$ e che hanno volatilità $\sigma = 0.2$. Il tasso di interesse su base annua è $r = 0.05$. L'analisi è condotta al variare del prezzo d'esercizio e dell'epoca di pagamento del dividendo. I simboli riportati all'inizio di ciascuna colonna della tabella dei valori hanno il seguente significato:

BS73 è la formula di Black-Scholes per la valutazione delle opzioni call standard,

Tabella 2: Valutazione di opzioni call europee emesse su titoli azionari che pagano un dividendo $D = 5$, $S_0 = 100$, $T = 1$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$.

t_D	X	$BS73$	HHL	$Me73$	$Ch97$	BV	$BSG03$	$BV02$
0.01	70	33.5401	28.6568	28.6561	28.7302	28.6568	28.6567	28.6569
	85	20.4693	16.2285	16.2258	16.4975	16.2285	16.2283	16.2285
	100	10.4506	7.5163	7.5122	7.9091	7.5173	7.5161	7.5126
	115	4.4666	2.8831	2.8797	3.2158	2.8831	2.8829	2.8828
	130	1.6396	0.9481	0.9461	1.1445	0.9481	0.9480	0.9478
0.25	70	33.5401	28.7323	28.7139	28.7867	28.7314	28.7312	28.7374
	85	20.4693	16.3429	16.2745	16.5393	16.3412	16.3390	16.3458
	100	10.4506	7.6444	7.5443	7.9363	7.4642	7.6390	7.6426
	115	4.4666	2.9785	2.8959	3.2286	2.9700	2.9742	2.9731
	130	1.6396	0.9997	0.9528	1.1494	1.0014	0.9973	0.9948
0.5	70	33.5401	28.8120	28.7734	28.8448	28.8082	28.8085	28.8151
	85	20.4693	16.4621	16.3248	16.5854	16.4557	16.4542	16.4658
	100	10.4506	7.7740	7.5774	7.9641	7.7732	7.7656	7.7716
	115	4.4666	3.0730	2.9128	3.2418	3.0784	3.0649	3.0659
	130	1.6396	1.0501	0.9597	1.1544	1.0563	1.0457	1.0437
0.75	70	33.5401	28.8927	28.8322	28.9022	28.8841	28.8886	28.8951
	85	20.4693	16.5811	16.3744	16.6311	16.5674	16.5692	16.5837
	100	10.4506	7.8997	7.6101	7.9922	7.8985	7.8856	7.8978
	115	4.4666	3.1625	2.9294	3.2549	3.1748	3.1511	3.1574
	130	1.6396	1.0972	0.9666	1.1595	1.102	1.0911	1.0926
0.99	70	33.5401	28.9711	28.8879	28.9567	28.9560	28.9656	28.9712
	85	20.4693	16.6947	16.4216	16.6744	16.6719	16.6793	16.6949
	100	10.4506	8.0166	7.6412	8.0187	8.0150	7.9973	8.0165
	115	4.4666	3.2442	2.9452	3.2674	3.2642	3.2297	3.2439
	130	1.6396	1.1396	0.9731	1.1643	1.1623	1.1318	1.1394

HHL è la formula esatta proposta da Haugh *et al.* che richiede l'impiego di tecniche di integrazione numerica (tale prezzo è considerato come valore teorico di riferimento),

$Me73$ è la modifica alla formula BS proposto da Merton (1973), noto in letteratura come *the escrowed dividend adjustment*,

$Ch97$ è il modello precedente associato a un aggiustamento nella volatilità che viene sostituita da

$$\frac{\sigma S_0}{S_0 - D e^{-rt_D}},$$

BV è l'aggiustamento che prevede di pesare la volatilità in base all'epoca di stacco del dividendo (si vedano la relazione (33) e il riferimento Bener e Vorst, 2001),

$BSG03$ è la modifica della varianza proposta in Bos *et al.* (2003) e descritto dalla relazione (34),

$BV02$ è il modello proposto in Bos e Vandermark (2002) e descritto dalla relazione (35), che prevede di intervenire con modifiche sia nel prezzo del titolo azionario sia nel prezzo d'esercizio.

Le prove empiriche evidenziano (si confronti la colonna $Me73$ con i prezzi forniti dalla formula HHL) che la modifica proposta da Merton conduce a valutazioni poco accurate, con

errori che aumentano man mano che l'epoca di stacco del dividendo si avvicina all'epoca di scadenza dell'opzione. Anche la correzione di volatilità *Ch97* non dà buoni risultati, con un spiccata tendenza a sovrastimare il prezzo dell'opzione; tale sovrastima risulta particolarmente significativa nei casi in cui la differenza tra l'epoca di stacco e l'epoca di valutazione $t_D - t_0$ è piccola. L'introduzione del peso sulla data di stacco del dividendo migliora l'accuratezza e in molti casi l'errore assoluto è inferiore a un centesimo; tuttavia, in esperienze computazionali non riportate in questo contributo, si è riscontrato che la precisione peggiora se si aumenta la consistenza del dividendo. Anche la complessa correzione (34) porge buone approssimazioni ma ancora una volta si hanno valori poco precisi se il dividendo aumenta. La correzione sia sul prezzo del titolo sia sul prezzo d'esercizio porge complessivamente buoni risultati e presenta il vantaggio di non richiedere l'impiego di tecniche di integrazione numerica.

La tabella 3 si riferisce alle opzioni americane con gli stessi valori dei parametri impiegati per la costruzione della tabella 2. I simboli riportati all'inizio di ciascuna colonna della tabella hanno il seguente significato:

Bl75 è l'approssimazione proposta da Black (1975) per calcolare il valore di un'opzione call americana su un titolo che paga un dividendo. Sostanzialmente si tratta della formula di Black e Scholes con il prezzo del titolo azionario sostituito dal prezzo stesso meno l'attualizzazione del dividendo. Inoltre, per tenere conto della possibilità dell'esercizio anticipato viene calcolato, senza sottrarre il dividendo attualizzato, anche il prezzo di un'opzione che scade subito prima del pagamento del dividendo. Il massimo tra questi due prezzi viene assunto come valore dell'opzione,

HHLam è la formula esatta proposta da Haugh *et al.* che richiede l'impiego di tecniche di integrazione numerica,

RGW è il modello proposto da Roll, Geske e Whaley, per molti anni a torto considerato come soluzione esatta in forma chiusa al problema di valutare un'opzione call americana su un titolo che paga un dividendo discreto,

HHLeu è il valore esatto delle corrispondenti opzioni europee; tale valore viene riportato a titolo di confronto fra i prezzi delle opzioni europee e americane.

I risultati evidenziano che l'approssimazione di Black porge valori molto accurati solo se il dividendo è pagato subito dopo l'emissione dell'opzione o in prossimità della scadenza.

Anche la formula *RGW* dà delle valutazioni complessivamente buone se il pagamento del dividendo avviene o in prossimità dell'epoca di emissione o della scadenza. Negli altri casi l'errore relativo assume valori non accettabili.

All'aumentare del dividendo gli errori prodotti dall'uso della formula *RGW* divengono davvero rilevanti, mentre la semplice approssimazione *Bl75* diviene via via più accurata. Il motivo di questo miglioramento è abbastanza intuitivo: un dividendo elevato implica che l'esercizio subito prima dello stacco diventi la politica ottima e questa eventualità è tenuta in considerazione della formula *Bl75*.

Tabella 3: Valutazione di opzioni call americane emesse su titoli azionari che pagano un dividendo $D = 5$, $S_0 = 100$, $T = 1$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$.

t_D	X	<i>Bl75</i>	<i>HHLam</i>	<i>RGW</i>	<i>HHLeu</i>
0.01	70	30.0350	30.0350	30.0350	28.6568
	85	16.2258	16.2285	16.2258	16.2285
	100	7.5122	7.5163	7.5122	7.5163
	115	2.8797	2.8831	2.8797	2.8831
	130	0.9462	0.9481	0.9462	0.9481
0.50	70	31.7407	31.7561	31.7454	28.8120
	85	17.6523	18.0242	17.8990	16.4621
	100	7.5774	8.1442	7.9251	7.7740
	115	2.9128	3.1148	2.9441	3.0730
	130	0.9597	1.0521	0.9611	1.0501
0.99	70	33.5036	33.5036	33.4619	28.9711
	85	20.4153	20.4153	20.2071	16.6947
	100	10.3863	10.3864	10.0212	8.0166
	115	4.4131	4.4135	4.0745	3.2442
	130	1.6070	1.6072	1.3992	1.1396

7 Modelli binomiali per la valutazione di opzioni in presenza di dividendi

La tecnica di valutazione delle opzioni mediante l'impiego delle strutture ad albero, particolarmente semplice da utilizzare ed efficiente in condizioni standard, nel caso in cui il bene sottostante paga uno o più dividendi discreti si presenta difficile da gestire dato che il numero dei nodi cresce enormemente e la procedura di valutazione può essere portata a termine solo con una gran mole di calcoli.

In assenza di dividendi o con dividendi proporzionali al prezzo dell'azione, l'albero binomiale ricombina nel senso che il prezzo dopo un movimento crescita-diminuzione (up-down) coincide con il prezzo dopo un movimento diminuzione-crescita. Come conseguenza si ha che il numero dei nodi cresce di un'unità passando da ogni periodo al periodo successivo. Se durante la vita dell'opzione viene distribuito un dividendo in denaro di ammontare D , dopo lo stacco, in corrispondenza di ciascun nodo si deve considerare un nuovo albero binomiale con la conseguenza che il numero complessivo di nodi si incrementa a tal punto che risulta praticamente impossibile considerare albero con un numero adeguato di stadi (si veda a tal proposito la figura 2).

Per evitare questa complicazione spesso si suppone che la dinamica sia caratterizzata da un dividend yield discreto e proporzionale, cioè che i prezzi evolvano come segue

$$S_{ij} = \begin{cases} S_0 u^j d^{i-j} & j = 0, 1, \dots, i, \quad i\Delta t < t_D \\ S_0 (1 - q) u^j d^{i-j} & j = 0, 1, \dots, i, \quad i\Delta t \geq t_D. \end{cases} \quad (44)$$

dove la prima legge vale se il periodo i precede la data di stacco del dividendo e la seconda vale dopo lo stacco e dove con S_0 si è indicato il prezzo iniziale, con q il dividend yield e dove u e d sono rispettivamente i coefficienti moltiplicativi al rialzo e al ribasso che, seguendo quanto suggerito in Cox *et al.* (1979), supponiamo definiti dalle relazioni

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = 1/u, \quad (45)$$

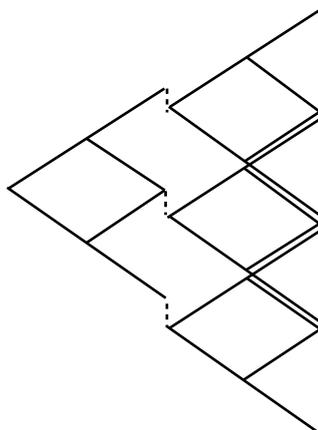


Figura 2: Albero binomiale non ricombinante dopo lo stacco del dividendo.

con $\Delta t = T/n$ (essendo n il numero di passi).

In figura 3 è riportato un esempio di dinamica del prezzo nell'ipotesi che vi siano $n = 6$ periodi e che l'azione non distribuisca dividendi; mentre in figura 4 si prevede un dividend yield $q = 0.05$ sia pagato subito dopo il quarto periodo. I nuovi prezzi al periodo $i = 4$ sono: $207.36 \cdot 0.95 = 196.99$, $144 \cdot 0.95 = 136.8$, $100 \cdot 0.95 = 95$, $69.44 \cdot 0.95 = 65.97$ e $48.23 \cdot 0.95 = 45.81$ e rappresentano il risultato della diminuzione del 5% in proporzione ai singoli prezzi dell'azione all'epoca $i = 4$.

Si noti che in assenza di dividendi o con un dividend yield proporzionale, il numero complessivo di nodi di un albero binomiale con n stadi è

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}. \quad (46)$$

Le figure 3 e 4 si riferiscono al caso di sei stadi e quindi il numero complessivo dei nodi è uguale a 28.

L'ipotesi di un dividend yield proporzionale se può essere accettata come approssimazione dei dividendi pagati nel lungo periodo risulta non accettabile in un periodo breve di tempo durante il quale l'azione paga un dividendo in denaro di ammontare spesso noto con anticipo o comunque stimabile con un'adeguata precisione.

In figura 5 è riportato l'andamento del prezzo di un titolo azionario nell'ipotesi che dopo quattro periodi di tempo venga distribuito un dividendo $D = 5$. Si osservi che subito dopo lo stacco del dividendo (all'epoca $i = 4$) i nuovi prezzi diventano $207.36 - 5 = 202.36$, $144 - 5 = 139$, $100 - 5 = 95$, $69.44 - 5 = 64.44$ e $48.23 - 5 = 43.23$. Da ciascuno di questi nuovi prezzi ha origine un nuovo albero binomiale; l'albero nel suo complesso non ricombina e si presenta con nodi che possono presentarsi molto vicini fra loro come risulta dallo stadio 6 nella figura 5.

Per il calcolo del numero complessivo di nodi in presenza dello stacco di un dividendo discreto tra il periodo k e il periodo $k + 1$, si osservi che la dinamica rimane invariata per $i \leq k$ e cioè

$$S_0 u^j d^{i-j} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad j = 0, 1, \dots, i; \quad (47)$$

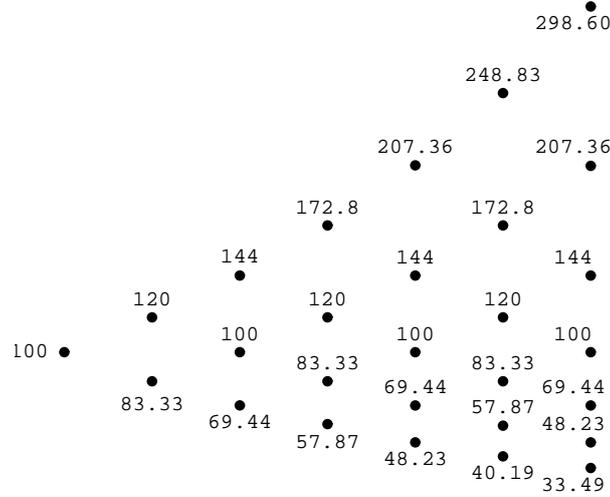


Figura 3: Dinamica binomiale del prezzo di un titolo azionario (in assenza di dividendi) con $S_0 = 100$, $u = 1.2$, $d = 1/u$, $n = 6$.

lo stacco del dividendo comporta che i nodi associati allo stadio k siano “abbassati” di una quantità pari all’importo del dividendo D ,

$$S_0 u^j d^{i-j} - D \quad j = 0, 1, \dots, i; \quad (48)$$

allo stadio $i = k + 1$ i nodi (descritti dalla relazione (48)) sono in numero doppio rispetto ai nodi dello stadio i in quanto da ciascuno di questi si può uscire in due modi

$$(S_0 u^j d^{i-j} - D)u \quad (S_0 u^j d^{i-j} - D)d. \quad (49)$$

Pertanto allo stadio $i = k + 1$ si hanno $2i$ nodi (10 nel caso di figura 6), invece di $i + 1$ (6 nel caso di figura 5). Quando $i = k + m$ (con $m \geq 2$) il numero dei nodi è $(m + 1)(k + 1)$ invece di $k + m + 1$. Ad esempio, se consideriamo la dinamica binomiale con $n = 6$ periodi e la distribuzione di un dividendo, il numero complessivo dei nodi rimane 28 se il dividendo è distribuito esattamente al sesto periodo, diviene 33 se il dividendo viene distribuito tra il quinto e il sesto periodo, diviene 40 se il dividendo viene distribuito tra il quarto e il quinto periodo (si veda la figura 6).

All’aumentare del numero di dividendi distribuiti, il numero complessivo di nodi dell’albero tende a esplodere. Ad esempio, se gli stadi sono 60 il numero complessivo dei nodi, che nel caso di assenza di dividendi è $\frac{61 \cdot 62}{2} = 1891$, diviene¹² 15 841, 106 491, 589 816, 2 784 691 se vengono distribuiti rispettivamente uno, due, tre o quattro dividendi discreti ad intervalli equidistanziati (si veda Schröder, 1988).

Il problema dell’enorme crescita del numero di nodi che si presenta quando si considerano dividendi discreti può essere semplificato se si suppone il prezzo abbia due componenti,

¹²Si noti che, nel caso di un dividendo staccato dopo 30 periodi, si hanno $\frac{31 \cdot 32}{2} = 496$ nodi fino allo stadio 30. Da ciascuno dei 31 nodi dello stadio 30 ha inizio un nuovo albero binomiale e quindi dallo stadio 31 allo stadio 60 ci sono $31 \cdot \frac{31 \cdot 32}{2}$ nodi; da questo ultimo numero di nodi si deve togliere i 31 nodi dello stadio 30.

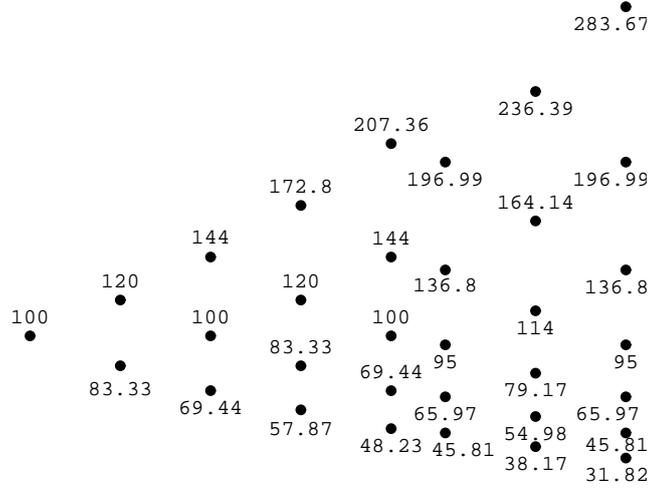


Figura 4: Dinamica binomiale del prezzo di un titolo azionario con $S_0 = 100$, $u = 1.2$, $d = 1/u$, $n = 6$ dividend yield $q = 0.05$ pagato al quarto periodo.

una stocastica e una deterministica rappresentata dal valore attualizzato del dividendo o dei dividendi che verranno distribuiti in futuro. Se si suppone che vi sia un solo dividendo discreto durante la vita dell'opzione e che tale dividendo sia pagato all'epoca t_D con $k \leq t_D < k + 1$, il valore della componente aleatoria \tilde{S} è dato da

$$\tilde{S} = \begin{cases} S - De^{-r(t_D-i)} & \text{se } i \leq t_D \\ S & \text{se } i > t_D. \end{cases} \quad (50)$$

Si osservi che la componente aleatoria dà luogo a un albero che ricombina. Si può costruire un nuovo albero (anch'esso ricombinante) sommando in corrispondenza di ciascun nodo al prezzo della componente stocastica il valore attuale dei dividendi futuri (se ce sono). A tal proposito, indicato con S_0^* il prezzo iniziale, i prezzi nei periodi successivi sono

$$S_0^* u^j d^{i-j} + D e^{-r(t_D-i)} \quad \text{se } i \leq t_D \quad j = 0, 1, \dots, i \quad (51)$$

e

$$S_0^* u^j d^{i-j} \quad \text{se } i > t_D \quad j = 0, 1, \dots, i. \quad (52)$$

Agendo in tal modo, l'albero che si ottiene ricombina e il numero dei nodi in ciascun periodo i è uguale a $i + 1$.

Per capire meglio come si possa costruire un albero che ricombina anche in presenza di dividendi discreti si consideri il seguente esempio.

Si supponga $S_0 = 100$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.1$, $n = 4$ e che un dividendo discreto $D = 1$ sia pagato all'epoca $i = 2$. Il valore attuale all'epoca $i = 0$ del dividendo futuro è $\mathcal{D}_0 = e^{-2 \cdot 0.1} = 0.8187$ e all'epoca $i = 1$ è $\mathcal{D}_1 = e^{-1 \cdot 0.1} = 0.9048$. I coefficienti moltiplicativi al rialzo e al ribasso sono $u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}} = e^{0.15 \cdot 1} = 1.16183$ e $d = 1/u = 0.860708$. Il prezzo iniziale è $S_0^* = 100 - 0.8187 = 99.1813$. Cominciando da questo prezzo si può costruire la componente stocastica dell'albero che ricombina (si veda la figura 6). Per

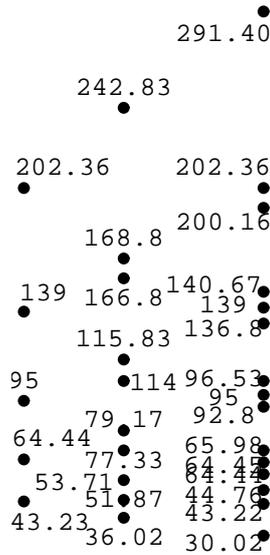


Figura 5: Dinamica binomiale con $S_0 = 100$, $u = 1.2$, $d = 1/u$, $n = 6$ e stacco di un dividendo discreto $D = 5$ allo stadio quattro; sono riportati gli stadi 4 (subito dopo lo stacco del dividendo), 5 e 6.

ottenere l'albero finale si deve aggiungere la componente deterministica data dal valore attuale del dividendo pagato all'epoca $i = 2$. Questa operazione mantiene il ricombinamento dell'albero e comporta che all'unico nodo dell'epoca $i = 0$ si aggiunga 0.8198 ottenendo 100 e che ai due nodi dell'epoca $i = 1$ si aggiunga 0.9048 ottenendo rispettivamente 116.13 e 86.274; i nodi in corrispondenza delle epoche $i = 2, 3, 4$ rimangono invariati.

Si osservi inoltre che i prezzi finali (allo stadio 4) e le probabilità associate sono: 180.72 con probabilità $1/16$, 133.88 con probabilità $4/16$, 99.18 con probabilità $6/16$, 73.48 con probabilità $4/16$ e 54.43 con probabilità $1/16$.

Se non viene utilizzata la semplificazione precedentemente descritta, l'albero non ricombina; la sua struttura, con riferimento all'esempio in esame, è rappresentata in figura 7 e appare decisamente più complessa.

I prezzi finali in tal caso sono 9; il prezzo massimo 180.86 viene assunto con probabilità $1/16$ e si discosta di poco dal prezzo massimo dell'albero che ricombina di figura 6. Seguono poi due prezzi molto vicini fra loro 133.99 e 133.64 che vengono assunti con probabilità $2/16$ e che sono in un certo qual modo collegati con il prezzo 133.88 (che ha probabilità $4/16$) dell'albero che ricombina; i tre prezzi centrali 99.26 (probabilità $1/16$), 99 (probabilità $4/16$) e 98.65 (probabilità $1/16$) sono i corrispondenti del prezzo finale 99.18 (probabilità $6/16$); i prezzi 73.34 (probabilità $2/16$) e 73.08 sono i corrispondenti del prezzo 73.48; infine, il prezzo 54.14 è il corrispondente del prezzo 54.43 dell'albero che ricombina.

La tecnica di ricombinamento dell'albero appena descritta può essere migliorata mediante una procedura che mantiene inalterata la struttura dell'albero fino all'epoca dello stacco e che forza il ricombinamento dopo aver sottratto da ciascun nodo l'ammontare del dividendo pagato. Ad esempio, si può forzare il ricombinamento dell'albero binomiale

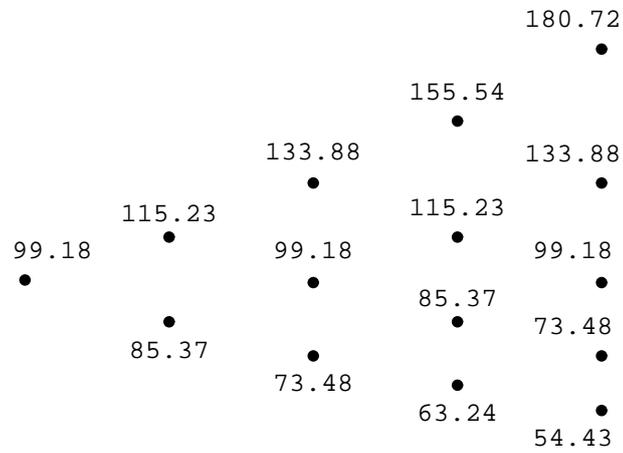


Figura 6: Dinamica binomiale con albero che ricombina in presenza di un dividendo discreto $D = 1$ allo stadio due, $\sigma = 0.15$, $\Delta t = 1$, $r = 0.1$.

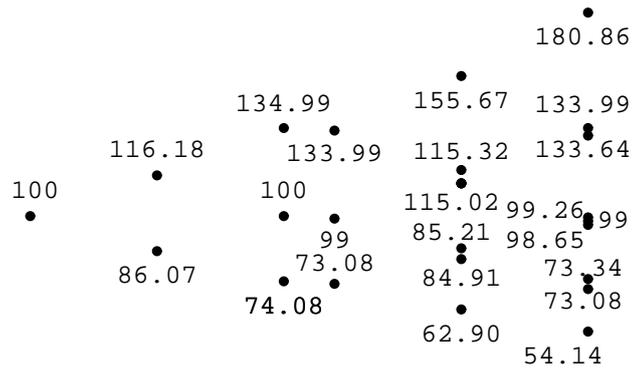


Figura 7: Dinamica binomiale con albero che non ricombina in presenza di un dividendo discreto $D = 1$ allo stadio due, $\sigma = 0.15$, $\Delta T = 1$, $r = 0.1$.

assumendo, subito dopo lo stacco di un dividendo, come nodi estremi

$$S_{n_D+1,0} = (S_{n_D,0} - D) \cdot d \quad S_{n_D,n_D} = (S_{n_D,n_D} - D) \cdot u \quad (53)$$

e calcolando la media aritmetica dei valori che non ricombinano. Questa tecnica ha il pregio di essere semplice dal punto di vista computazionale. In alternativa si può utilizzare una tecnica che chiamiamo *stretch* che calcola i nodi estremi come nel caso precedente e che impone il ricombinamento dei nodi intermedi scegliendo i coefficienti moltiplicativi al rialzo e al ribasso nel modo seguente

$$u = e^{\lambda\sigma\sqrt{T/n}} \quad d = \frac{1}{u}, \quad (54)$$

dove λ viene scelto in modo rendere uguali i prezzi dopo un movimento al rialzo e al ribasso. Questa seconda tecnica richiede un maggior quantità di calcoli in quanto ad ogni stadio cambiano i coefficienti al rialzo

$$u(i, j) = e^{\lambda\sigma\sqrt{T/n}}, \quad (55)$$

e le corrispondenti probabilità.

Un metodo che è preciso ed efficiente, applicabile sia nel caso di opzioni call e put europee che in quello di opzioni americane, è basato sull'idea di usare tecnica di interpolazione, come proposto da Vellekoop e Nieuwenhuis (2006). Descriviamo tale tecnica nel caso di un'opzione di tipo americano:

1. si costruisce un albero binomiale standard fino all'epoca di scadenza dell'opzione senza considerare il pagamento del dividendo;
2. si calcola il valore dell'opzione ripercorrendo a ritroso l'albero (tale tecnica è nota come induzione all'indietro) dall'epoca di scadenza fino all'epoca t_D di pagamento del dividendo;
3. nei nodi in corrispondenza all'epoca di stacco del dividendo n_D , il valore di continuazione dell'opzione in esame V_{n_D} viene approssimato utilizzando la seguente interpolazione lineare¹³

$$V(S_{n_D,j}) = \frac{V(S_{n_D,k+1}) - V(S_{n_D,k})}{S_{n_D,k+1} - S_{n_D,k}} (S_{n_D,j} - S_{n_D,k}) + V(S_{n_D,k}), \quad (56)$$

per $S_{n_D,k} \leq S_{n_D,j} \leq S_{n_D,k+1}$;

4. si continua a ritroso dall'epoca di stacco fino all'epoca di iniziale valutazione; il valore dell'opzione è V_0

È importante osservare che tale tecnica di interpolazione può essere estesa al caso in cui durante la vita dell'opzione vengono pagati più dividendi.

In tutti i modelli discussi in questo paragrafo, è importante osservare che si deve prestare particolare attenzione alla verifica dell'esistenza di prezzi negativi; infatti se ai nodi dell'albero binomiale si sottrae il dividendo D o una sua attualizzazione si possono ottenere dei

¹³Si veda Nardon e Pianca (2009).

valori negativi che debbono ovviamente essere evitati. Indicato con $S_{t_D}^-$ il prezzo del titolo azionario subito prima dello stacco del dividendo, se in qualche nodo dell'albero si ha $S_{t_D}^- - D \leq 0$, la politica programmata dei dividendi deve essere modificata. Si possono prospettare almeno due soluzioni: o si impone che nei nodi interessati il prezzo si annulli (e da quel punto in poi i prezzi si mantengono uguali a zero dato che ci troviamo di fronte a una barriera assorbente) o si suppone che il dividendo distribuito sia minore del dividendo programmato D e tale da mantenere il prezzo strettamente positivo, consentendo all'albero binomiale di svilupparsi ulteriormente. Nelle prove numeriche effettuate e brevemente discusse nel paragrafo successivo, si è esclusa la possibilità che i prezzi possano essere negativi.

8 Applicazioni numeriche dei modelli binomiali

In questo paragrafo riportiamo sinteticamente i risultati di alcune prove numeriche inerenti alla valutazione di opzioni call europee, e call e put americane.

Nella tabella 4, mettiamo a confronto i prezzi ottenuti con la formula esatta di HHL per le opzioni call europee con i prezzi ottenuti con un modello binomiale non ricombinante a 2000 passi e il modello binomiale basato sull'interpolazione (56). Quest'ultimo metodo è accurato e molto veloce: per un'opzione call europea i calcoli con il metodo binomiale interpolato con 2000 passi sono immediati, mentre richiedono alcuni secondi (a seconda del processore utilizzato) con il metodo non ricombinante.

La tabella 4 riporta anche i risultati forniti da altri metodi analizzati: il metodo proposto da Bos e Vandermark (2002), il binomiale ricombinante basato sul calcolo di una media dei prezzi e il binomiale che usa la procedura di tipo *stretch*. In particolare, questi due ultimi metodi forniscono prezzi talvolta troppo poco precisi per poter essere utilizzati a fini pratici. Il modello binomiale che codifica l'aggiustamento proposto da Bos e Vandermark è complessivamente accurato anche se non raggiunge la precisione del metodo binomiale non ricombinante.

Tabella 4: Valutazione di opzioni call europee in presenza di dividendi discreti $D = 5$ ($S_0 = 100$, $T = 1$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$).

t_D	X	HHL	bin. non-ric. ($n = 2000$)	bin. interp. ($n = 2000$)	BV	media	stretch
0.25	70	28.7323	28.7323	28.7324	28.7387	28.9063	28.2240
	100	7.6444	7.6446	7.6446	7.6456	7.9890	7.6203
	130	0.9997	0.9994	1.0000	0.9956	1.1349	1.0540
0.5	70	28.8120	28.8120	28.8121	28.8192	28.9291	28.7682
	100	7.7740	7.7742	7.7742	7.7743	8.0001	7.9199
	130	1.0501	1.0497	1.0506	1.0455	1.1371	1.1212
0.75	70	28.8927	28.8927	28.8928	28.8992	28.9517	28.8746
	100	7.8997	7.8999	7.8999	7.9010	8.0112	7.9738
	130	1.0972	1.0969	1.0977	1.0934	1.1392	1.3121

La tabella 5 si riferisce alle quotazioni di opzioni call e put americane. Nella prima parte della tabella troviamo valori che si riferiscono alla call americana; sono stati messi a confronto il modello di HHL (che fornisce la soluzione esatta del prezzo dell'opzione), con i prezzi ottenuti con un modello binomiale non-ricombinante a 5000 passi ibrido (in cui al passo ex-dividendo è stata utilizzata la formula di BS al fine di calcolare il valore di

continuazione¹⁴) e il modello binomiale ricombinante a 10 000 passi basato sulla tecnica di interpolazione lineare (56). I risultati sono adeguatamente accurati per tutti e due i modelli binomiali ma nel caso del modello basato sull'interpolazione dei valori all'epoca dello stacco la velocità è superiore.

La seconda parte della tabella si riferisce a opzioni put americane; sono stati messi a confronto il modello binomiale non ricombinante a 2 000 passi, con il modello binomiale ricombinante a 10 000 che usa l'interpolazione lineare e l'approssimazione proposta da Bos e Vandermark (2002). Quest'ultimo metodo fornisce dei risultati che incorporano un errore non trascurabile e in alcuni casi sovrastima il prezzo dell'opzione. Il metodo binomiale interpolato è risultato piuttosto preciso (anche se si considerano solo 1 000 o 2 000 passi) ed efficiente.

Tabella 5: Valutazione di opzioni call e put americane in presenza di dividendi discreti $D = 5$ ($S_0 = 100$, $T = 1$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$).

t_D	X	call americana		
		HHL	bin. ibrido ($n = 5\,000$)	bin. interp. ($n = 10\,000$)
0.25	70	30.8748	30.8740	30.8744
	100	7.6587	7.6587	7.6587
	130	0.9997	0.9997	0.9998
0.5	70	31.7579	31.7553	31.7557
	100	8.1305	8.1438	8.1439
	130	1.0521	1.0520	1.0522
0.75	70	32.6414	32.6407	32.6411
	100	9.1077	9.1027	9.1030
	130	1.1799	1.1764	1.1767
t_D	X	put americana		
		bin. non-ricomb. ($n = 2\,000$)	bin. interp. ($n = 10\,000$)	BV
0.25	70	0.2680	0.2680	0.2630
	100	8.5162	8.5161	8.5244
	130	33.4538	33.4540	35.0112
0.5	70	0.2875	0.2876	0.2901
	100	8.4414	8.4412	8.5976
	130	32.1195	32.1198	35.0112
0.75	70	0.3070	0.3071	0.2901
	100	8.2441	8.2439	8.6689
	130	30.8512	30.8515	35.0012

Il modello è stato esteso anche al caso in cui l'attività sottostante paghi più di un dividendo durante la vita dell'opzione¹⁵. La tabella 6 riporta i risultati inerenti alla valutazione di opzioni call europee in presenza di dividendi multipli. Il confronto è fatto rispetto ai prezzi ottenuti con il modello binomiale di CRR che non ricombina con $n = 2\,000$ passi. Si osservi che all'epoca dello stacco di un dividendo, da ogni nodo dell'albero viene generato un nuovo albero binomiale; l'applicabilità del metodo è quindi limitata a pochi dividendi, rendendo non possibili i calcoli in tempi ragionevoli se si considerano più epoche di stacco. Il modello binomiale che sfrutta l'interpolazione (56) non presenta questo inconveniente e

¹⁴Si osservi, infatti, che dopo lo stacco del dividendo, l'opzione se non esercitata equivale ad un'opzione call europea.

¹⁵Si veda a tal proposito Nardon e Pianca (2009).

può essere applicato in maniera efficiente anche se si considerano più dividendi. I risultati riportati nella tabella 6 sono stati ottenuti con un modello binomiale interpolato con un numero di passi pari a $n = 10\,000$ (il metodo fornisce risultati accurati anche con un numero inferiore di passi). Tali risultati sono in linea con i risultati di Haug *et al.* (2003); si osservi che nel caso di opzioni su attività che pagano dividendi discreti multipli non sono disponibili in letteratura formule analitiche di valutazione, tuttavia Vellekoop e Nieuwenhuis (2006) dimostrano la convergenza del metodo numerico. Negli esperimenti numerici sono state prese in considerazione diverse scadenze (esprese in anni), con dividendi pagati un volta all’anno; ad esempio, per opzioni con scadenza $T = 1$ il dividendo è pagato all’epoca $t_D = 0.5$, per $T = 2$ si hanno due dividendi pagati alle epoche $t_D = 0.5$ e $t_D = 1.5$, e così via.

La tabella 7 riporta risultati analoghi per opzioni americane at-the-money sia di tipo put che call in presenza di dividendi multipli. In tal caso i risultati ottenuti si riferiscono al solo modello binomiale interpolato.

Tabella 6: Valutazione di opzioni call europee in presenza di dividendi discreti multipli $D = 5$ pagati alle epoche $t_D \in \{0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5\}$ ($S_0 = 100$, $X = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$), per diverse scadenze.

T	bin. non ricomb. ($n = 2\,000$)	bin. interp. ($n = 10\,000$)
1	7.7742	7.7741
2	10.7119	10.7122
3		12.7885
4		14.4005
5		15.7076
6		16.7943

Tabella 7: Valutazione di opzioni call e put americane in presenza di dividendi discreti multipli nel modello binomiale interpolato con 10 000 passi ($S_0 = 100$, $X = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$), e dividendi discreti $D = 5$ pagati alle epoche $t_D \in \{0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5\}$, per diverse scadenze.

T	call americana	put americana
1	8.1439	8.4412
2	11.2792	11.5904
3	13.3994	13.7399
4	15.0169	15.3834
5	16.3136	16.7035
6	17.3824	17.7938

9 Valutazione mediante simulazione

Un’altra tecnica numerica che si può utilizzare per valutare le opzioni in presenza di un dividendo discreto e non proporzionale al prezzo dell’azione è la simulazione Monte Carlo. Si consideri un’opzione call europea su un titolo azionario che all’epoca t_D paga un dividendo di importo D . La formula di valutazione di HHL consente di valutare in modo “esatto” questo tipo di opzioni. Per la valutazione mediante la tecnica Monte Carlo si possono generare delle

Tabella 8: Valutazione di opzioni call americane emesse su titoli azionari che pagano un dividendo $D = 5$, $S_0 = 100$, $T = 1$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$.

t_D	X	HHL	$simMC$	ERR. ST.	S^*	$ratio$	bin. ($n = 500$)	RGW
0.25	70	30.8748	30.8704	3.17E-3	73.4653	99.92	30.8746	30.8725
	85	16.9202	16.8193	3.22E-3	93.7831	76.32	16.9205	16.8433
	100	7.6587	7.6385	3.66E-3	116.0090	7.93	7.6592	7.5550
	115	2.9786	2.9786	2.58E-3	141.4293	0.03	2.9790	2.8959
	130	0.9997	1.0009	1.50E-3	177.2185	0.00	0.9985	0.9526
0.5	70	31.7561	31.7439	4.48E-3	69.5669	99.62	31.7561	31.7454
	85	18.0242	17.9287	4.14E-3	87.3394	85.59	18.0257	17.8990
	100	8.1442	8.0555	3.24E-3	105.7498	38.62	8.1453	7.9251
	115	3.1115	3.0929	2.32E-3	124.8578	7.16	3.1118	2.9441
	130	1.0521	1.0513	1.48E-3	144.7815	0.60	1.0502	0.9611
0.75	70	32.7415	32.6202	5.49E-3	66.6430	99.33	32.6414	32.6177
	85	19.2022	19.0930	5.08E-3	82.7698	88.89	19.2031	19.0345
	100	9.1033	8.9587	3.90E-3	99.1398	57.14	9.1039	8.7942
	115	3.5279	3.4482	2.48E-3	115.7349	23.78	3.5269	3.2645
	130	1.1767	1.1531	1.42E-3	132.5435	6.72	1.1745	1.0327

traiettorie casuali, calcolare per ciascuna traiettoria il payoff alla scadenza, attualizzare il payoff e considerare come valore dell'opzione il valore medio dei payoff attualizzati.

Si osservi che la generazione delle traiettorie richiede di simulare il prezzo del titolo azionario dall'epoca iniziale fino all'epoca di stacco; di sottrarre il dividendo e di simulare ulteriormente il prezzo ridotto del titolo dall'epoca di stacco fino alla scadenza. Questa tecnica di generazione delle traiettorie può essere immediatamente estesa al caso in cui durante la vita dell'opzione il bene sottostante paga due o più dividendi discreti.

Per la minimizzazione dell'errore dovuto alla simulazione si deve considerare un numero elevato di traiettorie.

La simulazione Monte Carlo può essere utilizzata anche per valutare opzioni call americane in presenza di un dividendo discreto; in tale caso infatti l'esercizio anticipato può essere conveniente solo subito prima dello stacco e la convenienza si presenta se il prezzo del titolo azionario supera il prezzo S^* che rende indifferente l'esercizio e il valore dell'opzione non esercitata (si veda la precedente relazione (41)). La generazione delle traiettorie prevede di simulare il prezzo del titolo azionario fino all'epoca di stacco t_D . Indicato con S_{sim} tale prezzo, se $S_{sim} > S^*$ la traiettoria viene troncata e si attualizza dall'epoca t_D all'epoca di valutazione il payoff derivante dall'esercizio anticipato, se $S_{sim} \leq S^*$ si calcola la differenza $S_{sim} - D$ e con questo nuovo prezzo si continua a simulare la traiettoria dall'epoca t_D fino all'epoca di scadenza.

A tal proposito si può analizzare la tabella 8 che riguarda la valutazione di opzioni call americane in presenza di un dividendi discreto. Le colonne $simMC$, ERR.ST., S^* e "ratio" si riferiscono alla valutazione mediante la tecnica Monte Carlo e riportano rispettivamente il valore teorico dell'opzione ottenuto considerando 10 milioni di traiettorie casuali, l'errore standard (definito dal rapporto tra lo scarto quadratico medio dei valori simulati e la radice quadrata del numero di traiettorie utilizzate), al prezzo critico (in corrispondenza del quale risulta indifferente esercitare l'opzione o mantenerne il possesso fino alla scadenza) osservato subito prima dello stacco del dividendo e alla percentuale ($ratio$) di traiettorie che sono state troncate all'epoca di stacco in quanto il prezzo simulato è risultato superiore al prezzo di

indifferenza S^* . La colonna successiva riporta le valutazioni ottenute considerando un albero binomiale non ricombinante con 500 stadi.

Le valutazioni ottenute mediante la simulazione Monte Carlo si possono considerare complessivamente soddisfacenti in quanto in numerosi casi la differenza tra il valore analitico e il valore ottenuto con la simulazione risulta quasi trascurabile. Inoltre, nella maggior parte dei prove effettuate l'intervallo di confidenza al 95% contiene il valore analitico.

Riferimenti bibliografici

- [1] Bener R., Vorst T. (2001), Options on dividend paying stocks. In: *Proceedings of the International Conference on Mathematical Finance*, Shanghai 2001
- [2] Black F. (1975), Fact and fantasy in the use of options. *Financial Analysts Journal*, July-August, 36–72
- [3] Black F., Scholes M. (1973), The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637–659
- [4] Bos R., Gairat A., Shepeleva A. (2003), Dealing with discrete dividends *Risk*, **16**, 109–112
- [5] Bos R., Vandermark S. (2002), Finessing fixed dividends. *Risk*, **15**, 157–158
- [6] Chriss N.A. (1997), *Black-Scholes and Beyond: Option Pricing Models*. McGraw-Hill, New York
- [7] Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M. (1979), Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, **7**, 229–263
- [8] de Matos J.A., Dilao R., Ferreira B. (2006), *The exact value for European options on a stock paying a discrete dividend*. Munich Personal RePEc Archive
- [9] Geske R. (1979a), A note on an analytic formula for unprotected American call options on stocks with known dividends. *Journal of Financial Economics*, **7**, 375–380
- [10] Geske R. (1979b), The valuation of compound options. *Journal of Financial Economics*, **7**, 63–81
- [11] Geske R. (1981), Comments on Whaley's note. *Journal of Financial Economics*, **9**, 213–215
- [12] Haug E.S., Haug J., Lewis A. (2003), Back to basics: a new approach to discrete dividend problem. *Willmot Magazine*, **9**
- [13] Hull J.C. (2006), *Opzioni, Futures e altri Derivati*. Pearson Prentice Hall
- [14] Merton R.C. (1973), Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141–183
- [15] Nardon M., Pianca P. (2009), Binomial algorithms for the evaluation of options on stocks with fixed per share dividends. In: Corazza M., Pizzi C. [eds], *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*, Springer-Italy

- [16] Roll R. (1977), An analytical formula for unprotected American call options on stocks with known dividends. *Journal of Financial Economics*, **5**, 251–258
- [17] Schroder M. (1988), Adapting the binomial model to value options on assets with fixed-cash payouts. *Financial Analysts Journal*, **44**, 54–62
- [18] Vellekoop, M.H., Nieuwenhuis, J.W. (2006), Efficient pricing of derivatives on assets with discrete dividends. *Applied Mathematical Finance*, **13**, 265–284
- [19] Whaley R.E. (1981), On the evaluation of American call options on stocks with known dividends. *Journal of Financial Economics*, **9**, 207–211
- [20] Whaley R.E. (2006) *Derivatives: Markets, Valuation, and Risk Management*. Wiley-Finance