UNIVERSITÀ CA' FOSCARI DI VENEZIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA APPLICATA

Martina Nardon

Un'introduzione al rischio di credito

n. 123/2004

Un'introduzione al rischio di credito

Martina Nardon

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia

Sommario

Il rischio di credito rappresenta uno dei fattori cruciali nella determinazione dei prezzi e dei rendimenti delle attività finanziarie. Sebbene gli effetti del rischio di credito sulla valutazione dei titoli obbligazionari siano già da lungo tempo oggetto di indagine, lo sviluppo di modelli analitici per lo studio e la quantificazione di tali effetti è relativamente recente.

Questo contributo si propone come un'introduzione al rischio di credito e ad alcune delle problematiche inerenti; lo stile è di rassegna e non verranno date dimostrazioni rigorosamente formali dei risultati presentati. Lo scopo è di introdurre alcuni concetti fondamentali, quali la definizione di rischio di credito e delle sue componenti. Verranno in seguito analizzati alcuni modelli proposti in letteratura per la misurazione del rischio di credito.

1 Introduzione

Il rischio di credito è uno dei rischi di mercato più analizzati e di difficile quantificazione. Tradizionalmente il problema è stato affrontato mediante l'applicazione di metodi attuariali basati su dati storici. Tuttavia la rapida crescita nei mercati finanziari delle attività e dei titoli derivati[1], in particolare dei derivati trattati nei mercati *over the counter* e dei *derivati creditizi*, nonché l'elevato livello di sofisticazione di alcuni strumenti finanziari, hanno evidenziato l'inadeguatezza dei metodi tradizionali nel valutare in modo adeguato i rischi conseguenti.

Cerchiamo innanzitutto di definire il concetto di rischio di credito. In prima istanza, il rischio di credito può essere definito come l'eventualità che una delle parti di un contratto non onori gli obblighi di natura finanziaria assunti, causando una perdita per la controparte creditrice (si veda Ammann, 2001). Tale definizione contempla solamente il caso estremo in cui il debitore si rende insolvente.

Ma una perdita di valore della posizione creditoria può derivare anche da un deterioramento delle condizioni economico–finanziarie del debitore da cui dipende la capacità (o la volontà) di far fronte agli impegni finanziari, pur non divenendo insolvente. In un'accezione meno semplificata, per rischio di credito si intende allora la possibilità che da una variazione inattesa del merito

[1]Alcuni dati si possono reperire dai report disponibili nel sito dell'*Office of the Comptroller of the Currency*, `www.occ.treas.gov`.

creditizio di un debitore derivi una variazione inattesa del valore del credito. I *ratings* forniti, ad esempio, dalle note agenzie Standard & Poor's e Moody's rappresentano una stima del merito creditizio delle imprese e dei Paesi.

Esistono quindi diverse accezioni di rischio di credito[2], che distinguono l'eventualità in cui la perdita creditizia si manifesti solo in seguito all'insolvenza del debitore (*default–mode paradigm*), dal caso in cui la variazione del valore dell'esposizione derivi dal deterioramento del merito creditizio della controparte, trattando l'insolvenza come evento estremo (*mark–to–market*, o *mark–to–model*, *paradigm*).

Nel paragrafo seguente viene presentata una classificazione dei modelli per la misurazione del rischio di credito. Il paragrafo 3 è dedicato ad una breve discussione inerente agli strumenti finanziari soggetti al rischio di credito. Nel paragrafo 4 verranno definite le diverse componenti del rischio di credito sia relative ad una singola posizione che ad un portafoglio di crediti; verrà, inoltre, definito il concetto importante di capitale a rischio. I paragrafi 5 e 6 saranno dedicati allo studio dei modelli strutturali e dei modelli in forma ridotta.

2 Una possibile classificazione dei modelli per la misurazione del rischio di credito

In letteratura si possono individuare fondamentalmente due diversi approcci alla misurazione del rischio di credito: approcci *model–based*, tra cui si possono distinguere i *modelli strutturali* e i *modelli in forma ridotta*, e approcci tradizionali (o *non model–based*), basati sui dati storici delle insolvenze.

I *modelli strutturali* si possono a loro volta suddividere in:

- *firm–value models*, basati sull'evoluzione del valore dell'attivo (e quindi sulla struttura patrimoniale) della società emittente e sulla teoria della valutazione delle opzioni finanziarie (Black e Scholes, 1973, e Merton, 1974) per la determinazione della probabilità di insolvenza e del tasso di recupero in caso di insolvenza;

- *first passage time models* (introdotti da Black e Cox, 1976, si veda anche Longstaff e Schwartz, 1995), che considerano la possibilità di *default* prima della scadenza del debito, se il valore dell'attivo scende al di sotto di un certo livello (*threshold* o *default boundary*).

I *modelli in forma ridotta* o *intensity–based models* (si vedano, tra gli altri, Jarrow e Turnbull, 1995, Jarrow, Lando e Turnbull, 1997, e Duffie e Singleton, 1999), rappresentano un approccio recente al rischio di credito che consiste nell'elaborazione di modelli che trattano l'insolvenza come evento completamente esogeno, non dipendente dalla struttura patrimoniale della società o del Paese in esame. Tali modelli sono basati sulla specificazione di un processo esogeno che governa l'evento default: tipicamente si assume che si tratti di un processo di Poisson e spesso si ipotizza che il tasso di recupero sia esogeno al modello.

In realtà la distinzione non è così netta; in letteratura sono stati proposti modelli *ibridi* che utilizzano elementi di entrambi gli approcci. Nei modelli strutturali il tasso di recupero (ovvero

[2] Per una discussione generale sull'argomento si rimanda al documento del Comitato di Basilea (1999).

la frazione del prestito che verrà rimborsata ai creditori) è generalmente specificato dalla conoscenza della struttura delle passività, mentre nei modelli in forma ridotta viene spesso assegnato esogenamente. Tale caratterizzazione del tasso di recupero non pare tuttavia una caratteristica cruciale per differenziare i due approcci.

In un recente contributo, Jarrow e Protter (2004) osservano che le due classi di modelli non sono così diverse tra loro e l'elemento distintivo è dato dalla caratterizzazione dell'epoca in corrispondenza della quale si manifesta l'insolvenza (*default time*). Nei modelli strutturali si ipotizza di disporre della stessa informazione del manager della società. Nei modelli in forma ridotta, invece, si prescinde dalla conoscenza del valore di tutte le attività e passività della società: l'informazione disponibile è la stessa del mercato. Da questo punto di vista, Jarrow e Protter ritengono che i modelli in forma ridotta siano preferibili.

Come conseguenza del diverso insieme informativo di cui dispone chi costruisce un modello per il rischio di credito, si ha che nei modelli strutturali l'epoca di default è una variabile aleatoria *prevedibile*[3], mentre nei modelli in forma ridotta l'epoca in cui si può verificare l'insolvenza è *totalmente inaccessibile*[4].

Osserviamo, inoltre, che i modelli per la misurazione del rischio di credito possono essere classificati anche in base ad altri elementi, quali:

- la scelta dell'orizzonte temporale considerato,
- le metodologie adottate per la quantificazione dell'esposizione e del tasso di perdita in caso di insolvenza,
- le diverse logiche di aggregazione dei rischi,
- le differenti tecniche per la misurazione delle interdipendenze (correlazioni) tra fattori che contribuiscono a determinare le perdite creditizie,
- la considerazione o meno di informazioni sullo stato dell'economia o di un particolare settore economico: a tal proposito si distinguono i modelli condizionati e i modelli non condizionati.

3 Strumenti finanziari soggetti al rischio di credito

Gli strumenti finanziari soggetti al rischio di credito si possono distinguere essenzialmente in due categorie: titoli di debito e posizioni fuori bilancio. Tra i primi annoveriamo: i titoli di stato (*treasury bonds*), e in particolare i titoli emessi da Paesi emergenti, i titoli di debito emessi da altri enti pubblici, le obbligazioni emesse da società private (*corporate bonds*), qualsiasi forma di finanziamento concessa alle aziende, i mutui e, in generale, il credito al consumo (vendite rateali, carte di credito, ecc.). Tra le posizioni fuori bilancio rientrano: i titoli derivati trattati nei mercati regolamentati[5], i titoli derivati trattati nei mercati over the counter per i quali esiste il rischio di

[3]La definizione formale di tempo d'arresto prevedibile verrà data più avanti nel paragrafo dedicato ai modelli di first passage time.

[4]Si veda Protter (1990), pag. 98–99.

[5]Sebbene il rischio di credito in tal caso sia molto meno rilevante, come ha osservato Amman (2001), esso è pur sempre esistente.

controparte, i titoli derivati la cui attività sottostante comporta rischio di credito (ad esempio, opzioni emesse su obbligazioni) e, infine, derivati creditizi[6].

Particolare interesse meritano le obbligazioni cosiddette "rischiose" (si veda, per un'introduzione sull'argomento, Wilmott, 2003). Dal 1996 si è osservato a livello internazionale un numero crescente di insolvenze (Cossin e Pirotte, 2001) relative a obbligazioni emesse sia da società private sia da Paesi emergenti. Esempi di default di *bond* emessi da società italiane appartengono invece alla storia più recente.

Una società che vuole espandersi, ma non ha sufficienti mezzi finanziari propri, può prendere a prestito i fondi necessari da una banca oppure può emettere dei titoli obbligazionari (se sussistono determinate condizioni). Esiste tuttavia la possibilità che prima di rimborsare il debito (o di pagare le cedole) la società incontri delle difficoltà finanziarie o addirittura fallisca. In tal caso il debito non verrà rimborsato (in tutto o in parte). A causa del rischio di insolvenza, il prestatore di fondi chiederà un tasso di interesse significativamente più elevato rispetto, ad esempio, ad un investimento "meno rischioso" in titoli di stato.

Una questione cruciale è la determinazione del valore equo (*fair value*) di un'obbligazione soggetta al rischio di credito. Gli strumenti utilizzati a tal fine sono i modelli per il rischio di insolvenza e per la variazione del merito creditizio.

In alternativa, noto il valore di mercato di un'obbligazione (o il livello dei tassi), ci si potrebbe chiedere cosa si può dedurre sulla probabilità di insolvenza. È pratica diffusa inferire dai prezzi di mercato delle obbligazioni soggette a rischio di credito la probabilità di insolvenza[7].

4 Le componenti del rischio di credito

Il rischio di credito è stato definito come la possibilità che una variazione inattesa del merito creditizio di una controparte nei confronti della quale esiste un'esposizione generi una corrispondente variazione inattesa del valore del credito. Contro il rischio di controparte, il soggetto prestatore di fondi è tenuto prudenzialmente ad accantonare dei fondi di riserva per far fronte alle possibili perdite finanziarie. Se si considera come creditore tipicamente un'istituzione finanziaria (una banca), questa ha l'obbligo di costituire una riserva a fronte dei rischi assunti (*expected loss reserve*). Se si considera che anche i clienti "migliori" possono, potenzialmente, divenire insolventi, è opportuno assicurarsi nei confronti di tutte le posizioni creditorie presenti in portafoglio.

Per ogni posizione vengono quantificate tre grandezze (si veda Bluhm et al., 2003):

- una probabilità di insolvenza (*default probability* – DP);
- il tasso di perdita in caso di insolvenza (*loss given default* – LGD);
- l'esposizione in caso di insolvenza (*exposure at default* – EAD).

Ognuna di queste grandezze può essere quantificata attraverso un sistema di rating.

Per ogni posizione viene definita una variabile di perdita, $\widetilde{L}$, nel modo seguente:

$$\widetilde{L} = EAD \times LGD \times L, \tag{1}$$

[6] Per una trattazione sui derivati di credito si rinvia, tra gli altri, a Das (1998) e Chorafas (2000). Per un'introduzione sull'argomento si veda, ad esempio, Hull (2003), capitolo 27.

[7] Si veda Wilmott (2003).

dove $L = \mathbf{1}_D$ rappresenta la variable aleatoria

$$\mathbf{1}_D = \begin{cases} 1 & \text{deafult} \\ 0 & \text{non default} \end{cases} \tag{2}$$

e D indica l'evento *default.*

4.1 La probabilità di default

Iniziamo ad analizzare la probabilità di insolvenza. Dalla definizione di L si ha

$$\mathbb{E}(L) = \mathbb{P}(D) = DP. \tag{3}$$

Si osservi che, sottostante al modello (3), deve essere definito un opportuno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove Ω è lo spazio campionario, $\mathcal{F}$ rappresenta l'informazione disponibile, $\mathbb{P}$ è una misura di probabilità.

In questo contesto si può definire la perdita attesa (*expected loss* – EL) come il valore atteso della variabile di perdita. Sotto opportune ipotesi, si ha

$$EL = \mathbb{E}\left[\widetilde{L}\right] = EAD \times LGD \times DP. \tag{4}$$

La semplice rappresentazione (4) della perdita attesa non è valida in generale, ma si basa su alcune assunzioni piuttosto forti, ovvero si assume che EAD ed LGD siano delle costanti. Ciò non è sempre realistico: vi sono infatti diverse situazioni in cui EAD ed LGD sono più propriamente descritte da variabili aleatorie.

Il valore dell'esposizione e il tasso di perdita in caso di insolvenza dipendono, in generale, da varie circostanze aleatorie quali: la forma tecnica del finanziamento, piani di ammortamento, *seniority* del debito, eventuali garanzie, usi e vincoli legislativi, altri fattori che influiscono sui tempi e sulle modalità di quantificazione della perdita e della frazione di credito che si riesce a recuperare.

Se l'esposizione in caso di insolvenza (EAD) è descritta da una variabile aleatoria, la perdita attesa è sempre data dall'equazione (4), purché si assuma che il default (D) sia un evento indipendente dalle altre variabili del modello e che EAD ed LDG siano dei valori attesi.

Anche l'assunzione di indipendenza è piuttosto arbitraria. L'equazione (4) è il modello che descrive nel modo più semplice possibile la perdita attesa, dal quale ci si allontana non appena si rimuovono le ipotesi semplificatrici.

Il concetto di perdita attesa definito dall'equazione (4) rimane valido finché si considera la perdita per insolvenza inerente ad una singola posizione. La perdita attesa deve essere invece ridefinita in modo opportuno quando si considera un portafoglio di crediti.

Nel seguito si assume che l'esposizione in caso di insolvenza (EAD) sia una quantità deterministica. Si assume, inoltre, che il tasso di perdita in caso di insolvenza (LGD) sia il valore atteso di una variabile aleatoria, indipendente dalla variabile L.

L'assegnazione di una probabilità di insolvenza (DP) ad ogni posizione presente nel portafoglio di crediti è una questione di cruciale importanza. Essenzialmente vi sono due approcci alla valutazione delle probabilità di insolvenza: in uno le probabilità di default vengono calibrate sui dati di mercato, mentre nell'altro vengono calibrate sulla base dei rating creditizi.

Un esempio di probabilità di default stimate sulla base dei prezzi di mercato sono le *expected default frequencies* (EDF^{TM}) del modello KMV[8]. Le probabilità di default possono essere calibrate anche a partire dagli spread creditizi (*credit spreads*) di attività finanziarie soggette al rischio di credito, quali obbligazioni emesse da società private o da Paesi emergenti, titoli derivati dei mercati *over the counter* o, ancora, derivati creditizi (ad esempio, *credit default swaps*).

Nelle sezioni che seguono, dedicate ai modelli strutturali e ai modelli in forma ridotta, verrà ripreso il tema della stima delle probabilità di default a partire dai dati di mercato. Questo contributo non si occuperà, invece, del problema della formazione dei rating creditizi. Per quanto riguarda il secondo approccio verranno dati solo alcuni brevi cenni.

4.2 Calibrazione delle probabilità di default sulla base dei rating creditizi

Le proababilità di default sono associate ai rating assegnati da alcune note agenzie, quali Moody's, S&P, Fitch, o dalla banca stessa secondo diverse metodologie (si parla in tal caso di *rating interni*).

I rating sono dei giudizi sul merito creditizio di un soggetto emittente titoli che incorporano rischio di credito. In realtà il rating si riferisce alla posizione creditoria (ad esempio ad una particolare emissione obbligazionaria) piuttosto che al soggetto debitore (la società emittente).

Per la formazione di tale giudizio vengono valutate informazioni sia quantitative che qualitative. Spesso la procedura per l'assegnazione di un rating è basata sul giudizio e sull'esperienza dell'analista creditizio e non solamente su calcoli matematici. Nella formazione dei ratings vengono presi in considerazione diversi fattori economici, tra cui: la prospettiva di guadagni futuri e i futuri *cash–flows*, la struttura patrimoniale (il livello dell'indebitamento in rapporto al capitale proprio), la struttura dell'indebitamento (a breve, medio e lungo termine), il livello di liquidità, la situazione (politica, sociale, ...) del Paese, la situazione di mercato, il settore industriale in cui la società in esame opera o ha le sue principali attività, la qualità della classe dirigente e altre informazioni.

Le agenzie di rating hanno elaborato una scala di valori (si vedano le tabelle 1 e 2). Tradizionalmente, le agenzie forniscono dei ratings sulla base di una scala più fine e accurata.

Per *calibrazione* si intende il processo che assegna una probabilità di insolvenza ad un dato rating. Come risultato di tale processo si ha una funzione del tipo

$$\{AAA, AA, \dots, C\} \to [0, 1] \tag{5}$$

che ad ogni rating assegna una corrispondente probabilità DP.

Le agenzie di rating forniscono le frequenze relative delle insolvenze inerenti alle obbligazioni; tali dati storici sono organizzati in tabelle, suddivisi per classi di rating e per anno[9]. Dai dati

[8] Moody's KMV Company è una società che sviluppa modelli e applicazioni per la gestione di portafogli di crediti; tali strumenti si basano su un approccio di tipo strutturale. Tra i principali prodotti di KMV vi sono il modello *Credit Monitor*™ per la stima delle *Expected Default Frequencies*™ (EDF™) a partire dalle informazioni reperibili sul mercato delle azioni, uno strumento on-line denominato *Credit Edge*™ e il modello *Portfolio Manager*™ per la stima della distribuzione di perdita relativa ad un portafoglio di crediti (il modello è anche detto *Global correlation model*).

[9] In Bluhm et al. (2003) sono riportati i dati di Moody's per gli anni 1983–2000, per alcune classi di rating.

AAA	*best credit quality, extremely reliable with regard to financial obligations*
AA	*very good credit quality, very reliable*
A	*more susceptible to economic conditions, still good credit quality*
BBB	*lowest rating in investment grade*
BB	*caution is necessary, best sub–investment credit quality*
B	*vulnerable to changes in economic conditions,* *currently showing the ability to meet its financial obligations*
CCC	*currently vulnerable, dependent on favorable economic conditions*
CC	*highly vulnerable to a payment default*
C	*close to or already bankrupt, payments on the obligation currently continued*
D	*payment default on some financial obligation has actually occurred*

Tabella 1: Classificazione di Standard & Poor's (Bluhm et al. (2003), p. 20).

Aaa	*Obbligazioni di massima qualità. Grado di rischio minimo.* *Pagamento di interessi protetto da un margine ampio o stabile.*
Aa	*Qualità elevata. Margine di protezione più basso rispetto ad Aaa.*
A	*Molti aspetti favorevoli per un investimento. Adeguata sicurezza di capitale.* *Potrebbe essere soggetta a deterioramento in futuro.*
Baa	*Né altamente protetta, né scarsamente garantita. Adeguata sicurezza per il presente.* *Manca di eccellenti caratteristiche per un investimento. Caratteristiche speculative.*
Ba	*Elementi speculativi. Futuro non del tutto sicuro.*
B	*Mancanza delle caratteristiche per un investimento interessante.*
Caa	*Scarsa qualità. Potrebbe divenire insolvente o a rischio rispetto a capitale o interessi*
Ca	*Elevato grado di speculazione. Spesso insolvente.*
C	*Classificazione più bassa.* *Possibilità estremamente scarse che raggiunga una reale solidità finanziaria.*

Tabella 2: Classificazione di Moody's (Wilmott (2003), tabella 21.2).

storici generalmente si osserva che per i rating migliori non sono state rilevate delle insolvenze. Un'interpretazione non corretta di tali dati porterebbe all'indicazione che gli investimenti in titoli emessi da società appartenenti alla categoria AAA siano del tutto privi di rischio. Si deve quindi trovare il modo di assegnare una probabilità di insolvenza positiva alla classe di rating migliore. Per esempio, alla classe AAA viene spesso assegnata una probabilità di default di due punti base (dove 1 *basis point* $= 0.01\,\%$): ci si aspetta che l'insolvenza tra le società appartenenti alla classe AAA si verifichi (in media) due volte ogni 10 000 anni.

Bluhm et al. (2003) propongono un metodo molto semplice per superare il problema, denominato *"quick-and-dirty" solution*. A partire dalle frequenze relative storiche inerenti alle insolvenze, se ne calcolano la media e la deviazione standard relative all'arco temporale preso in considerazione. Quindi si stima una curva di tendenza mediante una semplice regressione; studi empirici hanno evidenziato che l'andamento delle frequenze di default al variare del merito creditizio è di tipo esponenziale. Infine, si utilizza l'equazione ottenuta per la stima delle probabilità di default e si riassegna una probabilità di insolvenza per ogni classe. In tal modo, anche alle classi migliori viene assegnata una probabilità di default positiva. Come ulteriore effetto della regressione, si può avere uno smussamento dei valori che limita gli errori di campionamento.

Le agenzie di rating raccolgono continuamente dati sulle singole società e procedono a classificare e riclassificare periodicamente ogni soggetto emittente titoli di debito. Una variazione di rating è definita *migrazione* e ha un effetto importante sul prezzo delle obbligazioni emesse. La migrazione a un rating superiore aumenterà il valore di un'obbligazione e ne ridurrà il rendimento, in quanto si considera che la società abbia meno probabilità di divenire insolvente; il contrario accade quando si verifica una migrazione ad una classe di rating inferiore.

Si possono individuare essenzialmente due stadi nella costruzione dei modelli per la valutazione delle obbligazioni soggette al rischio di credito nello scenario del rating creditizio: in primo luogo, si deve formalizzare la migrazione da una classe all'altra di rating e poi si deve determinare il prezzo dell'obbligazione prendendo in considerazione tale migrazione. Lo strumento matematico–probabilistico utilizzato per la costruzione di un modello per la migrazione di rating è la *matrice di transizione*.

Si consideri, ad esempio, una società attualmente classificata, ad esempio, come AA. Ci si può chiedere quale sia la probabilità che fra un anno essa mantenga lo stesso rating, oppure la probabilità di passare ad una classe di rating migliore o a una peggiore o, addirittura, che diventi insolvente. È possibile rappresentare le probabilità di questi scenari in un orizzonte temporale di un anno mediante una matrice di transizione del tipo rappresentato nella figura 1.

Trattandosi di una matrice di transizione, i cui elementi sono delle probabilità condizionate, i valori p_{ij} sono non negativi e la somma degli elementi di ciascuna riga è pari a 1. Se una società si rende insolvente, non potrà più abbandonare lo stato D (D è quindi uno stato assorbente). La matrice di transizione fornisce le probabilità di migrazione su un orizzonte temporale finito. Lo strumento probabilistico utilizzato per descrivere una sequenza di migrazioni è rappresentato dalle catene di Markov.

La chiave di lettura della tabella riportata nella figura 1 è la seguente: all'epoca corrente l'obbligazione in esame è classificata nella classe di rating AA. La probabilità che fra un anno abbia ancora rating AA è rappresentata sulla riga AA dalla probabilità p_{22}. La probabilità di passare alla classe di rating AAA è rappresentata da p_{21}.

	AAA	AA	...	C	D
AAA	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	$p_{1,K-1}$	$p_{1,K}$
AA	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	$p_{2,K-1}$	$p_{2,K}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
C	$p_{K-1,1}$	$p_{K-1,2}$	$\cdots$	$p_{K-1,K-1}$	$p_{K-1,K}$
D	0	0	...	0	1

Figura 1: Una matrice di transizione $K \times K$.

4.3 L'esposizione in caso di insolvenza e il tasso di recupero

Torniamo ad occuparci ora delle altre due componenti del rischio di credito. È utile scomporre l'esposizione in caso di insolvenza (EAD) nella somma di due componenti:

$$EAD = OUTST + \gamma \times COMM, \tag{6}$$

dove $OUTST$ sta per *outstandings* e $COMM$ sta per *commitments*, ovvero gli impegni assunti dalla banca (l'ammontare del fido concesso). La frazione delle somme affidate utilizzate è, in generale, una variabile aleatoria e $\gamma \in [0.1]$ è il valore atteso di tale variabile che descrive la componente aleatoria dell'esposizione. Nella pratica, le banche calibrano γ in base al merito creditizio della controparte e al tipo di finanziamento.

L'ultima componente del rischio di credito che consideriamo è il tasso di perdita in caso di insolvenza LGD (*loss given default*). LGD è una variabile casuale che descrive l'entità o gravità della perdita (*severity* – SEV) in caso di default.

Il tasso di perdita in caso di insolvenza corrisponde a

$$LGD = 1 - \delta \tag{7}$$

dove δ indica il tasso di recupero (*recovery rate*).

I tassi di recupero dipendono da molti fattori (aleatori) e sono difficili da stimare, soprattutto per mancanza di dati storici sulle insolvenze, sui recuperi effettivi e sui tempi di recupero. Le agenzie di rating forniscono delle stime dei tassi di recupero inerenti alle obbligazioni soggette al rischio di credito per cui si è verificata l'insolvenza, suddivisi in base alla *seniority* del titolo.

4.4 La perdita inattesa

Dopo aver definito la perdita attesa EL, in questa sezione definiamo la perdita "inattesa". Il soggetto prestatore di fondi (la banca) in aggiunta alle riserve accantonate per coprire le perdite attese, deve assicurarsi anche per le perdite eccedenti le perdite medie verificatesi in passato. Come misura dell'ordine di grandezza della deviazione dalle perdite attese (EL) si adotta la deviazione standard della variabile di perdita $\widetilde{L}$ definita dall'equazione (1).

Tale quantità è detta *unexpected loss* (UL) ed è definita come segue:

$$UL = \sqrt{\mathbb{V}\left(\widetilde{L}\right)} = \sqrt{\mathbb{V}[EAD \times SEV \times L]}, \tag{8}$$

dove $\mathbb{V}\left(\widetilde{L}\right)$ rappresenta la varianza della perdita.

Sotto opportune ipotesi vale il seguente risultato di immediata dimostrazione (si veda Bluhm et al., 2003).

Proposizione 1. Se si assume che SEV e D siano due variabili aleatorie non correlate e che EAD sia una costante, allora la perdita inattesa UL è data da

$$UL = EAD\sqrt{\mathbb{V}[SEV] \times DP + LGD^2 \times DP(1-DP)}. \tag{9}$$

□

Si osservi che le ipotesi della proposizione 1 sono poco realistiche. Infatti non è inverosimile che in media il tasso di recupero diminuisca al peggiorare delle condizioni economiche.

Passiamo ora a considerare la perdita relativa ad un portafoglio di crediti. A tal fine, definiamo la variabile di perdita sulla singola posizione:

$$\widetilde{L}_i = EAD_i \times SEV_i \times L_i, \tag{10}$$

dove $L_i = \mathbf{1}_{D_i}$ e

$$\mathbb{P}(D_i) = DP_i \qquad\qquad i = 1, \ldots, m. \tag{11}$$

La perdita relativa all'intero portafoglio sarà data da

$$\widetilde{L}_P = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{L}_i = \sum_{i=1}^{m} EAD_i \times SEV_i \times L_i. \tag{12}$$

La perdita attesa è data dal valore atteso della variabile $\widetilde{L}_P$ che, sotto opportune ipotesi, risulta

$$EL_P = \sum_{i=1}^{m} EL_i = \sum_{i=1}^{m} EAD_i \times LGD_i \times DP_i. \tag{13}$$

Definiamo, infine, la perdita inattesa di portafoglio, come segue

$$UL_P = \sqrt{\mathbb{V}\left[\widetilde{\mathbb{L}_\mathbb{P}}\right]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} EAD_i \times EAD_j \times Cov[SEV_i \times L_i,\, SEV_j \times L_j]}. \tag{14}$$

Vale il seguente risultato (si veda Bluhm et al., 2003).

Proposizione 2. Per un portafoglio con SEV_i costanti ($SEV_i = SEV$, per $i = 1, \ldots, m$), si ha

$$UL_P^2 = \sum_{i,j=1}^{m} EAD_i \times EAD_j \times LGD_i \times LGD_j \times \sqrt{DP_i(1-DP_i)DP_j(1-DP_j)}\rho_{ij}, \tag{15}$$

dove $\rho_{ij} = Corr[L_i, L_j] = Corr[\mathbf{1}_{D_i}, \mathbf{1}_{D_j}]$ indica la correlazione (*default correlation*) tra l'insolvenza della posizione i e l'insolvenza della posizione j.

□

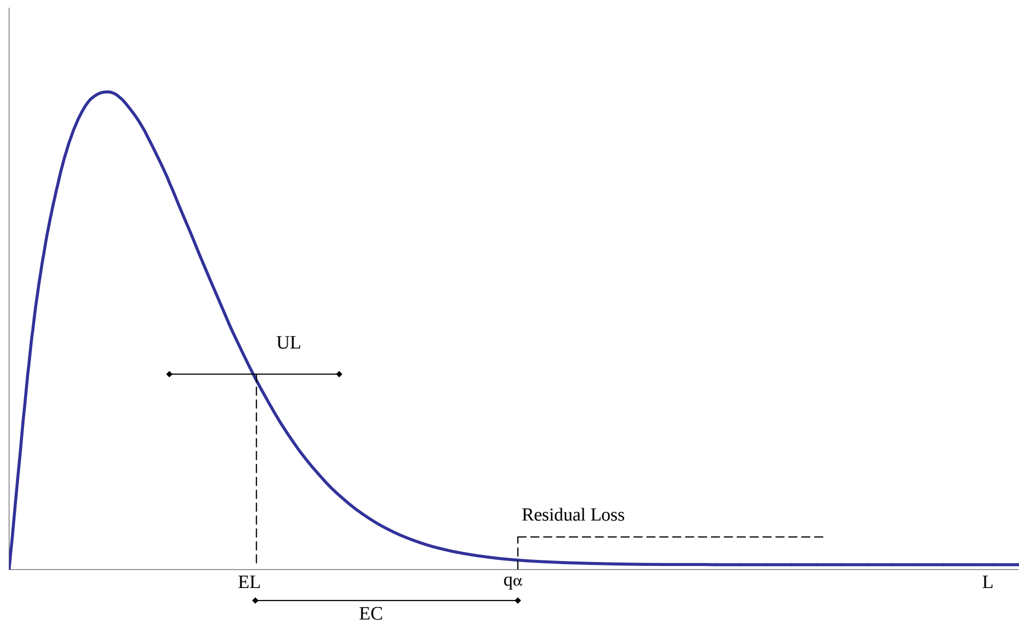

Figura 2: Una distribuzione probabilistica delle perdite per insolvenza.

4.5 Il capitale a rischio

Un altro concetto importante è quello di capitale economico, dato un certo livello di confidenza. Sinonimi di capitale economico (*economic capital – EC*) sono capitale a rischio e *credit Value–at–Risk*.

Fissato un certo livello di confidenza α, il capitale a rischio EC può essere definito come l'α-quantile della perdita di portafoglio $\widetilde{L}_P$ meno la perdita attesa:

$$EC_\alpha = q_\alpha - EL_P, \tag{16}$$

dove

$$q_\alpha = \inf\left\{q > 0 \,:\, \mathbb{P}\left[\widetilde{L}_P \leq q\right] \geq \alpha\right\}. \tag{17}$$

Per il calcolo di q_α è necessario conoscere (o essere in grado di stimare) la distribuzione delle perdite relativa a tutto il portafoglio di crediti (ovvero la distribuzione di $\widetilde{L}_P$). Vi sono essenzialmente due modi per generare una distribuzione di perdita (*loss distribution*) del portafoglio:

- mediante approssimazione analitica,
- mediante metodi di simulazione Monte Carlo (*empirical loss distribution*).

Per una trattazione introduttiva sull'argomento si rimanda a Bluhm et al. (2003).

La figura 2 mostra una tipica distribuzione di perdita[10] e riporta le diverse grandezze definite precedentemente; in particolare, l'area sotto la curva eccedente l'$\alpha-$quantile rappresenta la perdita residua potenziale.

[10]Si tratta, in particolare, di una distribuzione beta.

5 Modelli strutturali

Vengono classificati come modelli strutturali che, per la determinazione della probabilità di *default* e del tasso di recupero in caso di insolvenza, si basano sull'evoluzione del valore dell'attivo (quindi sulla conoscenza della struttura patrimoniale) di una società emittente (*firm-value models*) e sulla teoria della valutazione di opzioni finanziarie.

L'idea di applicare la teoria dell'*option pricing* (Black e Scholes, 1973) al problema della valutazione delle obbligazioni e di altre esposizioni che comportano rischio di credito risale ad un'intuizione di Merton (1974). Negli ultimi anni, tali idee sono state sviluppate in diverse direzioni[11].

Rientrano tra i modelli strutturali anche i modelli cosiddetti di *first passage time* introdotti da Black e Cox, 1976 (si veda anche Longstaff e Schwartz, 1995), che considerano la possibilità di *default* prima della scadenza del debito, se il valore dell'attivo scende al di sotto di una certo livello.

5.1 Firm value models

Si consideri un semplice prestito di ammontare nominale B con scadenza, ad esempio, di un anno. Tale prestito può essere considerato come uno *zero-coupon bond* con scadenza fissa $T = 1$ e valore di rimborso B.

Nel corso dell'anno la società (prenditrice dei fondi) investirà le somme ricevute in diversi progetti e attività. Sia A il processo (stocastico) che descrive il valore delle attività dell'azienda. Alla scadenza del prestito possono verificarsi due casi: il valore delle attività supera il valore del debito oppure è inferiore.

Se alla scadenza del prestito il valore delle attività è maggiore del valore nominale del prestito ($A_T \geq B$), la società sarà in grado di far fronte ai propri obblighi e avrà un incentivo a rimborsare il prestito.

Se, invece, all'epoca T il valore di mercato dell'azienda è inferiore a B (cioè $A_T < B$), il prestito non sarà rimborsato e le attività saranno liquidate per ripagare parzialmente il debito.

Dal punto di vista del soggetto finanziatore si configurano due possibili alternative:

- se $A > B$, interessi e prestito saranno ripagati completamente;
- se $A \leq B$, i possessori di obbligazioni subiranno delle perdite.

Alla scadenza del prestito il payoff del prestatore di fondi sarà dato da:

$$B + \min(A_T - B, 0) = B - \max(B - A_T, 0) = \min(A_T, B). \tag{18}$$

Si osservi che, poiché vi possono essere altri costi (diretti e indiretti) derivanti dal mancato pagamento del debito (*bankruptcy costs*), il soggetto prestatore di fondi subirà in genere una perdita maggiore rispetto ai soli interessi e alle somme erogate. Il suo payoff è isomorfo a quello del *writer* di un'opzione put, con prezzo di esercizio B e attività sottostante A; si veda la figura 3.

[11]KMV, ad esempio, ha elaborato in questo filone un modello per la previsione dell'insolvenza denominato *Credit Monitor Model*™.

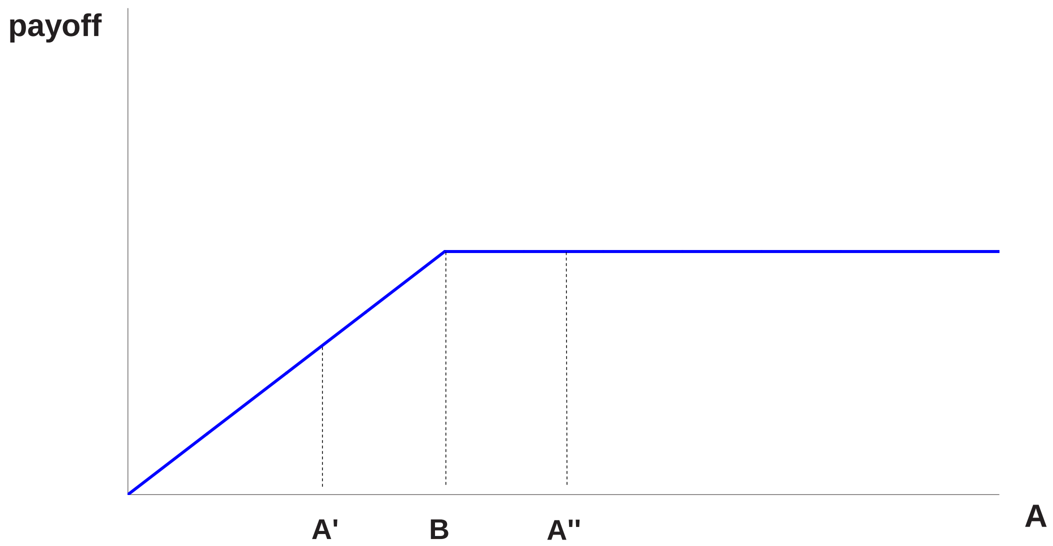

Figura 3: Payoff del prestatore di fondi

Dalla teoria dell'option pricing si ha la ben nota formula per il valore di un'opzione put scritta su un titolo azionario, con prezzo di esercizio X:

$$p_t(S_t, X, T-t) \;=\; f(S_t, X, r, \sigma_S, \tau). \tag{19}$$

Il valore di un'opzione put scritta sull'attivo di una società, con prezzo di esercizio pari al valore nominale del debito, B, è

$$p_t(A_t, B, T-t) \;=\; f(A_t, B, r, \sigma_A, \tau). \tag{20}$$

S_t, σ_S, X, B, r e τ sono variabili osservabili; r è il tasso di interesse privo di rischio assunto costante. $\tau = T - t$ è il tempo mancante alla scadenza del debito (*default horizon*). σ_S e σ_A sono, rispettivamente, le volatilità del valore di mercato delle azioni e del *valore di mercato dell'attivo*.

È importante osservare che il valore di mercato dell'attivo A e la sua volatilità σ_A non sono direttamente osservabili. Se lo fossero, il valore del debito (soggetto a rischio di credito), il valore dell'opzione nell'equazione (20) e lo spread di *equilibrio* per i prestiti soggetti a rischio di credito rispetto al tasso *risk–free* potrebbero essere calcolati.

Le ipotesi alla base del modello di Merton sono le seguenti (per una discussione sulle ipotesi del modello si rimanda, tra gli altri, a Cossin e Pirotte (2001), capitolo 3):

- i mercati sono privi di attriti;
- si assume l'assenza di opportunità di arbitraggio;
- il valore di mercato dell'attivo è governato da un processo stocastico $(A_t)_{t\geq 0}$ di tipo moto browniano geometrico;
- la struttura del capitale della società è, all'epoca t, descritta dalla seguente equazione[12]

$$A_t = E_t + D_t; \tag{21}$$

[12] In particolare, si assume vi sia un unico debito in essere che scade all'epoca T.

- $(E_t)_{t\geq 0}$ è il processo stocastico che descrive il valore di mercato delle azioni (un moto browniano geometrico, per assunzione);
- $(D_t)_{t\geq 0}$ è il processo che descrive il valore di mercato del debito, rappresentato da uno *zero-coupon bond* con scadenza T e valore nominale B.

Dal punto di vista del soggetto finanziatore, si ha rischio di credito se e solo se

$$\mathbb{P}[A_T < B] > 0. \tag{22}$$

Se la probabilità di insolvenza è strettamente positiva, si ha

$$D_0 < Be^{-rT}. \tag{23}$$

La disequazione (23) deve valere necessariamente, poiché chi presta dei fondi pretende una compensazione per il rischio di insolvenza della controparte. Tale *premio per il rischio* di credito può essere caricato implicitamente scontando il valore B ad un tasso maggiore al tasso applicato alle attività prive di rischio.

Il problema della copertura del rischio di credito è piuttosto controverso[13]: il prestatore di fondi si può coprire (teoricamente) dal rischio di credito assumendo una posizione lunga su un'opzione put scritta sull'attività A, con prezzo di esercizio B e scadenza T. Il suo portafoglio sarà quindi costituito da un'opzione put europea e un bond di valore nominale B (la tabella 3 riporta i cash flow e i payoff alla scadenza derivanti da tale strategia).

In ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio, all'epoca iniziale $t = 0$ il valore del portafoglio del prestatore è dato da

$$D_0 + p_0(A_0, B, r, \sigma_A, T) = Be^{-rT}, \tag{24}$$

da cui deriva

$$D_0 = Be^{-rT} - p_0(A_0, B, r, \sigma_A, T). \tag{25}$$

Il valore iniziale del debito è dato dal valore attuale (calcolato in base al tasso privo di rischio r) del valore nominale del debito B meno il prezzo di un'opzione put europea utilizzata per coprirsi dal rischio di credito.

Diamo ora un'interpretazione del debito dal punto di vista della società finanziata. Questa assume una posizione lunga su una put europea scritta sul valore dell'attivo e con prezzo di esercizio B. Il payoff alla scadenza è dato da

$$\max(B - A_T, 0) - B. \tag{26}$$

Dal punto di vista della società, il valore del capitale proprio può essere descritto come una posizione corta su un'opzione call, scritta sul valore dell'attivo A_0, con prezzo di esercizio B e scadenza T. Gli azionisti assumono, invece, una posizione lunga su un'opzione call europea

$$E_0 = c_0(A_0, B, r, \sigma_A, T). \tag{27}$$

[13] Si veda, tra gli altri, Cossin e Pirotte (2001) e Bluhm et al. (2003).

	asset value	cash flow	payoff
$t = 0$	A_0	$-D_0$ $-p_0$ (long put)	$-D_0 - p_0$
$t = T$	$A_T < B$	A_T $B - A_T$	B
$t = T$	$A_T \geq B$	B 0	B

Tabella 3: Copertura del rischio di credito (tabella 3.2 in Bluhm et al. (2003), p. 135).

Dalle equazioni (21), (25) e (27) si ottiene

$$A_0 + p_0(A_0, B, r, \sigma_A, T) = c_0(A_0, B, r, \sigma_A, T) + Be^{-rT}, \tag{28}$$

ovvero la ben nota relazione di parità *put-call* per opzioni europee.

Osserviamo che gli azionisti (*shareholders*) e i creditori (*bondholders*) hanno interessi chiaramente opposti: per i primi un aumento della volatilità dell'attivo comporta un aumento del valore dell'opzione call; per i secondi (che assumono un posizione *short* in un'opzione put) si configura la situazione opposta.

Un problema che emerge nel modello brevemente descritto consiste nella determinazione del valore di mercato e della volatilità dell'attivo a partire dai valori di mercato delle azioni (qualora siano disponibili). Il valore di mercato del capitale proprio è osservabile ed è dato dalla *capitalizzazione di borsa*:

$$E_t = numero\ di\ azioni\ \times\ valore\ di\ un'azione. \tag{29}$$

Anche la volatilità σ_E è in qualche modo osservabile o stimabile.

In base alla formula di Black-Scholes, il valore corrente di mercato delle azioni è dato da

$$E_0 = A_0 N(d_1) - Be^{-rT} N(d_2), \tag{30}$$

dove

$$d_1 = \frac{ln(A_0/B) + (r + \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}} \tag{31}$$

e

$$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T}. \tag{32}$$

$N(\cdot)$ è la funzione di ripartizione di una variabile casuale gaussiana standardizzata.

A_0 e σ_A non sono osservabili, ma si può dimostrare (date le ipotesi sull'evoluzione di A ed E) che vale la seguente relazione tra le volatilità dei due processi

$$\frac{\sigma_E}{\sigma_A} = \frac{A_0}{E_0} \frac{\partial E}{\partial A}, \tag{33}$$

con $\partial E/\partial A = N(d_1)$ (si vedano, tra gli altri, Cossin e Pirotte, 2001, e Crosbie e Bohn, 2003).

Ne deriva che, per stimare A_0 e σ_A si devono risolvere simultaneamente le equazioni (30) e (33). Ericsson e Reneby (2002) propongono un metodo basato sulle stime di massima verosimiglianza per la valutazione delle due grandezze non direttamente osservabili.

In tale contesto, si può ottenere la probabilità di default; in un mondo neutrale verso il rischio, la probabilità di insolvenza è data da $N(-d_2)$, ovvero dalla probabilità che risulti $A_T < B$.

5.2 Modelli di first passage time

Nel modello di Black-Scholes e Merton si ipotizza che l'insolvenza possa manifestarsi solo alla scadenza del prestito. Nei modelli di *first passage time*, considerati in questa sezione, tale ipotesi viene rilassata per consentire il default in qualsiasi momento prima dell'epoca T.

Si è già osservato come la diversa caratterizzazione dell'epoca in cui avviene il default è un punto cruciale nella distinzione tra le due classi predominanti di modelli per il rischio di credito (Jarrow e Protter, 2004).

L'epoca in cui si verifica l'insolvenza verrà qui definita come il primo istante in corrispondenza del quale il valore dell'attivo dell'azienda debitrice scende al di sotto di un certo livello detto *default boundary* o *default barrier*. Tale frontiera di default potrà essere costante (come nel contributo di Longstaff e Schwartz, 1995), ovvero una funzione del tempo (come in Black e Cox, 1976, che considerano una frontiera esponenziale) o, ancora, descritta da un processo stocastico (come nel contributo di Saá-Requejo e Santa-Clara, 1999). L'interpretazione economica che si può dare al superamento della frontiera di default è una qualche violazione di accordi contrattuali inerenti al prestito.

Formalmente, si consideri un modello a tempo continuo sull'orizzonte temporale $[0, \overline{T}]$. Sia dato uno spazio di probabilità munito di filtrazione $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t;\, t \in [0, \overline{T}])\}$. L'informazione disponibile è descritta dalla filtrazione $(\mathcal{F}_t;\, t \in [0, \overline{T}])$.

Si consideri una società qualsiasi che prende a prestito dei fondi nella forma tecnica di uno *zero-coupon bond* che promette di pagare 1 alla scadenza T. Sia $v(t, T)$ il valore di un *defaultable zero-coupon bond* all'epoca t, con scadenza al'epoca T. Come nella sezione precedente, si assume che questa sia l'unica passività della società e che siano negoziati *default-free zero-coupon bond* per tutte le scadenze.

Indichiamo con r_t il tasso spot default free; si assume, inoltre, assenza di opportunità di arbitraggio per i mercati delle obbligazioni (sia defaultable che default free). Si assume, quindi, l'esistenza (non l'unicità) di una misura di martingala equivalente $\mathbb{Q}$.

Siano $(A_t)_{t \geq 0}$ il processo stocastico che descrive il valore dell'attivo e K_t il valore della frontiera di default all'epoca $t \in [0, T]$. Se si ammette che, nel caso più generale, K_t possa essere aleatorio, l'insieme informativo all'epoca t sarà descritto dalla $\sigma-$algebra $\mathcal{F}_t = \sigma(A_u, K_u;\, u \leq t)$.

Un'altra assunzione riguarda il pagamento agli obbligazionisti, in caso di insolvenza, del valore di recupero. Si può assumere che tale somma sia pari al valore della frontiera alla scadenza e che venga comunque pagata alla scadenza del debito, oppure si potrebbe considerare il valore della frontiera all'epoca del default.

Riportiamo la seguente definizione (si veda, tra gli altri, Karatzas e Shreve, 1991).

Definizione 1. Dato uno spazio di probabilità munito di filtrazione $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t;\, t \in [0, \overline{T}])\}$, si definisce *tempo d'arresto* una variabile aleatoria τ che assume valori non negativi e tale che l'evento $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, per ogni $t \in [0, \overline{T}]$.

$\square$

In questo contesto, l'epoca in cui si manifesta l'insolvenza (*default time*) è descritta da una variabile aleatoria che corrisponde al tempo di primo passaggio attraverso la frontiera di default. Formalmente, tale variabile è descritta dal tempo di arresto

$$\tau \,=\, \inf\{t \,:\, A_t \leq K_t\}. \tag{34}$$

Nei modelli strutturali il tempo di default è un tempo d'arresto *prevedibile*. Tale proprietà non vale in generale se il processo $(A_t)_{t\geq 0}$, ad esempio, è di tipo *jump-diffusion*.

Definizione 2. Un tempo d'arresto τ è detto *prevedibile* se esiste una successione di tempi d'arresto $(\tau_n)_{n\geq 1}$ tale che (τ_n) è crescente, $\tau_n \leq \tau$ su $\{\tau > 0\}$ per ogni n e $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \tau$ quasi certamente.

$\square$

Come osservato da Jarrow e Protter (2004), intuitivamente un tempo d'arresto prevedibile è "noto" un istante prima della sua realizzazione. Poiché il processo che governa il valore dell'attivo è continuo, è possibile prevedere, un attimo prima che accada, che la frontiera di default sarà oltrepassata. Il default può essere in qualche modo anticipato osservando le traiettorie del processo $(A_t)_{t\geq 0}$.

Se si assume che il valore di recupero sia pari al valore della frontiera al momento del default, allora il valore del defaultable bond sarà dato da:

$$v(0,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}}K_\tau + \mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\cdot 1\right)\, e^{-\int_0^T r_u du}\right). \tag{35}$$

Nel caso in cui il tasso di interesse r è costante, la frontiera di default è anch'essa costante e pari al livello K per ogni $t \in [0,T]$ e la volatilità dell'attivo σ è costante, allora l'espressione (35) può essere valutata in forma chiusa (si vedano Saá-Requejo e Santa-Clara, 1999, Bielecki e Rutkowski, 2002, e Jarrow e Protter, 2004) e si ottiene:

$$v(0,T) = Ke^{-rT}\mathbb{Q}(\tau \leq T) + e^{-rT}[1 - \mathbb{Q}(\tau \leq T)], \tag{36}$$

dove

$$\mathbb{Q}(\tau \leq T) = \mathcal{N}(h_1(T)) + A_0 e^{1-2r/\sigma^2}\mathcal{N}(h_2(T)), \tag{37}$$

$$h_1(T) = \frac{-\log A_0 - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{(T)}}, \tag{38}$$

$$h_2(T) = \frac{-\log A_0 + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{(T)}}, \tag{39}$$

e $\mathcal{N}(\,\cdot\,)$ è la funzione di ripartizione di una variabile casuale normale standardizzata.

In generale, non sono note soluzioni in forma chiusa per la valutazione della probabilità $\mathbb{Q}(\tau \leq T)$. Nel caso in cui i tassi di interesse default-free siano stocastici ma con volatilità deterministica sono state proposte in letteratura delle soluzioni approssimate (si vedano, Nielsen et al., 1993, Hsu et al., 2002, e Durbin, 1992, per l'approssimazione della probabilità di primo passaggio prima dell'epoca T). Saá-Requejo e Santa-Clara (1999) e Hsu et al. (2002) propongono di valutare la probabilità $\mathbb{Q}(\tau \leq T)$ mediante la simulazione Monte-Carlo.

Oltre ai contributi già citati, altri metodi basati sullo studio del tempo di primo passaggio sono stati proposti da Kim et al. (1993), Shimko et al. (1993), Brys e de Varenne (1997), Catchart ed El-Jahel (1998), Taurén (1999), Collin-Dufresne e Goldstein (2001) e Hui et al. (2003).

Altri autori studiano il problema della determinazione della struttura patrimoniale ottimale e della scelta da parte del management dell'epoca più favorevole in corrispondenza della quale dichiarare lo stato di insolvenza (per un approfondimento e l'indicazione di alcuni riferimenti bibliografici sull'argomento si veda, ad esempio, Bielecki e Rutkowski, 2002).

6 Modelli in forma ridotta

Oggetto di questa sezione è lo studio di una classe di modelli per la misurazione del rischio di credito noti come *modelli in forma ridotta* o *hazard rate models* (basati sulle intensità o sui tassi d'azzardo). Talvolta tali modelli vengono ulteriormente classificati (si veda a tal proposito Bielecki e Rutkowski, 2002) in modelli cosiddetti *intensity-based* (Jarrow e Turnbull, 1995) e modelli per la migrazione di rating (tra questi citiamo il modello di Jarrow, Lando e Turnbull, 1997).

Si tratta di un approccio relativamente recente al rischio di credito, in cui l'insolvenza viene trattata come un evento completamente esogeno, ovvero non dipendente dalla performance della società o del Paese in esame. Tali modelli sono basati sulla specificazione di un processo esogeno che governa l'insolvenza: tipicamente si assume che tale processo sia di Poisson, mentre il tasso di recupero viene spesso assunto costante.

Un processo di Poisson è una scelta tipica per descrivere l'evento insolvenza nei modelli in forma ridotta. Tale processo viene spesso utilizzato, non solo in finanza, per descrivere un improvviso cambiamento di stato. Più precisamente, un processo di Poisson, indicato con dq, può essere definito come segue,

$$dq = \begin{cases} 0 & \text{con probabilità} \quad 1 - \lambda dt \\ 1 & \text{con probabilità} \quad \lambda dt, \end{cases} \tag{40}$$

dove λdt rappresenta la probabilità che si verifichi un "salto" di ampiezza q nell'intervallo di tempo $[t,\, t+dt]$ e il parametro λ è detto *intensità* del processo di Poisson.

In particolare, quando l'intesità del processo di Poisson è costante, il rendimento delle obbligazioni soggette a rischio di credito è dato dalla somma del rendimento di un'obbligazione *default–free* e di un opportuno differenziale (*spread*) indipendente dal tempo (Wilmott, 2003). L'intensità del processo di Poisson può essere anche una funzione del tempo oppure una variabile aleatoria.

Si consideri ora una società che ha emesso un titolo obbligazionario e si assuma che all'epoca t tale società non sia insolvente. Si adotti come processo che governa il verificarsi dell'evento insolvenza il modello descritto dall'equazione (40): la società diverrà insolvente in corrispondenza della prima realizzazione del processo di Poisson (40) con intensità λ.

La probabilità di insolvenza tra le epoche t e $t + dt$ è $\lambda\, dt$. L'intensità λ assume allora il significato di *rischio istantaneo di insolvenza*.

Si consideri λ, il rischio istantaneo di insolvenza, costante e si voglia determinare il rischio di insolvenza prima dell'epoca T. Sia $\eta(t, T)$ la probabilità che l'emittente non sia insolvente prima dell'epoca T, condizionata all'evento di non essere insolvente all'epoca t ($0 \leq t \leq T < +\infty$). La probabilità di insolvenza nell'intervallo $(t, t + dt]$ è data da

$$\eta(t + dt, T) - \eta(t, T) = \lambda dt\, \eta(t, T). \tag{41}$$

Dall'equazione (41) si ottiene un'equazione differenziale ordinaria che rappresenta il tasso di variazione della probabilità:

$$\frac{\partial \eta(t, T)}{\partial t} = \lambda\, \eta(t, T). \tag{42}$$

Se si assume che la società inizialmente non sia insolvente, vale inoltre la condizione

$$\eta(T, T) = 1. \tag{43}$$

La soluzione del problema (42)–(43) è la seguente

$$\eta(t, T) = e^{-\lambda(T-t)}. \tag{44}$$

La probabilità di insolvenza prima dell'epoca T è allora data da

$$1 - \eta(t, T) = 1 - e^{-\lambda(T-t)}. \tag{45}$$

Se indichiamo con τ^* la variabile aleatoria che descrive l'epoca in corrispondenza della quale si verifica l'insolvenza, quanto detto precedentemente equivale ad assumere che τ^* sia distribuita secondo una legge esponenziale sull'intervallo $(0, +\infty)$, con parametro λ (si veda Jarrow e Turnbull, 1995).

Si ha, allora,

$$\mathbb{P}_t(\tau^* > T) = \mathbb{E}_t(\mathbf{1}_{\{\tau^* > T\}}) = e^{-\lambda(T-t)}. \tag{46}$$

e

$$\mathbb{P}_t(\tau^* \leq T) = \mathbb{E}_t(\mathbf{1}_{\{\tau^* \leq T\}}) = 1 - e^{-\lambda(T-t)}, \tag{47}$$

dove

$$\mathbf{1}_{\{\tau^* \leq T\}} = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau^* \leq T \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{48}$$

$\mathbb{P}_t(\,\cdot\,)$ e $\mathbb{E}_t(\,\cdot\,)$ sono, rispettivamente, la probabilità e il valore atteso condizionati alla non insolvenza fino all'epoca t.

Passiamo ora al problema della valutazione di un'obbligazione soggetta a rischio di credito; nel seguito verranno prese in considerazione obbligazioni senza cedola (*zero-coupon bonds).* Tali titoli vengono denominati *defaultable* o *risky zero-coupon bonds* (obbligazioni "rischiose"); in questo caso l'aggettivo "rischioso" sta ad indicare il rischio di insolvenza, ovvero la possibilità che il valore di rimborso non venga (in tutto o in parte) pagato a scadenza. Per contro, un titolo "sicuro" viene denominato *default–free bond* e non è soggetto a rischio di credito.

Il valore di un *defaultable* (o *risky*) *zero-coupon bond* all'epoca t, che promette di pagare 1 alla scadenza T, può essere calcolato considerando il valore attuale del flusso di cassa atteso.

Sia $v(t,T)$ il valore di un *defaultable zero-coupon bond* all'epoca t, con scadenza in T. Sia $p(t,T)$ il valore di un *default-free zero-coupon bond* all'epoca t, con scadenza in T. Si assuma, inoltre, che il tasso di recupero (*recovery rate*) sia nullo in caso di insolvenza.

Il valore del *defaultable zero-coupon bond* è dato da

$$v(t,T) = e^{-\lambda(T-t)} p(t,T), \tag{49}$$

dove $e^{-\lambda(T-t)}$ è la probabilità di non default prima dell'epoca T.

Il rendimento alla scadenza di un *defaultable zero-coupon bond* è dato da

$$-\frac{\log\left(e^{-\lambda(T-t)} p(t,T)\right)}{T-t} = -\frac{\log p(t,T)}{T-t} + \lambda. \tag{50}$$

Si osservi che l'effetto del rischio di insolvenza sul rendimento si ottiene aggiungendo un differenziale (*credit spread*) λ, che in questo semplice modello è assunto costante per tutte le scadenze.

Il seguente semplice esempio mostra come, a partire dai prezzi delle obbligazioni e utilizzando il modello presentato sopra, si possa facilmente calcolare la probabilità di insolvenza (si veda Wilmott, 2003).

Esempio. Si consideri un titolo a capitalizzazione integrale privo di rischio che paga 100 fra tre anni, il cui prezzo corrente è 85.75.

Si consideri un altro titolo a capitalizzazione integrale, emesso da una società privata, che promette di rimborsare alla scadenza, fra tre anni, il valore nominale 100. Il prezzo di mercato di tale titolo è 78.25.

Il tasso di rendimento alla scadenza annuo del primo titolo è 5.12 %, mentre il tasso di rendimento annuo del titolo rischioso è 8.18 %. Il differenziale λ è 3.06 %. Ciò significa che il mercato si aspetta una probabilità di insolvenza $(1 - e^{-\lambda})$ pari a circa il 3 % su base annua.

□

Il modello fin qui utilizzato per descrivere il rischio di insolvenza è piuttosto semplice e trascura alcuni importanti aspetti: non sono state fatte ipotesi sulla struttura stocastica dei tassi di interesse *default–free*, il tasso di recupero in caso di insolvenza è stato supposto nullo e l'intensità del processo di Poisson costante. Il modello diviene più realistico non appena alcune ipotesi semplificatrici vengono rimosse.

Un'ipotesi che spesso si fa è assumere che il processo che governa l'evento insolvenza sia non correlato con la componente diffusiva del processo che governa il tasso di rendimento a pronti r (*default-free spot rate*).

Si può, in linea teorica, costruire un portafoglio per coprirsi dal rischio di tasso. Indichiamo con π il valore del portafoglio all'epoca t; tale portafoglio sarà costituito da un'obbligazione rischiosa e da una certa quantità Δ di obbligazioni *default–free*:

$$\pi = v(r,\lambda,t,T) - \Delta p(r,t,T) \tag{51}$$

Δ sarà determinato in modo tale da eliminare il rischio di tasso, dr (per i dettagli si rimanda a Wilmott, 2003).

La variazione di tale portafoglio in caso di insolvenza è data da

$$d\pi = -v + O(dt^{1/2}), \tag{52}$$

con probabilità λdt.

Un'altra possibile estensione del modello di partenza consiste nel rilassare l'ipotesi di un'intensità λ costante. Se l'intensità è una funzione deterministica del tempo, $\lambda(t)$, e il tasso di interesse a pronti non è correlato con il rischio di insolvenza, il valore atteso all'epoca t di un *defaultable zero-coupon bond* che promette di pagare 1 alla scadenza T sarà

$$v(t,T) = p(t,T)e^{-\int_t^T \lambda(u)du}. \tag{53}$$

Siano $R(t,T)$ ed $R_f(t,T)$ rispettivamente i rendimenti a scadenza di un *defaultable zero-coupon bond* e di un *default-free zero-coupon bond*. Se si assume che il credit spread sia funzione del tempo, si ha

$$R(t,T) - R_f(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T \lambda(u)du. \tag{54}$$

Se invece si esprime $R_f(t,T)$ in funzione del tasso *forward*,

$$R_f(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,u)du, \tag{55}$$

si ottiene

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T [\lambda(u) + f(t,u)]du. \tag{56}$$

L'intensità può essere a sua volta governata da un processo stocastico che soddisfa un'equazione differenziale stocastica del tipo

$$d\lambda = \alpha(r,\lambda,t)dt + \beta(r,\lambda,t)dW, \tag{57}$$

dove W è un processo di Wiener.

Quanto detto finora vale se il tasso di recupero è nullo; nei modelli in forma ridotta si adotta spesso un *recovery rate* costante e assegnato esogenamente. Sia quindi δ l'importo (noto) che si otterrà in caso di insolvenza; la variazione del portafoglio π in caso di default sarà data da

$$d\pi = -v + \delta + O(dt^{1/2}), \tag{58}$$

con probabilità λdt.

Particolarmente rilevante è il problema della copertura dell'insolvenza, ovvero della possibilità di costruire un portafoglio per coprirsi non solo dal rischio di tasso, ma anche dal rischio di insolvenza dell'emittente di obbligazioni rischiose. Sempre in linea teorica, si potrebbe costruire un portafoglio composto da obbligazioni senza cedola default-free e una (o più) obbligazioni rischiose (che si renderanno insolventi alla stessa data) al fine di coprire anche il rischio di insolvenza.

Se si assume λ costante, si può (teoricamente) costruire il seguente portafoglio:

$$\pi = v(t,T) - \Delta p(t,T) - \Delta_1 v_1(t,T), \tag{59}$$

dove $v_1(t,T)$ rappresenta il valore all'epoca t di un'altra obbligazione rischiosa che promette di pagare ala scadenza T un euro. Δ_1 rappresenta la quantità di obbligazioni di questo tipo presenti in portafoglio.

Si osservi che, se si assume che anche l'intensità λ sia stocastica, si rende necessario coprirsi con tre obbligazioni: due obbligazioni *defaultable* e un'obbligazione *default-free.* Nella pratica, vi sono poche obbligazioni "rischiose" e la copertura dell'insolvenza è possibile solo in linea teorica (Wilmott, 2003).

6.1 Il modello di Jarrow e Turnbull (1995)

Jarrow e Turnbull (1995) forniscono per primi una descrizione formale di un modello a tempo continuo per la struttura a termine dei credit spreads basato sulle intensità. L'epoca in corrispondenza della quale si verifica l'insolvenza è descritta da una variabile distribuita secondo una legge esponenziale con intensità costante. Il processo che governa l'insolvenza descrive solamente l'epoca in cui questa può avvenire, non l'entità della perdita (*severity*) in caso di default: il tasso di recupero viene assunto costante.

Jarrow e Turnbull propongono due versioni del loro modello: una versione a tempo discreto e una versione a tempo continuo. Il modello può essere utilizzato per la valutazione e la copertura di obbligazioni senza cedola soggette a rischio di credito. I risultati ottenuti per tali titoli possono essere utilizzati ai fini della valutazione di obbligazioni rischiose che pagano delle cedole, di titoli derivati scritti su obbligazioni *defaultable* e di titoli derivati del mercato *over the counter* soggetti a rischio di controparte (*vulnerable options*). Nel seguito verrà brevemente presentato il modello a tempo continuo proposto da Jarrow e Turnbull (si veda anche Jarrow, Lando e Turnbull, 1997).

Le ipotesi principali, comuni sia al modello a quello a tempo discreto che a tempo continuo, sono le seguenti:

- si suppone di operare in un mercato privo di attriti;
- si considera un orizzonte temporale finito $[0, \tau]$;
- le contrattazioni possono aver luogo a tempo discreto $\{0, 1, 2, \ldots, \tau\}$ oppure nel continuo $[0, \tau]$;
- si definisce uno spazio di probabilità munito di filtrazione (Ω, $\mathbb{P}$, $\mathcal{F}_\tau$, $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le \tau}$).

Le attività presenti nel mercato sono essenzialmente delle obbligazioni senza cedola *default-free* per tutte le scadenze, un deposito fruttifero default-free (*money market account*) e delle obbligazioni soggette a rischio di credito per tutte le scadenze.

Assunzione 1. Si assume l'esistenza e l'unicità di una misura di martingala equivalente $\mathbb{Q}$, rispetto alla quale i prezzi degli *zero-coupon bonds* (sia default-free che rischiosi) attualizzati (ovvero normalizzati mediante il valore del *money market account*) sono delle martingale.

Si osservi che assumere l'esistenza della misura di probabilità $\mathbb{Q}$ equivale assumere l'assenza di opportunità di arbitraggio, mentre l'unicità di $\mathbb{Q}$ equivale all'ipotesi di completezza del mercato. Jarrow e Turnbull (1995) forniscono delle condizioni sufficienti per l'esistenza e l'unicità di $\mathbb{Q}$.

Indichiamo con $\mathbb{Q}_t(\,\cdot\,)$ e $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(\,\cdot\,)$ la probabilità e il valore atteso condizionati all'informazione disponibile all'epoca t ($\mathcal{F}_t$) rispetto alla misura $\mathbb{Q}$.

Sia $p(t,T)$ il prezzo all'epoca t di uno *zero-coupon bond default-free* che paga (con certezza) 1 all'epoca T (con $0 \leq t \leq T \leq \tau$). Si assuma l'esistenza dei tassi forward per tutte le scadenze ($\forall T \in [0,\tau]$). Tali tassi sono definiti come segue:

$$f(t,T) = -\log \frac{p(t,T+1)}{p(t,T)}, \tag{60}$$

nel modello a tempo discreto, e

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log p(t,T), \tag{61}$$

nel modello a tempo continuo.

Il tasso a pronti (spot rate) *default-free* è definito dall'equazione

$$r(t) = f(t,t). \tag{62}$$

Nel seguito non viene specificato nessun processo stocastico per r (si può adottare uno dei modelli proposti in letteratura).

Nell'economia descritta è possibile investire delle somme in un deposito che paga il tasso a pronti r. Dato un investimento iniziale di 1, il valore dell'investimento all'epoca t sarà dato da

$$B(t) = \exp\left(\sum_{i=0}^{t-1} r(i)\right), \tag{63}$$

nel caso discreto, e

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right) \tag{64}$$

Sotto le ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio e di completezza del mercato possiamo esprimere i prezzi degli *zero-coupon bonds default-free* come segue

$$p(t,T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left(\frac{B(t)}{B(T)}\right), \tag{65}$$

ovvero il valore atteso attualizzato di 1 rimborsato (con certezza) all'epoca T.

Passiamo ora a considerare il valore di un defaultable *zero-coupon bond*. Sia $v(t,T)$ il prezzo all'epoca t di uno *zero-coupon bond* rischioso (*defaultable*) che promette di pagare 1 all'epoca T (con $t \leq T \leq \tau$). Il valore nominale verrà rimborsato alla scadenza se la società (o il paese) emittente non "fallisce" entro l'epoca T.

In caso di insolvenza verrà pagata solo una frazione δ ($0 \leq \delta < 1$) del valore di rimborso. Il parametro δ è il *recovery rate* o *fractional recovery of par value* nello schema qui analizzato (si veda Bielecki e Rutkowski, 2002). Si osservi che il tasso di recupero è una variabile difficile da quantificare e può dipendere da molti fattori (ad esempio, dalla *seniority* del debito). Nel modello di Jarrow e Turnbull (1995) il tasso di recupero δ è dunque, per assunzione, una costante assegnata esogenamente. La struttura (stocastica) dei *credit spreads* sarà indipendente dal tasso di recupero e dipendente solo dalla struttura dei tassi spot e dal processo che governa l'evento insolvenza. Tale assunzione è rilassata in Das e Tufano (1996) e in Lando (1994), che considera dei tassi di recupero stocastici.

Per quanto riguarda il processo che governa il default, come in precedenza, τ^* rappresenta l'epoca in corrispondenza della quale si verifica l'insolvenza. τ^* è una variabile aleatoria per la quale si può assumere una certa distribuzione (esponenziale con intensità costante nel caso più semplice).

In questo contesto, il valore di uno *zero-coupon bond* soggetto a rischio di credito è dato da

$$v(t,T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left(\frac{B(t)}{B(T)} \left(\delta \mathbf{1}_{\{\tau^* \le T\}} + \mathbf{1}_{\{\tau^* > T\}}\right) \right), \tag{66}$$

dove $\mathbf{1}_{\{\tau^* \le T\}}$ à la funzione indicatrice dell'evento $\{\tau^* \le T\}$.

Il prezzo di un *defaultable zero-coupon bond* è quindi il valore atteso attualizzato di 1 unità monetaria, che si riceverà all'epoca T se l'emittente non fallisce prima o alla scadenza.

Si osservi che, se l'insolvenza si verifica prima dell'epoca T, il detentore del bond riceverà comunque il valore δ solo alla scadenza del bond, quindi all'epoca T. In caso di insolvenza all'epoca $t = \tau^*$, la struttura a termine relativa al titolo "rischioso" si semplifica molto:

$$v(t,T) = \delta \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left(\frac{B(t)}{B(T)} \right) = \delta p(t,T), \tag{67}$$

divenendo quella di un bond default-free.

La seconda importante ipotesi del modello è la seguente.

Assunzione 2. Si assume che il processo che governa il tasso spot default-free, $(r(t)_{0 \le t \le \tau})$, e τ^* siano statisticamente indipendenti sotto la misura $\mathbb{Q}$.

Tale assunzione è semplificatrice ai fini di implementazione del modello. La questione se essa sia ragionevole richiede un'analisi empirica (Jarrow e Turnbull ne discutono il rilassamento).

Data la precedente assunzione, l'equazione (66) diviene

$$v(t,T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left(\frac{B(t)}{B(T)} \right) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left(\delta \mathbf{1}_{\{\tau^* \le T\}} + \mathbf{1}_{\{\tau^* > T\}}\right), \tag{68}$$

ovvero, essendo $\mathbb{Q}(\tau^* \le T) = 1 - \mathbb{Q}(\tau^* > T)$,

$$v(t,T) = p(t,T) \left(\delta + (1-\delta)\mathbb{Q}(\tau^* > T)\right), \tag{69}$$

dove $\mathbb{Q}(\tau^* > T)$ è la probabilità che l'insolvenza non si verifichi prima dell'epoca T.

Il prezzo di uno *zero-coupon bond* "rischioso" è dato dal prezzo di uno *zero-coupon bond default-free* moltiplicato per il payoff atteso (denominato in euro) all'epoca T.

L'evoluzione della struttura a termine di un'obbligazione rischiosa è quindi unicamente determinata specificando una distribuzione per la variabile aleatoria τ^*.

Diamo ora solo qualche breve cenno alla versione a tempo discreto del modello di Jarrow e Turnbull (1995) e alle possibili applicazioni.

Gli autori considerano solo due periodi, $t \in \{0, 1, 2\}$; il modello si può estendere al caso multiperiodale. Anche nella versione a tempo discreto si ottiene per il valore di un defaultable *zero-coupon bond* una relazione del tipo

$$v(t,T) = p(t,T)\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(\phi(T)), \tag{70}$$

dove $\phi(T)$ è il payoff dell'obbligazione alla scadenza T.

Il prezzo di un'obbligazione senza cedola all'epoca t, che promette di pagare 1 all'epoca T, è dato dal payoff atteso alla scadenza, $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(\phi(T))$, attualizzato. Il fattore di sconto è il prezzo di un *default-free zero-coupon bond* all'epoca t con scadenza in T.

Deve valere la relazione $v(t,T) < p(t,T)$: uno spread strettamente positivo è una condizione necessaria per l'assenza di opportunità di arbitraggio.

Date le osservazioni sui prezzi dei bond $p(t,T)$ e $v(t,T)$, si può stimare il payoff atteso alla scadenza $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(\phi(T))$ (e quindi anche la perdita attesa). Data una stima del recovery rate δ, e noti i prezzi dei bond, si possono stimare le probabilità di default (ricorsivamente nel modello a tempo discreto). Le probabilità di insolvenza possono essere utilizzate per la valutazione di altre attività finanziarie (ad esempio, opzioni emesse su defaultable bond).

Il modello può essere utilizzato per la valutazioni di obbligazioni che pagano delle cedole. Siano k_1 la cedola in pagamento all'epoca $t = 1$ e k_2 la somma della cedola in pagamento all'epoca $t = 2$ e del valore nominale. Sia $D(t)$ il valore di un'obbligazione che paga delle cedole secondo lo schema appena presentato. Il valore all'epoca $t = 0$ di tale obbligazione è dato da

$$\begin{aligned} D(0) &= \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left(k_1\phi(1)/B(1) + k_2\phi(2)/B(2)\right) \\ &= k_1 v(0,1) + k_2 v(0,2), \end{aligned} \tag{71}$$

dove $v(0,1)$ e $v(0,2)$ rappresentano i valori, all'epoca $t = 0$, di obbligazioni senza cedole che promettono di pagare 1 rispettivamente alle epoche $t = 1$ e $t = 2$.

Il valore all'epoca $t = 0$ di un'obbligazione che paga cedole equivale al valore di un portafoglio composto da k_1 *defaultable zero-coupon bonds* con scadenza in $t = 1$ e k_2 *defaultable zero-coupon bonds* con scadenza in $t = 2$.

6.2 Altri modelli intensity based

Jarrow, Lando e Turnbull (1997) estendono il modello precedentemente proposto da Jarrow e Turnbull (1995) al fine di tenere conto della possibilità di migrazione da una classe all'altra di rating delle obbligazioni. Si tratta di un modello markoviano per la struttura a termine degli spread creditizi, in cui il processo che governa l'insolvenza è una catena di Markov nei rating creditizi (lo spazio degli stati è discreto).

Il modello può essere applicato alla valutazione e la copertura di: defaultable bonds, emessi da società private (corporate bonds) o emessi da paesi emergenti o altri enti pubblici (government bonds, municipal bonds, ...); titoli derivati dei mercati *over-the-counter* (*vulnerable options*); titoli derivati scritti su defaultable bonds; derivati creditizi (credit sensitive notes, spread adjusted notes, ...); gestione del rischio di credito derivante da un singolo investimento o da un portafoglio di crediti.

Si possono incorporare nel modello obbligazioni con diverse *seniority* introducendo diversi tassi di recupero in caso di default. Il modello può essere combinato con qualsiasi modello per la struttura a termine dei tassi delle obbligazioni default-free.

Jarrow, Lando e Turnbull fanno alcune ipotesi sull'interazione tra la struttura a termine dei tassi delle obbligazioni default-free e il processo che governa l'insolvenza, al fine di semplificare l'implementazione del modello. Assumono che i due processi siano indipendenti sotto la misura di martingala: il processo di Markov che governa la migrazione di rating è indipendente dal livello dei tassi di interesse a pronti.

Tra i modelli in forma ridotta, oltre ai già citati contributi di Jarrow e Turnbull (1995) e Jarrow, Lando e Turnbull (1997), si possono richiamare i lavori di Litterman e Iben (1991), Das e Tufano (1996), Lando (1998), Madan e Unal (1998, 2000), Duffie e Singleton (1999). L'elenco presentato è naturalmente non esaustivo, essendo la letteratura sull'argomento piuttosto ampia; per un'introduzione sui modelli in forma ridotta si rimanda, tra gli altri, a Bielecki e Rutkowski (2001, 2002) e ai riferimenti bibliografici ivi riportati.

7 Considerazioni conclusive

Negli ultimi dieci anni si è osservato a livello internazionale, e più recentemente in Italia, un numero crescente di insolvenze relative ad obbligazioni emesse da società private. Nello stesso periodo alcuni bond emessi da Paesi emergenti non sono stati rimborsati (si pensi, ad esempio, al caso dei bond argentini). A seguito di tali default, viene sempre più avvertita come cruciale una corretta analisi del rischio di credito (e delle sue componenti) insito in alcune attività finanziarie, al fine della determinazione dei prezzi equi e dei rendimenti di tali attività. Tuttavia il rischio di credito rappresenta uno dei rischi di mercato di più difficile definizione e quantificazione. In letteratura sono stati proposti e sviluppati diversi approcci alla misurazione del rischio di credito. Alcuni di tali modelli sono stati brevemente analizzati in questo contributo.

Riferimenti bibliografici

[1] Ammann M. (2001), *Credit Risk Valuation. Methods, Models, and Applications.* Springer – Verlag Berlin.

[2] Basel Committee on Banking Supervision (1999), Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications. Basel, April 1999.

[3] Bielecki T.R., Rutkowski M. (2001), Credit risk modeling: Intensity based approach. In Jouini E., Cvitanic J. and Musiela M. (eds.) (2001) *Option Pricing, Interest Rates and Risk Management*, Cambridge: Cambridge University Press, 399–457.

[4] Bielecki T.R., Rutkowski M. (2002), *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging.* Springer–Verlag, Berlin Heidelberg.

[5] Black F., Cox J.C. (1976), Valuing corporate securities: some effects of bond indeture provisions. *Journal of Finance*, **31**, 351–367.

[6] Black F., Scholes M. (1973), The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637–654.

[7] Bluhm C., Overbeck L., Wagner C. (2003), *An Introduction to Credit Risk Modeling.* Chapman & Hall.

[8] Briys E., de Varenne F. (1997), Valuing fixed rate debt: An extention. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **32**, 239–248.

[9] Cathcart L., El-Jahel L. (1998), Valuation of defaultable bonds. *Journal of Fixed Income*, **8(1)**, 65–78.

[10] Chorafas D.N. (2000), *Credit Derivatives and the Management of Risk.* New York Institute of Finance.

[11] Collin-Dufresne P., Goldstein R.S. (2001), Do credit spreads reflect stationary leverage ratios? *The Journal of Finance*, **56**, 1929–1958.

[12] Cossin D., Pirotte H. (2001), *Advanced Credit Risk Analysis: Financial Approaches and Mathematical Models to Assess, Price and Manage Credit Risk.* John Wiley & Sons.

[13] Crosbie P., Bohn J. (2003), Modeling default risk. Moody's KMV Company.

[14] Das S. (1998), *Credit Derivatives: Trading and Management of Credit and Default Risk.* John Wiley & Sons.

[15] Das S.R., Tufano P. (1996), Pricing credit-sensitive debt when interest rates, credit ratings, and credit spreads are stochastic. *Journal of Fiancial Engineering*, **5**, 161–198.

[16] Duffie D., Singleton K.J. (1999), Modeling term structures of defaultable bonds. *Review of Financial Studies*, **12**, 687–720.

[17] Duffie D., Singleton K.J. (2003), *Credit Risk. Pricing, Measurement and Management.* Princeton University Press.

[18] Durbin J. (1992) The first-passage time of the Brownian motion process to a curved boundary. *Journal of Applied Probability*, **29**, 291–304.

[19] Ericsson J., Reneby J. (2002), Estimating structural bond pricing models. *Working paper.*

[20] Hsu J.C., Saá-Requejo J., Santa-Clara P. (2002), Bond pricing with default risk. *Working paper.*

[21] Hui C.H., Lo C.F., Tsang S.W. (2003), Pricing corporate bond with dynamic default barriers. *Journal of Risk*, **5(3)**, 17–39.

[22] Hull J. (2003), *Opzioni, Futures e Altri Derivati.* Il Sole24Ore ed. Traduzione italiana di Hull J. (2003) *Options, Fututres, and Other Derivatives.* Pearson Education Inc.

[23] Jarrow R.A., Lando D., Turnbull S.M. (1997), A Markov model for the term structure of credit risk spreads. *Review of Financial Studies*, **10**, 481–523.

[24] Jarrow R.A., Protter P. (2004), Structural versus reduced form models: a new information based perspective. *Working paper.*

[25] Jarrow R.A., Turnbull S.M. (1995), Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *Journal of Finance*, **50**, 53–86.

[26] Karatzas I., Shreve S. (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag.

[27] Kim I.J., Ramaswamy K., Sundaresan S. (1993), Does default risk coupons affect the valuation of corporate bonds? A contingent claims model. *Financial Management*, **22(3)**, 117–131.

[28] Lando D. (1994), *Three Essays on Contingent Claim Pricing.* Ph.D. dissertation, Cornell University.

[29] Lando D. (1998), On Cox processes and credit-risky securities. *Review of Derivatives Research*, **2**, 99–120.

[30] Litterman R., Iben T. (1991), Corporate bond valuation and the term structure of credit spreads. *Journal of Portfolio Management*, **17**, 52–64.

[31] Longstaff F.A., Schwartz E.S. (1995), A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt. *Journal of Fianance*, **3**, 789–819.

[32] Madan D., Unal H. (1998), Pricing the risks of default. *Review of Derivatives Research*, **2**, 121–160.

[33] Madan D., Unal H. (2000), A two-factor hazard rate model for pricing risky debt and the term structure of credit spreads. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, March 2000.

[34] Merton R.C. (1974), On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, **29**, 449–470.

[35] Nielsen L.T., Saá-Requejo J., Santa-Clara P. (1993), Default risk and interest rate risk: the term structure of default spreads. *Working paper*, INSEAD.

[36] Protter P. (1990), *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer-Verlag, New York.

[37] Saá-Requejo J., Santa-Clara P. (1999), Bond pricing with default risk. *Working paper.*

[38] Saunders A. (1999), *Credit Risk Measurement. New Approaches to Value at Risk and Other Paradigms.* John Wiley & Sons.

[39] Shimko D. (1999), *Credit Risk: Models and Management.* Risk Books.

[40] Shimko D., Tejima N., van Deventer D.R. (1999), The pricing of risky debt when interest rates are stochastic. *Journal of Fixed Income*, **3(2)**, 58–65.

[41] Taurén M.P. (1999), A model of corporate bond prices with dynamic capital structure. *Working paper.*

[42] Wilmott P. (2003), *Introduzione alla Finanza Quantitativa.* Egea.

Risorse on-line

`www.bis.org` (*Bank for International Settlements*)

`www.occ.treas.gov` (*Office of the Comptroller of the Currency*)

`www.moodys.com`

`www.moodyskmv.com`

`www.moodyskmv.com/research/defaultrisk.html`

`www.defaultrisk.com`

`www.standardandpoor.com`

`www.fitchratings.com`

`www.riskmetrics.com`

`www.emgmkts.com` (Mercati emergenti)