ASSOCIAZIONE PER LA MATEMATICA APPLICATA
ALLE SCIENZE ECONOMICHE E SOCIALI

ATTI DEL SEDICESIMO CONVEGNO A.M.A.S.E.S.

Treviso, 10-13 Settembre 1992

Ha contribuito alla pubblicazione del volume
il Consiglio Nazionale delle Ricerche

UN MODELLO RISOLUTIVO A VARIABILI MISTE-INTERE PER LA SELEZIONE DI PORTAFOGLIO IN MEDIA-VARIANZA.[1]

Elio CANESTRELLI
Universita' degli Studi di VENEZIA

Marco CORAZZA
Universita' degli Studi di BRESCIA

1. INTRODUZIONE

Con il presente lavoro si propone un metodo risolutivo per una interessante classe di problemi di selezione di portafoglio in media - varianza, contenenti vincoli di non negativita', lotti minimi di acquisto e vincoli di interezza. Secondo tale approccio inizialmente si affronta il seguente problema di ottimizzazione matematica ([9], [10], [12] e [16]):

$$(1.1) \qquad \mathcal{P} \begin{cases} \min & \bar{\underline{y}}'\bar{V}\bar{\underline{y}} \\ \text{s.t.} & \bar{\underline{y}}'\bar{\underline{r}} = \Pi \\ & \bar{\underline{y}}'\bar{\underline{e}} = 1 \\ & \bar{\underline{y}} \geq \bar{\underline{0}} \end{cases}$$

dove

$\bar{\underline{y}}$: vettore incognito ((n+1) x 1) che rappresenta le quote percentuali di ricchezza iniziale da investire in ogni titolo. Il primo elemento e' associato al titolo a rendimento certo da cui:

$$(1.1.1) \qquad \bar{\underline{y}} = \left[y_{(1)} \,\middle|\, \underline{y} \right];$$

$\bar{V}$: matrice nota ((n+1) x (n+1)) di varianza e covarianza dei rendimenti dei titoli. La prima riga e la prima colonna rappresentano varianza e covarianza associate al titolo a rendimento certo da cui:

$$(1.1.2) \qquad \bar{V} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \underline{0} \\ \hline \underline{0}' & V \end{array} \right],$$

con V matrice nota (n x n), simmetrica e definita positiva;

---

[1] Ricerca finanziata parzialmente dal C. N. R., contributo n. 91.04099.CT10.

$\bar{\underline{r}}$: vettore noto ((n+1) x 1) dei rendimenti attesi, rendimenti sulla cui distibuzione congiunta non e' necessaria alcuna ipotesi purche' ammettano varianze finite.[2] Il primo elemento e' associato al titolo a rendimento certo da cui:

$$(1.1.3) \qquad \bar{\underline{r}} = \left[r_{(1)} \middle| \underline{r} \right];$$

Π: rendimento che l'investitore desidera venga realizzato dal suo portafoglio. In particolare si pone:

$$(1.1.4) \qquad r_{min} \le \Pi \le r_{max}.$$[3]

$\bar{\underline{e}}$: vettore ((n+1) x 1) di numeri 1. Il primo elemento e' associato al titolo a rendimento certo da cui:

$$(1.1.5) \qquad \bar{\underline{e}} = \left[1 \middle| \underline{e} \right];$$

$\bar{\underline{0}}$: vettore ((n+1) x 1) di numeri 0. Il primo elemento e' associato al titolo a rendimento certo da cui:

$$(1.1.6) \qquad \bar{\underline{0}} = \left[0 \middle| \underline{0} \right].$$

L'ultimo insieme di vincoli illustrato merita alcune ulteriori brevi considerazioni:

(a) tali vincoli non sono indispensabili ai fini della formulazione del problema (1.1), in quanto la loro eventuale assenza starebbe solo ad indicare la possibilita' di contrarre operazioni allo scoperto e/o di emettere titoli a rendimento aleatori;

(b) inoltre la loro assenza rende il problema (1.1) piu' semplice poiche' la soluzione e' ricavabile in "formula chiusa". Invece la loro presenza comporta il

---

2 Peraltro si ricorda come alcuni autori ([6], [14], [19]) abbiano empiricamente verificato che, su alcuni mercati (ad esempio quello statunitense, francese e italiano), le distribuzioni delle serie storiche dei rendimenti siano ben descritte da distribuzioni stabili di Lévy a varianza infinita.

3 Questa posizione e' un test di ammissibilita' sul problema, basato sull'analisi della regione ammissibile. Infatti se, al contrario, si verificasse

$$(1.1.4.1) \qquad \Pi < r_{min}$$

allora il vincolo $\bar{\underline{y}}'\bar{\underline{r}} = \Pi$ risulterebbe rindondante, mentre se si verificasse

$$(1.1.4.2) \qquad \Pi > r_{max}$$

allora la regione ammissibile risulterebbe vuota.

ricorso ad un qualche algoritmo basato su un metodo iterativo. Qualora si verifichi tale eventualita' si e' ritenuto conveniente rifarsi al metodo delle funzioni di penalita' esterna il cui impiego trasforma il problema, relativamente a questi vincoli, da vincolato a non vincolato, permettendo quindi la individuazione della soluzione mediante la succitata "formula chiusa" (per maggiori dettagli [4] e [7]). Qualora nella prima soluzione cosi' ricavata si riscontrino degli elementi violanti i vincoli di non negativita' precedentemente rilassati, nella diagonale principale della matrice di varianza e covarianza $\bar{V}$, in corrispondenza di ogni vincolo violato, vengono sommate delle penalita', per cui la funzione obiettivo diviene:

$$(1.2) \qquad \min \bar{y}'\left(\bar{V} + \bar{S}_i\right)\bar{y} = \bar{y}'\bar{W}_i\bar{y}$$

dove

$\bar{y}$, $\bar{V}$: hanno lo stesso significato che nella formulazione precedente;

$\bar{S}_i$: matrice diagonale nota ((n+1) x (n+1)) delle funzioni di penalita' esterne; alla iteraziono i=0 coincide con la matrice nulla;

$\bar{W}_i$: matrice nota ((n+1) x (n+1)) data da $\bar{V} + \bar{S}_i$; alla iterazione i=0 coincide con la matrice $\bar{V}$. La prima riga e la prima colonna rappresentano varianza e covarianza associate al titolo a rendimento certo da cui:

$$(1.3) \qquad \bar{W}_i = \left[\begin{array}{c|c} w_{1,i} & \underline{0} \\ \hline \underline{0}' & W_i \end{array}\right].$$

Calcolata la nuova matrice $\bar{W}_i$, si reindividua la soluzione, ancora mediante la "formula chiusa", e si reitera il procedimento or ora descritto fino a quando nella soluzione non si presentano piu' elementi violanti i vincoli di non negativita'. L'applicazione di tale metodo iterativo riconduce la individuazione della soluzione del problema con vincoli di non negativita' alle individuazioni delle soluzioni di una successione di problemi con vincoli di non negativita' rilassati e, di conseguenza, pone in evidenza il ruolo centrale occupato dalla esistenza della soluzione espressa in "formula chiusa".

Come gia' premesso, nella fase di implementazione di tale approccio operativo si sono presi in considerazione alcuni aspetti pratici e, in particolare:

(1.A) <u>formulazione in termini di quantita' e presenza dei lotti minimi di acquisto</u>: questo primo aspetto viene trattato nei paragrafi 2 e 3.

(1.B) <u>possibilita' di acquisto di soli multipli interi positivi dei lotti minimi di acquisto</u>: questo secondo aspetto viene trattato nel paragrafo 4.

2. FORMULAZIONE IN TERMINI DI QUANTITA' E PRESENZA DEI LOTTI MINIMI DI ACQUISTO.

Innanzittutto si introducono le due seguenti matrici note ((n+1) x (n+1)), diagonali, simmetriche con elementi tutti positivi:

$$(2.1) \qquad \bar{L} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{n+1} \end{bmatrix},$$

matrice dei lotti minimi di acquisto. La prima riga e la prima colonna sono associate al titolo a rendimento certo da cui:

$$(2.1.1) \qquad \bar{L} = \left[\begin{array}{c|c} l_1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0}' & L \end{array}\right],$$

in cui l_i, scalare noto, con $i = 1, \dots, n + 1$, rappresenta il numero di titoli costituenti il lotto i-esimo;[4]

$$(2.2) \qquad \bar{P}_t = \begin{bmatrix} p_{1,t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{2,t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n+1,t} \end{bmatrix}$$

matrice dei prezzi dei titoli. La prima riga e la prima colonna sono associate al titolo a rendimento certo da cui:

$$(2.2.1) \qquad \bar{P}_t = \left[\begin{array}{c|c} p_{1,t} & \underline{0} \\ \hline \underline{0}' & P_t \end{array}\right];$$

in cui $p_{i,t}$, scalare noto, con $i = 1, \dots, n + 1$, rappresenta il prezzo assunto dal titolo i-esimo in t.

Nel problema di partenza (1.1) si sostituisce la incognita $\bar{\underline{y}}$ con la quantita'

---

[4] Qualora non sia imposto un valore di lotto a tale quantita', ovvero si possano acquistare quantita' scelte arbitrariamente del titolo i-esimo, si avra'

$$(2.1.2) \qquad l_i = 1.$$

(2.3) $\underline{\bar{P}_t \bar{L}\bar{x}}$

dove

$\underline{x}$: vettore incognito ((n+1) x 1), che rappresenta il numero di lotti da acquistare di ogni titolo. Il primo elemento e' associato al titolo a rendimento certo da cui:

(2.3.1) $\left[x(1) \mid \underline{x}\right]$.

Allora il problema (1.1) e' riformulabile nella seguente maniera:

$$(2.4) \quad \mathcal{P}_1 \begin{cases} \min & \left(\bar{P}_t \bar{L}\underline{\bar{x}}\right)' \bar{W}_1 \left(\bar{P}_t \bar{L}\underline{\bar{x}}\right) \\ \text{s.t.} & \underline{\bar{x}}' \bar{L}\bar{P}_t \underline{\bar{r}} = \Pi C_t \\ & \underline{\bar{x}}' \bar{L}\bar{P}_t \underline{\bar{e}} = C_t \end{cases},$$

o, equivalentemente, data la simmetricita' delle matrici $\bar{P}_t$ ed $\bar{L}$

$$(2.4.1) \quad \mathcal{P}_1 \begin{cases} \min & \underline{\bar{x}}' \left(\bar{L}\bar{P}_t \bar{W}_1 \bar{P}\ \bar{L}\right) \underline{\bar{x}} \\ \text{s.t.} & \underline{\bar{x}}' \bar{L}\bar{P}_t \underline{\bar{r}} C_t^{-1} = \Pi \\ & \underline{\bar{x}}' \bar{L}\bar{P}_t \underline{\bar{e}} = C_t \end{cases},$$

dove

$\underline{\bar{x}}$, $\bar{L}$, $\bar{P}_t$, $\bar{W}_1$, $\underline{\bar{r}}$, Π, $\underline{\bar{e}}$: hanno lo stesso significato che nelle formulazioni precedenti;[5]

C_t: scalare noto, rappresentante la ricchezza iniziale a disposizione dell'investitore.

Per l'individuazione della soluzione del suindicato problema (2.4.1) si e' seguito il procedimento presentato da Szegö [16] nel teorema (6.6) a pag. 72. In particolare sia W_1 non singolare e siano i rendimenti attesi associati agli (n+1) titoli non identici, cioe':

(2.5) $r_i \neq r_j$ per qualche i, j = 1, ..., n+1.

Allora la soluzione del problema e' data dalle

---

[5] La matrice dei coefficienti della funzione obiettivo

(2.4.2) $\bar{L}\bar{P}_t \bar{W}_1 \bar{P}_t \bar{L}$

risulta positiva definita poiche' prodotto di matrici positive definite.

espressioni:

$$(2.6)\qquad x(1) = \frac{\Pi\left(\gamma r^{*} - \beta e^{*}\right) + C_t\left(\alpha e^{*} - \beta r^{*}\right)}{\left(\gamma r^{*2} - 2\beta e^{*} r^{*} + \alpha e^{*2}\right)},$$

$$(2.7)\qquad \underline{x} = \frac{\left(\Pi e^{*} - C_t r^{*}\right)}{\left(\gamma r^{*2} - 2\beta e^{*} r^{*} + \alpha e^{*2}\right)} \left[e^{*} W_1^{-1} \underline{r}^{*} - r^{*} W_1^{-1} \underline{e}^{*}\right]$$

dove

$(2.7.1)\qquad r^{*} = 1_1 p_{1,t} r(1) C_t^{-1},$

$(2.7.2)\qquad e^{*} = 1_1 p_{1,t},$

$(2.7.3)\qquad \underline{r}^{*} = LP_t \underline{r} C_t^{-1},$

$(2.7.4)\qquad \underline{e}^{*} = LP_t \underline{e},$

$(2.7.5)\qquad \alpha = \underline{r}^{*\prime} W_1^{-1} \underline{r}^{*},$

$(2.7.6)\qquad \beta = \underline{r}^{*\prime} W_1^{-1} \underline{e}^{*} = \underline{e}^{*\prime} W_1^{-1} \underline{r}^{*},$

$(2.7.7)\qquad \gamma = \underline{e}^{*\prime} W_1^{-1} \underline{e}^{*}.$

Per la verifica della (2.6) e della (2.7), si costruisce il seguente lagrangiano:

$$(2.8)\qquad L\left(\underline{x}, x(1); \lambda_1, \lambda_2\right) = \underline{x}' W_1 \underline{x} - \lambda_1\left[x(1) 1_1 p_{1,t} r(1) C_t^{-1} + \underline{x}' LP_t \underline{r} C_t^{-1} - \Pi\right] - \lambda_2\left[x(1) 1_1 p_{1,t} + \underline{x}' LP_t \underline{e} - C_t\right].$$

Il punto critico di tale lagrangiano si individua risolvendo il seguente sistema lineare di (n+3) equazioni in (n+3) incognite:

$$(2.8.1)\qquad \frac{\partial L}{\partial \underline{x}} = 2W_1 \underline{x} - \lambda_1 LP_t \underline{r} C_t^{-1} - \lambda_2 LP_t \underline{e} = 0,$$

$$(2.8.2)\qquad \frac{\partial L}{\partial x(1)} = -\lambda_1 1_1 p_{1,t} r(1) C_t^{-1} - \lambda_2 1_1 p_{1,t} = 0,$$

$$(2.8.3)\qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x(1) 1_1 p_{1,t} r(1) C_t^{-1} + \underline{x}' LP_t \underline{r} C_t^{-1} - \Pi = 0,$$

$$(2.8.4)\qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x(1) 1_1 p_{1,t} + \underline{x}' LP_t \underline{e} - C_t = 0.$$

Questo sistema lineare, nelle ipotesi poste, ammette l'unica soluzione data dalle due seguenti relazioni:

$$(2.9) \qquad \lambda_1^* = 2\frac{\left(\Pi e^* - C_t r^*\right)e^*}{\left(\gamma r^{*2} - 2\beta e^* r^* + \alpha e^{*2}\right)},$$

$$(2.10) \qquad \lambda_2^* = 2\frac{\left(\Pi e^* - C_t r^*\right)r^*}{\left(\gamma r^{*2} - 2\beta e^* r^* + \alpha e^{*2}\right)},$$

e $x_{(1)}^*$ e $\underline{x}^*$ individuate, rispettivamente, dalla (2.6) e dalla (2.7). Invece, relativamente alle condizioni del lsecondo ordine, queste risultano soddisfatte poiche' la matrice dei coefficienti della funzione obiettivo del problema e' positiva definita ed i vincoli lineari individuano una regione ammissibile convessa.[6]

3. ALCUNE OSSERVAZIONI DI NATURA COMPUTAZIONALE.

Relativamente al calcolo di $x_{(1)}^*$ e $\underline{x}^*$ si incontrano difficolta' di natura computazionale causate dall'uso sia di vettori che di matrici "sbilanciati". Al fine di prevenire queste difficolta' si suggeriscono i due seguenti artifici:

(3.A) dividere, rispettivamente, gli elementi della matrice dei coefficienti della funzione obiettivo

$$(3.1) \qquad \bar{L}\bar{P}_t\bar{W}_i\bar{P}_t\bar{L}$$

per i seguenti fattori di scala:

f_L^2, f_P^2, $f_{W,i}$.

In particolare si suggeriscono le tre seguenti espressioni per tali fattori:

$$(3.1.1) \qquad f_L = 10^{\left[\mathrm{Int}\left(\mathrm{Log}_{10}\left((n+1)^{-2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} L(i,j)\right)\right)\right]},$$

$$(3.1.2) \qquad f_P = 10^{\left[\mathrm{Int}\left(\mathrm{Log}_{10}\left((n+1)^{-2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} P_t(i,j)\right)\right)\right]},$$

$$(3.1.3) \qquad f_{W,i} = 10^{\left[\mathrm{Int}\left(\mathrm{Log}_{10}\left((n+1)^{-2}\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} W_i(k,j)\right)\right)\right]},$$

---

[6] E' possibile dimostrare degli analoghi risultati relativi ad un portafoglio composto da soli titoli a rendimento aleatorio.

che individuano l'ordine di grandezza del valore medio degli elementi presenti in ognuna delle matrici in uso. Una tale fattorizzazione porta a riformulare le quantita' (2.7.1), (2.7.2), (2.7.3), (2.7.4), (2.7.5), (2.7.6) e (2.7.7) come segue:

(3.2.1) $r^* = \hat{r}\left(f_L f_P\right)$,

(3.2.2) $e^* = \hat{e}\left(f_L f_P\right)$,

(3.2.3) $\underline{r}^* = \hat{\underline{r}}\left(f_L f_P\right)$,

(3.2.4) $\underline{e}^* = \hat{\underline{e}}\left(f_L f_P\right)$,

(3.2.5) $\alpha = \underline{r}^{*\prime}\hat{W}_i^{-1}\underline{r}^*\left(f_{W,i}\right) = \hat{\underline{r}}'\hat{W}_i^{-1}\hat{\underline{r}}\left(f_{W,i}\right)\left(f_L f_P\right)^2$,

(3.2.6) $\beta = \underline{r}^{*\prime}\hat{W}_i^{-1}\underline{e}^*\left(f_{W,i}\right) = \underline{e}^{*\prime}\hat{W}_i^{-1}\underline{r}^*\left(f_{W,i}\right) =$

$= \hat{\underline{r}}'\hat{W}_i^{-1}\hat{\underline{e}}\left(f_{W,i}\right)\left(f_L f_P\right)^2 = \hat{\underline{e}}'\hat{W}_i^{-1}\hat{\underline{r}}\left(f_{W,i}\right)^{-1}\left(f_L f_P\right)^2$,

(3.2.7) $\gamma = \underline{e}^{*\prime}\hat{W}_i^{-1}\underline{e}^*\left(f_{W,i}\right) = \hat{\underline{e}}'\hat{W}_i^{-1}\hat{\underline{e}}\left(f_{W,i}\right)\left(f_L f_P\right)^2$.[7]

Ora sostituendo queste ultime quantita' nelle soluzioni (2.6) e (2.7), dopo alcuni elementari passaggi algebrici, si ricavano le seguenti relazioni:

(3.3) $x(1)^* = \hat{x}(1)\left(f_L f_P\right)$,

(3.4) $\underline{x}^* = \hat{\underline{x}}\left(f_L f_P\right)$,

---

[7] Naturalmente l'ordine di grandezza del valor medio si puo' anche calcolare su di un sottoinsieme degli elementi di ogni data matrice, sottoinsieme che si reputi particolarmente significativo quale, ad esempio, gli elementi della sola diagonale principale, da cui

(3.1.1.1) $f_L = 10^{\left[\mathrm{Int}\left(\mathrm{Log}_{10}\left(\frac{1}{(n+1)}\sum_{i=1}^{n+1} L(i,i)\right)\right)\right]}$,

(3.1.2.1) $f_P = 10^{\left[\mathrm{Int}\left(\mathrm{Log}_{10}\left(\frac{1}{(n+1)}\sum_{i=1}^{n+1} P_t(i,i)\right)\right)\right]}$,

(3.1.3.1) $f_{W,i} = 10^{\left[\mathrm{Int}\left(\mathrm{Log}_{10}\left(\frac{1}{(n+1)}\sum_{j=1}^{n+1} W_i(j,j)\right)\right)\right]}$.

che legano le soluzioni del problema (2.4.1) ($x_{(1)}^*$ e $\underline{x}^*$) con le soluzioni del problema fattorizzato ($\hat{x}_{(1)}$ e $\hat{\underline{x}}$).

(3.B) Dividere il valore della ricchezza iniziale a disposizione dell'investitore C_t per un fattore di scala: $f_{C,t}$.

Questo fattore dovra' essere opportunamente scelto dall'utilizzatore per mantenere i valori della computazione in un accettabile intervallo. A tal fine si suggerisce la scelta di una potenza di 10. Una fattorizzazione di questo tipo porta a riformulare le quantita' (2.7.1), (2.7.3), (2.7.5), (2.7.6) e C_t, ovvero le sole quantita' funzioni della ricchezza iniziale a disposizione dell'investitore, come segue:

$$(3.5.1) \qquad r^* = \tilde{r} f_{C,t}^{-1},$$

$$(3.5.2) \qquad \underline{r}^* = \tilde{\underline{r}} f_{C,t}^{-1},$$

$$(3.5.3) \qquad \alpha = \tilde{\underline{r}}' \tilde{W}_1^{-1} \tilde{\underline{r}} f_{C,t}^{-2},$$

$$(3.5.4) \qquad \beta = \tilde{\underline{r}}' \tilde{W}_1^{-1} \underline{e}^* f_{C,t}^{-2} = \underline{e}^{*\prime} \tilde{W}_1^{-1} \tilde{\underline{r}} f_{C,t}^{-2},$$

$$(3.5.5) \qquad C_t = \tilde{C}_t f_{C,t}.$$

Ora sostituendo queste ultime quantita' nelle soluzioni (2.6) e (2.7), dopo alcuni elementari passaggi algebrici, si ricavano le seguenti relazioni:

$$(3.6) \qquad x_{(1)}^* = \tilde{x}_{(1)} f_{C,t},$$

$$(3.7) \qquad \underline{x}^* = \tilde{\underline{x}} f_{C,t},$$

che legano le soluzioni del problema (2.4.1) ($x_{(1)}^*$ e $\underline{x}^*$) con le soluzioni del fattorizzato ($\tilde{x}_{(1)}$ e $\tilde{\underline{x}}$).

L'uso congiunto dei due artifici computazionali ora descritti porta, dunque, dopo alcuni elementari passaggi algebrici, alle due seguenti relazioni:

$$(3.8) \qquad x_{(1)}^* = \bar{\bar{x}}_{(1)} \left(f_L f_P f_{C,t} \right),$$

$$(3.9) \qquad \underline{x}^* = \bar{\bar{\underline{x}}} \left(f_L f_P f_{C,t} \right),$$

che legano le soluzioni del problema (2.4.1) ($x_{(1)}^*$ e $\underline{x}^*$) con le soluzioni del problema fattorizzato ($\bar{\bar{x}}_{(1)}$ e $\bar{\bar{\underline{x}}}$).

4. POSSIBILITA' DI ACQUISTO DI SOLI MULTIPLI INTERI POSITIVI DEI LOTTI MINIMI DI ACQUISTO.

In questo paragrafo si considera il problema (2.4.1) in funzione della non infinita divisibilita' dei lotti minimi di acquisto di titoli in quanto, nella realta' dei mercati finanziari, alcuni titoli, denominati "discreti", possono essere acquistati solo per multipli interi di un lotto minimo di acquisto. Al fine di considerare questo aspetto e' necessario riformulare il problema (2.4.1) come un problema di programmazione matematica quadratica mista-intera con vincoli lineari, mentre, al fine di risolvere il problema cosi' riformulato, e' necessario individuare quale, fra le tecniche algoritmiche[8] presenti nella letteratura, sia da adottare.

Innanzittutto si riformula il problema (2.4.1) nella seguente maniera

$$
(4.1) \qquad \mathcal{P}_1 \begin{cases} \min & \left(\bar{P}_t \bar{L}\underline{\bar{x}}\right)' \bar{W}_1 \left(\bar{P}_t \bar{L}\underline{\bar{x}}\right) \\ \text{s.t.} & \underline{\bar{x}}' \bar{L}\bar{P}_t \underline{\bar{r}} C_t^{-1} \geq \Pi \\ & \underline{\bar{x}}' \bar{L}\bar{P}_t \underline{\bar{e}} = C_t \\ & x(j) \text{ intero, con } j \in \{1, 2, \ldots, n+1\} \end{cases},
$$

in cui si ha l'introduzione dei vincoli di interezza ed in cui il vincolo di rendimento viene posto in forma di disuguaglianza anziche' nella originaria forma di uguaglianza. Questa riformulazione di tale vincolo permette un "ampliamento" della regione ammissibile, al cui interno diviene, quindi, piu' "agevole" individuare la soluzione mista-intera che risolve il problema stesso.[9] In particolare si osservi come tale riformulazione non alteri la logica del problema, poiche', per l'investitore, l'illimitatezza superiore del rendimento atteso e' desiderabile ed inoltre e' possibile dimostrare che per le soluzioni reali $x(1)^*$ e $\underline{x}^*$ il vincolo di rendimento viene soddisfatto in forma di uguaglianza e, quindi, in modo identico alla precedente formulazione (2.4.1).
Invece, relativamente alla tecnica algoritmica da adottare per la individuazione della risoluzione del problema (4.1), ci si e' ricondotti al metodo enumerativo del "branch and bound" (d'ora in poi indicato con B&B) in quanto gia' applicato con successo alla risoluzione di problemi di programmazione mista-intera non lineare convessa [13], ed alla selezione di portafoglio in media - varianza [1].

Preliminarmente alla descrizione dell'applicazione

---

8 Tecniche "cutting plane", metodi enumerativi, algoritmi partitivi, algoritmi "group theoretic", ...

9 Ad esempio nel caso di due soli titoli, senza questo "ampliamento" la regione ammissibile consisterebbe di un singolo punto, per cui, tranne che nel fortunato caso in cui la soluzione individuata fosse gia' mista-intera, i problemi di tale dimensione non ammetterebbero soluzione.

di tale metodo si reputano opportune le due seguenti puntualizzazioni:

(a) una prima puntualizzazione e' relativa agli estremi inferiore e superiore del numero m di titoli discreti. Infatti si possono alternativamente fare due distinte posizioni:

(4.2) $\quad 0 \leq m < n+1,$

(4.3) $\quad 0 \leq m \leq n+1,$

le quali differiscono per il fatto che la (4.2), contrariamente alla (4.3), presuppone che almeno una variabile possa assumere valori nel continuo. Tuttavia semplici considerazioni sulla "razionalita' finanziaria" dell'investitore permettono la riconduzione logica della posizione (4.3) alla posizione (4.2), rendendo quindi superflua una eventuale riformulazione del problema.

(b) Una seconda puntualizzazione e' di natura operativa. Infatti, ai fini di una maggiore agilita' computazionale, e' opportuno "riordinare" il vettore incognito dei lotti da acquistare in modo tale che gli m titoli discreti occupino le prime m posizioni. In particolare qualora il primo elemento, quello associato al titolo a rendimento certo, risultasse un titolo continuo, allora gli m titoli discreti occuperebbero ancora m posizioni a partire, pero', dalla seconda.

Fatte queste puntualizzazioni si passa ad una sintetica descrizione dell'applicazione della tecnica enumerativa del B&B al problema (4.1).

5. ALCUNE OSSERVAZIONI SULL'APPLICAZIONE DEL B&B.

Innanzittutto si considera il problema che deriva dalla formulazione (4.1) rilassandone i vincoli di interezza. Tale nuovo problema derivato risulta cosi' equivalente al problema (2.4.1), per cui la sua soluzione coincide con quella fornita in (2.6) e in (2.7). Se la soluzione cosi' calcolata non viola alcuno dei vincoli di interezza temporaneamente rilassati, allora e' anche la soluzione del problema (4.1). Se, invece, almeno un vincolo di interezza risulta violato si passa alla effettiva applicazione del B&B, che si articola nei seguenti momenti:

(5.A) partizione dei problemi candidabili;

(5.B) individuazione dei problemi candidati a partire dai problemi candidabili;

(5.C) politica di gestione dell'albero binario associato ai problemi candidati;

(5.D) eventuali aggiornamenti sia della soluzione ottima temporanea che dell'albero binario associato ai problemi candidati.

Relativamente al punto (5.A) si deve definire una strategia di selezione della variabile, associata ad uno degli m titoli discreti, su cui operare il branching. La strategia che, da verifiche empiriche, risulta la piu' efficiente (da un punto di vista della computazione) suggerisce di scegliere la variabile il cui valore e' il piu' vicino ad un valore avente parte decimale uguale ad un mezzo. Dunque, cio' equivale ad individuare il minimo assoluto del seguente insieme:

$$(5.1) \qquad x(h) = \min\left\{ \left| x(i) - \mathrm{Int}\left(x(i)\right) - 0.5 \right| \;\middle|\; i \in \{a, \ldots, m\} \right\},$$

con
$a \in \{1, 2\}$.

Individuata cosi' la variabile su cui operare il branching, variabile per la quale si verifica

$$(5.2) \qquad i_{1,h} < x(h) < i_{2,h}$$

dove
$i_{1,h}$, $i_{2,h}$: numeri interi consecutivi,

si generano i due sottoproblemi candidabili, derivanti entrambi dal problema (4.1) mediante l'aggiunta di un nuovo vincolo in forma di disuguaglianza, rispettivamente

$$(5.3.1) \qquad x(h) \le i_{1,h},$$

$$(5.3.2) \qquad x(h) \ge i_{2,h}.$$

Piu' in generale la forma di un tale sottoproblema candidabile sara' del tipo seguente:

$$(5.4) \qquad \mathcal{P}_{1},\ \left(a_1, h_1\right),\ \ldots,\ \left(a_j, h_j\right) \quad \begin{cases} \mathcal{P}_1 \\ x\left(h_1\right) \ \# \ i_{a_1, h_1}, \\ \vdots \\ x\left(h_j\right) \ \# \ i_{a_j, h_j} \end{cases}$$

dove
#: corrisponde all'operatore "≤" se $x\left(h_1\right) \le i_{a_1,h_1}$, mentre corrisponde all'operatore "≥" se $x\left(h_1\right) \ge i_{a_1,h_1}$.

Il punto (5.B) prende ora le mosse dai risultati del punto (5.A). Infatti, se il nuovo vincolo aggiunto in ognuno dei due sottoproblemi candidabili non rispettasse determinati bounds, porterebbe a definire una regione ammissibile vuota. Al contrario il superamento di questo test, basato sull'analisi della regione ammissibile, qualifica il sottoproblema indagato come candidato. In particolare i bounds da rispettare risultano essere i seguenti:

(5.5) $\quad i_{a_l,h_l} \geq l_h,$

(5.6) $\quad i_{a_l,h_l} \leq u_h,$

dove

l_h: lower bound associato alla variabile x(h), nel caso specifico 0, derivante dai valori dei vincoli di non negativita';

u_h: upper bound associato alla variabile x(h), nel caso specifico $C_t/\bar{L}(h,h)\bar{P}_t(h,h)$, cioe' la quantita' massima dei lotti acquistabili con la data ricchezza iniziali.

Il punto (5.C) prende ora le mosse dai risultati del punto (5.B). Infatti, il superamento del suddescritto test da parte dei problemi candidabili, comporta la necessaria scelta di una politica di gestione di questi ultimi. Nonostante la naturale struttura ad albero binario associata al metodo enumerativo B&B, si propone la linearizzazione di tale struttura di attesa, linearizzazione suggerita da una maggior semplicita' sia gestionale che implementativa di quest'ultima. Inoltre, relativamente alla scelta della specifica strategia gestionale da applicare a tale lista, da verifiche empiriche non sembrano emergere particolari indicazioni, se non quelle indicanti come meno efficiente (da un punto di vista della computazione) la strategia L.I.F.O.. Si decide dunque di adottare il criterio gestionale F.I.F.O.. Ne consegue che le informazioni relative ad ogni distinto sottoproblema candidato vengono gestite mediante una coda, in ogni nodo della quale vengono memorizzate le seguenti informazioni:

(5.C.1) il problema candidato stesso;

(5.C.2) il valore assunto dalla soluzione del problema generante il problema candidato.

A questo stadio di evoluzione dell'algoritmo si passa a "servire", cioe' a risolvere, quel dato sottoproblema che viene indicato dalla prescelta strategia gestionale. La presenza dei nuovi vincoli in forma di disuguaglianza rende, ora, inapplicabile la soluzione in "formula chiusa", per cui si rende necessario ricorrere a dei convenienti metodi risolutivi per problemi di programmazione matematica quadratica con vincoli lineari, quali, ad esempio, quelli presentati in [2] ed in [18].[10] La nuova soluzione cosi' individuata puo': o violare qualche vincolo di non negativita', o non violarne alcuno.

Nell'ipotesi si verifichi la prima delle due alternative

---

[10] Per le esigenze computazionali ci si puo' direttamente riferire a note librerie contenenti algoritmi numerici.

risulta necessario reiterare quanto finora illustrato nei punti (5.A), (5.B) e (5.C) di questo paragrafo.
Invece qualora si verifichi la seconda delle due alternative si passa ad applicare il punto (5.D). In particolare se la nuova soluzione e' la prima soluzione ammissibile individuata allora viene automaticamente anche assunta come soluzione ottima temporanea, cioe'

$$(5.7) \qquad \underline{\bar{x}}^{**} = \underline{\bar{x}}_h^{*};$$

inoltre si individua anche il primo lower bound relativo al valore assunto dalla funzione obiettivo ponendo

$$(5.8) \qquad f^{**} = f\left(\underline{\bar{x}}_h^{*}\right) = f_h^{*}.$$

Invece se non e' la prima soluzione ammissibile individuata e se si verifica

$$(5.9) \qquad f\left(\underline{\bar{x}}_h^{*}\right) < f^{**},$$

con $h \in \{a, \ldots, m\}$, $a \in \{1, 2\}$,

si operano gli identici aggiornamenti (4.12) e (4.13). Inoltre e' anche necessario aggiornare la coda d'attesa dei problemi candidati, dalla quale verranno esclusi tutti quei nodi per i quali si verifica

$$(5.10) \qquad f\left(\underline{\bar{x}}^{*}_{\text{Problema generatore}}\right) > f^{**}.$$

Infatti questo aggiornamento esclude dalla coda d'attesa, evitandone l'inutile soluzione, tutti quei sottoproblemi per i quali il valore assunto dalla funzione obiettivo del loro problema generatore risulta gia' maggiore del lower bound individuato per il valore temporaneo della funzione obiettivo, poiche' il valore della funzione obiettivo dello stesso sottoproblema candidato, individuato con un vincolo in piu' (quello di interezza), a causa della convessita' della funzione obiettivo e della stretta convessita' dei vincoli, non potrebbe mai essere inferiore a quello del suo problema generatore che, a sua volta, risulta gia' superiore al lower bound.
Conclusi questi aggiornamenti, se la coda dei sottoproblemi risulta non vuota, si continua ad iterare il metodo illustrato in questo paragrafo fino a quando non lo diventa. La soluzione ottima temporanea ed il relativo valore temporaneo assunto dalla funzione obiettivo risultano ora quelli ottimi, cioe':

$$(5.11) \qquad \underline{\bar{x}}^{*} = \underline{\bar{x}}^{**},$$

$$(5.12) \qquad f^{*} = f\left(\underline{\bar{x}}^{**}\right) = f^{**}.$$

6. BIBLIOGRAFIA

[1] AVELLA, P. (1990) Portfolio Selection: un Modello di Programmazione Mista - Intera risolto con un Algoritmo Branch and Bound, *Ricerca Operativa*, N. 56, 3-28.

[2] BOOT, J. C. G. (1964) *Quadratic Programming. Algorithms - Anomalies - Applications.* North - Holland Publishing Company, Amsterdam - Oxford.

[3] BRONSON, R. (1984) *Ricerca Operativa.* ETAS Libri, Milano.

[4] CANESTRELLI, E. (1987) Funzioni di Penalita' Esterna in Problemi di Controllo Ottimo Quadratico a Tempo Discreto, *Atti dell'Undicesimo Convegno A.M.A.S.E.S.*, Aosta, 127-142.

[5] CANESTRELLI, E. e NARDELLI, C. (1991) *Criteri per la Selezione del Portafoglio.* G. Giapicchelli Editore, Torino.

[6] CANESTRELLI, E. e NARDELLI, C. (1991) Distribuzioni Stabili di Levy dei Rendimenti nel Mercato Azionario Italiano, *Atti dell'Undicesimo Convegno A.M.A.S.E.S.*, Grado, 145-158.

[7] CANESTRELLI E. e TOSATO, C. (1990) Funzioni di Penalita' Esterna nel Problema della Selezione del Portafoglio, *Quaderni del Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica dell'Universita' degli Studi di Venezia*, N. 62/90.

[8] CASTAGNOLI, E. e PECCATI, L. (1991) *Introduzione alla Selezione del Portafoglio.* Cooperativa di Cultura "Lorenzo Milani", Milano.

[9] CONSTANTINIDES, G. e MALLIARIS, A. G. (1992) Portfolio Theory, in *Finance*, North - Holland Publishing Company, Amsterdam - New York - Oxford. In via di pubblicazione.

[10] ELTON, E. J. e GRUBER, M. J. (1984) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.* John Wiley & Sons, New York - Chichester - Brisbane - Toronto - Singapore.

[11] GREENBERG, H. (1971) *Integer Programming.* Academic Press, New York - San Francisco - London.

[12] MARKOWITZ, H. M. (1989) *Mean - Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets.* Basil Blackwell, Oxford - Cambridge.

[13] OMPRAKASH, K. G. e RAVIDAN, A. (1985) Branch and Bound Experiments in Convex Nonlinear Integer Programming, *Managemente Science*, Vol. 31, N. 12, 1533-1546.

[14] PETERS, E. E. (1989) Fractal Structure in the Capital Markets, *Financial Analyst Journal*, July - August, 32-37.

[15] SALKIN, H. M. (1975) *Integer Programming.* Addison - Wesley Publishing Company, Menlo Park - London - Don Mills - Sydney.

[16] SZEGÖ, G. P. (1980) *Portfolio Theory. With*

Application to Bank Asset Management. Academic Press, New York - San Francisco - London.

[17] TAHA, H. A. (1975) *Integer Programming. Theory, Application, and Computation.* Academic Press, New York - San Francisco - London.

[18] VAN DE PANNE, C. (1975) *Methods for Linear and Quadratic Programming.* North - Holland Publishing Co., Amsterdam - Oxford.

[19] WALTER, C. (1990) Levy-Stable Distributions and Fractal Structure on the Paris Market, *1™ A.F.I.R. International Colloquium*, Parigi, Vol. 3, 242-259.

[20] WAGNER, H. M. (1969) *Principles of Operation Research. With Application to Managerial Decision.* Prentice - Hall International Edition, London - Sidney - Toronto - New Delhi - Tokyo.

[21] ZIONTS, S. (1974) *Linear and Integer Programming.* Prentice - Hall, London - Sydney - Toronto - Delhi - Tokyo.

Riva Artigrafiche spa - Trieste