

MARCO CORAZZA

DINAMICHE DETERMINISTICHE NON LINEARI  
COMPLESSE. PARTE I: ELEMENTI DI TEORIA.

n. 58/98



UNIVERSITA' DI VENEZIA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
APPLICATA E INFORMATICA

CA' FOSCARI - 30123 VENEZIA-ITALIA



# Dinamiche Deterministiche Non Lineari Complesse. Parte I: Elementi di Teoria.

Marco CORAZZA

E-mail: corazza@unive.it

Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica  
Università "Ca' Foscari" di Venezia  
Ca' Dolfin - Dorsoduro, n. 3825/E - 30123 Venezia  
Telefono: +39 (0)41 5221345 - Fax: +39 (0)41 5221756

## 1. INTRODUZIONE

In generale, l'approccio metodologico relativo all'analisi delle dinamiche economico-finanziarie è risultato caratterizzato dal paradigma "linearista" e, talvolta anche "vivacemente", dall'antinomia determinismo/stocasticismo (ad esempio si vedano [Bartlett M.S., 1990], [Butler A., 1990] e [Malliaris A.G. *et al.*, 1992]). In particolare, le ipotesi, le teorie, i metodi e gli strumenti elaborati e sviluppati nell'ambito del primo approccio, quello deterministico e, dunque, di natura "endogenista", frequentemente hanno dovuto anche utilizzare elementi stocastici al fine di descrivere e di interpretare quegli aspetti "evidentemente" irregolari non formalizzabili mediante il solo approccio analitico-linearista o, comunque, solo debolmente analitico-non linearista. Analogamente, le ipotesi, le teorie, i metodi e gli strumenti elaborati e sviluppati nell'ambito del secondo approccio, quello stocastico e, dunque, di natura "esogenista", frequentemente hanno dovuto anche utilizzare elementi deterministici al fine di descrivere e di interpretare quegli aspetti "evidentemente" regolari non formalizzabili mediante il solo approccio statistico-probabilistico. Peraltro, risultati teorici relativi alla teoria delle equazioni alle differenze finite, alla teoria delle equazioni differenziali e, più in generale, alla teoria delle varietà differenziali e risultati empirici relativi all'analisi delle serie temporali

economico-finanziarie hanno evidenziato un crescente interesse nei confronti delle dinamiche deterministiche non lineari complesse ([Li T.-Y. *et al.*, 1975], [May R.M., 1976], [May R.M. *et al.*, 1976], [Benettin G. *et al.*, 1976], [Ruelle D., 1979], [Benhabib J. *et al.*, 1981], [Grassberger P. *et al.*, 1983a], [Badii R. *et al.*, 1985], [Wolf A. *et al.*, 1985], [Bergé P. *et al.*, 1986], [Brock W.A., 1986], [Devaney R.L., 1986], [Eckmann J.-P. *et al.*, 1986], [Mandelbrot B.B., 1987], [Barnett W. *et al.*, 1988], [Frank M. *et al.*, 1988], [Theiler J., 1988], [Brock W.A. *et al.*, 1989], [Gori F. *et al.*, 1989], [Hinich M.J. *et al.*, 1989], [Scheinkman J.A. *et al.*, 1989], [Falconer K., 1990], [Brock W.A. *et al.*, 1991], [Hsieh D.A. *et al.*, 1991], [Peters E.E., 1991a], [Peters E.E., 1991b], [Booth G.G. *et al.*, 1992], [Brasolin A. *et al.*, 1992], [DeCoster G.P. *et al.*, 1992], [Medio A. *et al.*, 1992], [Peitgen H.-O. *et al.*, 1992], [Smith R.L., 1992], [Allevi E. *et al.*, 1993], [Glasnert E. *et al.*, 1993], [Medio A. *et al.*, 1993], [Corazza M. *et al.*, 1994], [Peters E.E., 1994] e [Corazza M. *et al.*, 1997]). Questo interesse è dovuto alla capacità di queste dinamiche sia di formalizzare processi deterministici le cui realizzazioni risultano empiricamente indistinguibili da quelle generate da processi stocastici<sup>1</sup> che di manifestare delle proprietà formali analoghe a quelle caratterizzanti le dinamiche stocastiche (ad esempio si veda [Lasota A. *et al.*, 1985] e [Ornstein D.S. *et al.*, 1991]).

Questa parte propone i principali aspetti teorici relativi alle dinamiche deterministiche non lineari complesse. In particolare, nella sezione 2. si illustrano sinteticamente degli aspetti definitivi relativi, in generale, ai sistemi dinamici deterministici; nella sezione 3. si introducono sia degli aspetti definitivi che degli aspetti teorici relativi, in particolare, alle dinamiche deterministiche non lineari complesse; nella sezione 4. si illustrano le proprietà di alcuni “oggetti” associati a tali dinamiche deterministiche non lineari complesse; nella sezione 5. si introducono degli aspetti teorici relativi alla predicibilità delle dinamiche deterministiche non lineari complesse; infine, nella sezione 6. si propongono delle verifiche numeriche relative alla manifestazione, da parte di queste ultime dinamiche, di proprietà analoghe a quelle caratterizzanti le dinamiche stocastiche.

## 2. ASPETTI DEFINITORI

In questa sezione si presentano degli aspetti definitivi relativi, in generale, sia ai sistemi

---

<sup>1</sup> È possibile verificare che la classica analisi spettrale può risultare incapace di riconoscere la natura deterministica di una serie temporale generata da un sistema dinamico non lineare complesso (ad esempio si veda [Bartlett M.S., 1990]).

dinamici deterministici autonomi rappresentabili nella seguente forma

$$\dot{x}(t) = f[x(t)] \quad (2.1)$$

dove

$$\dot{x} \stackrel{def}{=} dx/dt,$$

$$t \in \mathbf{R},$$

$$f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n,$$

che ai sistemi dinamici deterministici autonomi rappresentabili nella seguente forma

$$x(t+1) = g[x(t)] \quad (2.2)$$

dove

$$t \in \mathbf{Z},$$

$$g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n,$$

aspetti estendibili, con le opportune puntualizzazioni, ai corrispondenti sistemi dinamici non autonomi. Tali aspetti necessitano previamente delle seguenti definizioni (per maggiori dettagli si veda [Medio A., 1992] e [Rinaldi S., 1993a])<sup>2</sup>.

**Definizione 2.1.1.** *Siano dati un sistema dinamico autonomo  $\dot{x}(t) = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente soluzione  $\phi[t, x(0)]$ , con  $x(0)$  prescelta condizione iniziale, e un insieme  $A \subset \mathbf{R}^n$  tale che si abbia<sup>3</sup>*

$$\phi[t, A] \stackrel{def}{=} \bigcup_{a \in A} \phi[t, a] \subset A \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (2.3.1)$$

*Tale insieme  $A$  si definisce insieme invariante per lo specificato sistema dinamico.*

**Definizione 2.1.2.** *Siano dati un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  e un insieme  $A \subset \mathbf{R}^n$  tale che si abbia*

$$g^t(A) \stackrel{def}{=} \bigcup_{a \in A} g^t(a) \subset A \quad \forall t \in \mathbf{Z} \quad (2.3.2)$$

dove

---

<sup>2</sup> Da qui in poi, per una maggiore semplicità di notazione e quando non diversamente specificato, la definizione inerente ad uno stesso "oggetto" viene presentata, dapprima, in relazione ai sistemi dinamici (2.1) e, successivamente, ai sistemi dinamici (2.2).

<sup>3</sup> Per una maggiore omogeneità di definizione si pone  $\phi[0, x] \stackrel{def}{=} x$ .

$g^t(\cdot)$ :  $t$ -esima iterata del sistema dinamico<sup>4</sup>.

Tale insieme  $A$  si definisce insieme invariante per lo specificato sistema dinamico.

**Definizione 2.2.1.** Sia dato un sistema dinamico autonomo  $\dot{x}(t) = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente soluzione, in corrispondenza della condizione iniziale  $x(0)$ ,  $\phi[t, x(0)]$ , un insieme  $\{\phi[t, x(0)], t \in \mathbf{R}\}$  e siano dati un insieme  $\{(t, \phi[t, x(0)]), t \in \mathbf{R}\}$ . Il primo di questi due ultimi insiemi si definisce orbita per lo specificato sistema dinamico e il secondo si definisce traiettoria per lo specificato sistema dinamico.

**Definizione 2.2.2.** Sia dato un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , e siano dati un insieme  $\{g^t[x(0)], t \in \mathbf{Z}\}$  e un insieme  $\{(t, g^t[x(0)]), t \in \mathbf{Z}\}$ . Il primo di questi due ultimi insiemi si definisce orbita per lo specificato sistema dinamico e il secondo si definisce traiettoria per lo specificato sistema dinamico.

Ora, è possibile illustrare alcuni concetti relativi all'evoluzione temporale asintotica sia dei sistemi dinamici (2.1) che dei sistemi (2.2) mediante le seguenti definizioni (per i cui maggiori dettagli si veda [Eckmann J.-P., 1985], [Devaney R.L., 1986], [Brock W.A., 1989], [Medio A., 1992] e [Rinaldi S., 1993a]).

**Definizione 2.3.1.** Sia dato un sistema dinamico autonomo  $\dot{x}(t) = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente soluzione  $\phi[t, x(0)]$ , con  $x(0)$  prescelta condizione iniziale, e siano dati un insieme chiuso e invariante per tale sistema  $A \subset \mathbf{R}^n$  e un insieme  $B \subset \mathbf{R}^n$ . L'insieme  $A$  si definisce attrattore per lo specificato sistema dinamico se soddisfa le due seguenti condizioni:

(2.3.1.1)  $A$  è indecomponibile, cioè per ogni coppia di insiemi aperti  $X', X'' \in \mathbf{R}^n$ , esiste un numero reale  $T > 0$  tale che

$$\phi(t, X') \cap X'' \neq \emptyset \forall t > T; \quad (2.4.1)$$

(2.3.1.2)  $A$  è attraente, cioè esiste un intorno aperto e invariante di  $A$ ,  $U$ , tale che

$$\phi[t, x(0)] \rightarrow a \in A \text{ quando } t \rightarrow +\infty \forall x(0) \in U. \quad (2.5.1)$$

L'insieme  $B$  si definisce bacino di attrazione per l'attrattore specificato dall'insieme  $A$  se soddisfa la seguente condizione:

$$B = \bigcup_{t \leq 0} \phi[t, U]. \quad (2.6.1)$$

**Definizione 2.3.2.** Siano dati un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , un insieme chiuso e invariante per tale sistema  $A \subset \mathbf{R}^n$  e un insieme

---

<sup>4</sup> Per una maggiore omogeneità di definizione si pone  $g^0[x] \stackrel{def}{=} x$ .

$B \subset \mathbf{R}^n$ . L'insieme  $A$  si definisce attrattore per lo specificato sistema dinamico se soddisfa le due seguenti condizioni:

(2.3.2.1)  $A$  è indecomponibile, cioè per ogni coppia di insiemi aperti  $X', X'' \in \mathbf{R}^n$ , esiste un numero reale  $T > 0$  tale che

$$g^t(X') \cap X'' \neq \emptyset \forall t > T; \quad (2.4.2)$$

(2.3.2.2)  $A$  è attraente, cioè esiste un intorno aperto e invariante di  $A$ ,  $U$ , tale che

$$g^t[x(0)] \rightarrow a \in A \text{ quando } t \rightarrow +\infty \forall x(0) \in U. \quad (2.5.2)$$

L'insieme  $B$  si definisce bacino di attrazione per l'attrattore specificato dall'insieme  $A$  se soddisfa la seguente condizione:

$$B = \bigcup_{t \leq 0} g^t[U]. \quad (2.6.2)$$

In termini qualitativi, l'insieme dei punti che specifica l'attrattore è individuabile mediante la conoscenza di un suo solo punto qualsiasi, poiché l'orbita determinata assumendo come condizione iniziale tale punto "visita" ogni altro punto che specifica l'attrattore stesso (dalla, rispettivamente, (2.3.1.1) e (2.3.2.1)) e la traiettoria determinabile assumendo come condizione iniziale un punto opportunamente "vicino" all'attrattore tende a convergere asintoticamente verso l'attrattore stesso (dalla, rispettivamente, (2.3.1.2) e (2.3.2.2)). È quasi superfluo porre in evidenza come il mancato soddisfacimento, da parte dell'insieme  $A$ , della condizione relativa alla proprietà di attraenza (rispettivamente, (2.3.1.2) e (2.3.2.2)), faccia definire tale stesso insieme repulsore per lo specificato sistema dinamico. L'eventuale soddisfacimento delle condizioni, rispettivamente, (2.3.1.1), (2.3.1.2) e (2.3.2.1), (2.3.2.2), si sostanzia nell'esistenza di un luogo di equilibrio "asintotico" per il sistema dinamico in oggetto. In particolare, alcuni fra gli attrattori usualmente più trattati in letteratura sono quelli qui di seguito definiti (per maggiori dettagli si veda [Eckmann J.-P., 1985], [Devaney R.L., 1986], [Brock W.A., 1989], [Medio A., 1992] e [Rinaldi S., 1993a]).

**Definizione 2.4.1.** Sia dato un sistema dinamico autonomo  $\dot{x}(t) = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente soluzione  $\phi[t, x(0)]$ , con  $x(0)$  prescelta condizione iniziale, e avente attrattore  $A$ . L'attrattore  $A$  si definisce punto di equilibrio, detto anche punto fisso, se risulta rappresentabile nella seguente forma

$$A = \{x^* : f(x^*) = x^*\}, \text{ card}(A) = 1 \quad (2.7.1)$$

dove

$\text{card}(\cdot)$ : indica l'operatore cardinalità.

L'attrattore  $A$  si definisce orbita periodica di periodo  $T$ , detto anche ciclo limite di periodo  $T$ , con  $T \in \mathbf{R}^+$ , se risulta rappresentabile nella seguente forma

$$A = \{\phi[t, x^*], t \in [0, T[, T \in \mathbf{R}^+ : \phi[t + kT, x^*] = \phi[t, x^*], \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \forall t \in [0, T[ \}. \quad (2.8.1)$$

**Definizione 2.4.2.** Sia dato un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente attrattore  $A$ . L'attrattore  $A$  si definisce punto di equilibrio, detto anche punto fisso, se risulta rappresentabile nella seguente forma

$$A = \{x^* : g(x^*) = x^*\}, \text{ card}(A) = 1. \quad (2.7.2)$$

L'attrattore  $A$  si definisce orbita periodica di periodo  $T$ , detto anche punto periodico di periodo  $T$ , con  $T \in \mathbf{Z}^+$ , se risulta rappresentabile nella seguente forma

$$A = \{g^t(x^*), t = 0, 1, \dots, T-1, T \in \mathbf{Z}^+ : g^{t+kT}(x^*) = g^t(x^*), \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \forall t = 0, 1, \dots, T-1 \}. \quad (2.8.2)$$

Un'interessante caratterizzazione del concetto di attrattore associato ad uno specificato sistema dinamico deterministico, è quella derivante dal possesso, o meno, della proprietà di stabilità da parte delle traiettorie di questi sistemi dinamici, ovvero della "insensibilità", o meno, delle evoluzioni temporali di tali sistemi ad eventuali "perturbazioni". In particolare, si danno le seguenti definizioni (per i cui maggiori dettagli si veda [Rinaldi S., 1974], [Eckmann J.-P., 1985], [Devaney R.L., 1986], [Brock W.A., 1989], [Medio A., 1992] e [Rinaldi S., 1993a]).

**Definizione 2.5.1.** Sia dato un sistema dinamico autonomo  $\dot{x}(t) = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente soluzione  $\phi[t, x(0)]$ , con  $x(0)$  prescelta condizione iniziale, e avente attrattore  $A$ . Tale attrattore si definisce stabile nel senso di Lyapunov se esiste un  $\varepsilon > 0$  per il quale esiste un  $\delta > 0$  tale che, per ogni coppia di condizioni iniziali  $x(0), y(0) \in \mathbf{R}^n$  per le quali si ha che  $\|x(0) - y(0)\| < \delta$ , si ha

$$\|\phi[t, x(0)] - \phi[t, y(0)]\| < \varepsilon \forall t \in [0, +\infty[. \quad (2.9.1)$$

**Definizione 2.5.2.** [Medio A., 1992a] Sia dato un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente attrattore  $A$ . Tale attrattore si definisce stabile



nel senso di Lyapunov se esiste un  $\varepsilon > 0$  per il quale esiste un  $\delta > 0$  tale che, per ogni coppia di condizioni iniziali  $x(0), y(0) \in \mathbf{R}^n$  per le quali si ha che  $\|x(0) - y(0)\| < \delta$ , si ha

$$\|g^t[x(0)] - g^t[y(0)]\| < \varepsilon \forall t = 0, 1, \dots \quad (2.9.2)$$

In termini qualitativi, due orbite distintamente determinate assumendo come rispettive condizioni iniziali due punti opportunamente “vicini” risultano sempre altrettanto opportunamente “vicine” nel corso della loro evoluzione temporale

**Definizione 2.6.1.** Sia dato un sistema dinamico autonomo  $\dot{x}(t) = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente soluzione  $\phi[t, x(0)]$ , con  $x(0)$  prescelta condizione iniziale, e avente attrattore  $A$ . Tale attrattore si definisce asintoticamente stabile nel senso di Lyapunov se soddisfa le due seguenti condizioni:

(2.6.1.1)  $A$  è una soluzione stabile per lo specificato sistema dinamico;

(2.6.1.2) esiste un  $\eta$  tale che, per ogni coppia di condizioni iniziali  $x(0), y(0) \in \mathbf{R}^n$  per le quali si ha che  $\|x(0) - y(0)\| < \eta$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi[t, x(0)] - \phi[t, y(0)]\| = 0. \quad (2.10.1)$$

**Definizione 2.6.2.** Sia dato un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , avente attrattore  $A$ . Tale attrattore si definisce asintoticamente stabile nel senso di Lyapunov se soddisfa le due seguenti condizioni:

(2.6.2.1)  $A$  è un attrattore stabile per lo specificato sistema dinamico;

(2.6.2.2) esiste un  $\eta$  tale che, per ogni coppia di condizioni iniziali  $x(0), y(0) \in \mathbf{R}^n$  per le quali si ha che  $\|x(0) - y(0)\| < \eta$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|g^t[x(0)] - g^t[y(0)]\| = 0. \quad (2.10.2)$$

In termini qualitativi, due traiettorie distintamente determinate assumendo come rispettive condizioni iniziali due punti opportunamente “vicini”, risultano sempre altrettanto opportunamente “vicine” nel corso della loro intera evoluzione temporale e, asintoticamente, convergenti.

In conclusione di questa sezione, è da porre in evidenza come gli aspetti definatori fin qui presentati, preliminari a quelli sia definatori che teorici relativi alle dinamiche non lineari complesse, siano prevalentemente inerenti alle proprietà qualitative dei sistemi dinamici deterministici. Questo poiché, come si è venuto determinando in letteratura fino dai primi

pionieristici lavori di Poincaré H., tali sistemi dinamici non lineari complessi risultano, in generale, meglio indagabili mediante tale approccio qualitativo rispetto ad uno maggiormente analitico.

### 3. CAOS DETERMINISTICO

In questa sezione si presentano degli aspetti definatori relativi sia alle dinamiche deterministiche non lineari complesse in regime caotico deterministico che agli attrattori associati a tali dinamiche, detti attrattori strani. In particolare, poiché in letteratura non esiste uniformità di pareri sugli aspetti definatori degli “oggetti” inerenti al caos deterministico, in questa sezione ci si rifà alle definizioni verso le quali c'è più diffuso consenso (per i cui maggiori dettagli si veda [Ruelle D., 1979], [Eckmann J.-P. *et al.*, 1985], [Bergé P. *et al.*, 1986] e [Medio A., 1992]).

(3.A.1) Dinamica in regime caotico e attrattore strano: sia dati un sistema dinamico autonomo  $\dot{x} = f[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{R}$  e con  $f[\cdot] : I \rightarrow I$ ,  $I \subset \mathbf{R}^n$ , avente soluzione  $\phi[t, x(0)]$ , con  $x(0)$  prescelta condizione iniziale, e sia dato un insieme invariante per lo specificato sistema dinamico,  $A \subset I$ . Tale sistema si definisce dinamica in regime caotico e l'insieme  $A$  si definisce attrattore strano per lo specificato sistema dinamico, se quest'ultimo insieme soddisfa le tre seguenti condizioni:

(3.A.1.1)  $A$  è un attrattore per lo specificato sistema dinamico;

(3.A.1.2)  $\phi[\cdot, \cdot]$  mostra dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, cioè, dati  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente piccolo e  $\delta > 0$  opportunamente grande, per ogni coppia di punti  $x, y \in I$  tali che  $\|x - y\| < \varepsilon$ , esiste un numero reale  $T > 0$  tale che

$$\|\phi[T, x] - \phi[T, y]\| > \delta; \quad (3.1.1)$$

(3.A.1.3) l'insieme  $P$  dei punti periodici associati allo specificato sistema dinamico è denso in  $I$ , cioè

$$\overline{P} = I \quad (3.2.1)$$

dove

$\overline{P}$ : chiusura di  $P$ .

(3.A.2) Dinamica in regime caotico e attrattore strano: sia dato un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : I \rightarrow I$ ,  $I \subset \mathbf{R}^n$ , e sia dato un insieme invariante per lo specificato sistema dinamico,  $A \subset I$ . Tale sistema si definisce dinamica in regime caotico e l'insieme  $A$  si definisce attrattore strano per lo specificato sistema dinamico, se quest'ultimo insieme soddisfa le tre seguenti condizioni:

(3.A.2.1)  $A$  è un attrattore per lo specificato sistema dinamico;

(3.A.2.2)  $g[\cdot]$  mostra dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, cioè, dati  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente piccolo e  $\delta > 0$  opportunamente grande, per ogni coppia di punti  $x, y \in I$  tali che  $\|x - y\| < \varepsilon$ , esiste un numero intero  $T > 0$  tale che

$$\|g^T(x) - g^T(y)\| > \delta; \quad (3.1.2)$$

(3.A.2.3) l'insieme  $P$  dei punti periodici associati allo specificato sistema dinamico è denso in  $I$ , cioè

$$\overline{P} = I \quad (3.2.2)$$

dove

$\overline{P}$ : chiusura di  $P$ .

In termini qualitativi, l'insieme dei punti che specifica tale luogo di equilibrio, detto attrattore strano, è contenuto in  $I$  e, dunque, ivi limitato e non è decomponibile in luoghi d'equilibrio più semplici o elementari (dalle, rispettivamente (3.A.1.1) e (3.A.2.1)), tale insieme è non numerabile (dalle, rispettivamente, (3.A.3.1) e (3.A.3.2)) ed, infine, le traiettorie di avvicinamento a tale luogo di equilibrio, a partire da due distinti stati iniziali del sistema arbitrariamente vicini, tendono a divergere altrettanto arbitrariamente, rimanendo comunque in  $I$  (dalle, rispettivamente, (3.A.2.1) e (3.A.2.2)). In particolare, quest'ultima caratteristica ha evidenti riflessi applicativi. Infatti, se la dinamica di un sistema economico-finanziario fosse descrivibile mediante un sistema dinamico caotico noto, la precisa conoscenza della traiettoria futura di tale sistema sarebbe indissolubilmente legata alla precisa conoscenza dello stato iniziale del sistema stesso. Una qualunque differenza, seppur piccola a piacere, del valore "misurato" dello stato iniziale da quello "vero", si rifletterebbe in una progressiva divergenza (seppur limitata) della traiettoria "calcolata" da quella "vera". Tale peculiarità risulta figurativamente esemplificata in quanto di seguito riportato: *"Il caos mescola le orbite nello spazio degli stati esattamente come un fornaio impasta il pane. Ci si può immaginare ciò che accade alle traiettorie vicine su un attrattore caotico versando nella pasta una goccia di colorante blu. L'impastatura è una combinazione di due azioni: lo stendimento della pasta, che fa diffondere il colorante, e il ripiegamento della pasta su se stessa. Dapprima la chiazza di colorante semplicemente si allunga, ma poi viene ripiegata e dopo un tempo piuttosto lungo si trova stirata e ripiegata molte volte. Osservando da vicino, si vede che l'impasto consiste in molti strati, alternativamente blu e bianchi. Già dopo 20 passaggi la lunghezza della macchia è aumentata di più di un milione di volte e il suo spessore si è assotigliato fino a dimensioni molecolari. Il colorante blu è completamente mescolato con l'impasto. Il caos agisce allo stesso modo, ma invece di mescolare pasta mescola lo spazio degli stati."* [Crutchfield J. P. et al., 1987].

In relazione alla (3.A.1) e alla (3.A.2) è da porre in evidenza quanto segue:

(3.1) è possibile verificare che un sistema dinamico autonomo che può risultare in regime caotico, a cui è associato come luogo d'equilibrio "asintotico" un attrattore strano, può anche risultare in regime "standard", a cui può essere associato come luogo d'equilibrio asintotico un punto fisso, un'orbita periodica, ... (ad esempio si veda la sezione 2. della **PARTE III**;

(3.2) è possibile verificare che i sistemi dinamici deterministici autonomi (2.1) possono risultare in regime caotico solo quando si verifica, contemporaneamente, che  $f[\cdot] : I \rightarrow I$  è non lineare e che  $n \geq 3$  (ad esempio si veda [May R., 1976], [Bergé P. *et al.*, 1986], [Medio A., 1992] e [Rinaldi S., 1993b]). In particolare, la non linearità è richiesta poiché è possibile verificare che il "percorso" di tali sistemi dinamici da un regime "standard" ad un regime caotico è specificato dalla comparsa di biforcazioni, ovvero di "situazioni" in corrispondenza delle quali si verifica un determinato cambiamento qualitativo dell'attrattore associato al sistema indagato (ad esempio, da punto fisso a orbita periodica), cambiamenti qualitativi che, è anche possibile verificare, si possono avere solo in corrispondenza di sistemi dinamici deterministici non lineari;

(3.3) è possibile verificare che i sistemi dinamici deterministici autonomi (2.2) possono risultare in regime caotico solo quando si verifica, contemporaneamente, che  $g[\cdot] : I \rightarrow I$  è, analogamente a quanto specificato nella precedente osservazione, non lineare e che  $n \geq 1$ .

#### 4. RILEVATORI DI "CAOTICITÀ DETERMINISTICA"

In generale, non risulta agevole determinare, o meno, la "caoticità deterministica" di una data dinamica non lineare mediante la diretta verifica formale del soddisfacimento, o meno, delle condizioni presentate, rispettivamente in (3.A.1) e in (3.A.2) (ad esempio si veda [Frank M. *et al.*, 1988]). Peraltro, risulta possibile determinare, o meno, indirettamente una tale caoticità mediante l'utilizzo di "oggetti" formali associati alle dinamiche deterministiche e capaci di rilevare alcuni degli aspetti teorici associati alle dinamiche deterministiche non lineari complesse. In particolare, i più importanti di tali aspetti sono la natura frattale dell'attrattore strano (ad esempio si veda [Rinaldi S., 1993a]) e la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali mostrata dal sistema specificato.

(4.A) Natura frattale dell'attrattore strano: in termini intuitivi e, per ciò stesso, non formalmente puntuali, la "frattalità" può essere presentata mediante la seguente elencazione delle sue principali peculiarità (per maggiori dettagli si veda [Mandelbrot B.B., 1987], [Devaney R.L., 1990], [Falconer K., 1990], [Mandelbrot B.B., 1990] e [Peitgen H.-O. *et al.* 1992]):

(4.A.1) gli oggetti frattali, di regola, risultano caratterizzati da una struttura fortemente

irregolare e, non di rado, complessa;

(4.A.2) gli oggetti frattali, di regola, risultano caratterizzati da una struttura che presenta la stessa ricchezza di dettagli in qualunque scala d'osservazione;

(4.A.3) gli oggetti frattali, di regola, risultano caratterizzati da una struttura auto-somigliante in qualunque scala d'osservazione o, equivalentemente, da una omotetia interna;

(4.A.4) gli oggetti frattali, di regola, risultano costituiti da insiemi non numerabili di elementi;

(4.A.5) agli oggetti frattali, di regola, risultano associate dimensioni non intere ma frazionarie<sup>5</sup>.

In particolare, con riferimento a quest'ultima peculiarità, nel seguito di questa sezione si presentano degli aspetti defnitori e degli aspetti teorici relativi ai concetti di misura più diffusamente impiegati nell'analisi degli oggetti frattali (per i cui maggiori dettagli si veda [Mandelbrot B.B., 1987] e [Falconer K., 1990]).

**Definizione 4.A.1.** *Siano dati uno spazio metrico  $\Omega$  avente dimensione  $n$ , con  $n \in \mathbf{N}^+$ , un suo insieme  $S$  tale che sia contenuto in un intorno sferico  $n$ -dimensionale  $I$  di  $\Omega$  avente raggio finito e un numero reale  $D$  tale che  $0 \leq D \leq n$ . Si approssimi  $S$  per eccesso mediante intorni sferici  $n$ -dimensionali  $I_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, N < +\infty$ , di  $\Omega$  aventi, rispettivamente, raggio  $\rho_i < \rho < +\infty$  tali che ciascun elemento di  $S$  sia situato in almeno uno di essi. Il numero reale  $D$  si definisce dimensione di Hausdorff di  $S$ , detta anche dimensione di Hausdorff-Besicovitch di  $S$ , e si indica con la notazione*

$$\dim_H(S) \stackrel{def}{=} D, \quad (4.1)$$

se risulta soddisfatta la seguente condizione

$$\gamma(d) \lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{1 \leq i \leq N} \sum_{i=1}^N \rho_i^d = \begin{cases} +\infty & \text{se } d < D \\ 0 & \text{se } d > D \end{cases}, \quad d > 0 \quad (4.2)$$

dove

$\gamma(d) = [\Gamma(0.5)]^d / \Gamma(1 + d/2)$ , con  $\Gamma(\cdot)$  funzione gamma, detta anche integrale Euleriano,  $\gamma(d)\rho_i^d$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ : volume  $n$ -dimensionale dell' $i$ -esimo intorno sferico  $n$ -dimensionale.

In relazione a tale definizione è da porre in evidenza quanto segue:

(4.A.1) è possibile verificare come la dimensione di Hausdorff, a differenza di altre, risulti definita per qualsiasi insieme;

(4.A.2) è possibile verificare come, se  $S$  è un insieme aperto tale che  $S \subset \Omega$ , allora si abbia  $\dim_H(S) = n$ ;

---

<sup>5</sup> Classici oggetti frattali sono l'insieme di Cantor, avente dimensione 0.6309, il "fiocco di neve" di von Koch, avente dimensione 1.2618 e la "spugna" di Sierpiński-Menger, avente dimensione 2.7268.

(4.A.3) è possibile verificare come, se  $S_1$  e  $S_2$  sono due insiemi tali che  $S_1, S_2 \subset \Omega$  e  $S_1 \subset S_2$ , allora si abbia  $\dim_H(S_1) \leq \dim_H(S_2)$ .

**Definizione 4.A.2.** Siano dati uno spazio metrico  $\Omega$  avente dimensione  $n$ , con  $n \in \mathbf{N}^+$ , un suo insieme  $S$  tale che sia contenuto in un intorno sferico  $n$ -dimensionale  $I$  di  $\Omega$  avente raggio finito, con  $0 < \rho < +\infty$  e un numero reale  $D$  tale che  $0 \leq D \leq n$ . Si approssimi  $S$  mediante intorni sferici  $n$ -dimensionali  $I_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, N(\rho) < +\infty$ , di  $\Omega$ , utilizzando il metodo che ne richieda il minor numero. Allora il numero reale  $D$  si definisce *dimensione di box-counting* di  $S$ , e si indica con la notazione

$$\dim_B(S) \stackrel{def}{=} D, \quad (4.3)$$

se risulta soddisfatta la seguente condizione

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \inf \frac{\ln N(\rho)}{\ln(1/\rho)} \right) = D = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \sup \frac{\ln N(\rho)}{\ln(1/\rho)} \right). \quad (4.4)$$

In relazione a tale definizione è da porre in evidenza quanto segue:

(4.A.4) è possibile verificare come la dimensione di box-counting, a differenza di altre, risulti definita per qualsiasi insieme;

(4.A.5) è possibile verificare come, se  $S_1$  e  $S_2$  sono due insiemi tali che  $S_1, S_2 \subset \Omega$  e  $S_1 \subset S_2$ , allora si abbia  $\dim_B(S_1) \leq \dim_B(S_2)$ .

È da notare come, nell'analisi degli oggetti frattali, raramente risultino utilizzate altre dimensioni capaci di cogliere la "frattalità", quali, ad esempio, la variante di Kolmogorov della dimensione di box-counting, la dimensione di Minkowski-Bouligand, ... (per i cui maggiori dettagli si veda [Mandelbrot B. B., 1987]), a causa delle difficoltà applicativo-computazionali loro inerenti.

(4.B) Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali mostrata da un sistema dinamico deterministico: in relazione alla dipendenza dalle condizioni iniziali mostrata da un generico sistema dinamico deterministico, in termini intuitivi e, per ciò stesso, non formalmente puntuali, si ha che l'insieme costituito da tutte le sue possibili condizioni iniziali tende a "convergere" asintoticamente al suo insieme attrattore. In particolare, poiché quest'ultimo insieme "occupa", di regola, una regione dello spazio degli stati più "piccola" di quella occupata dall'insieme costituito da tutte le sue possibili condizioni iniziali, si ha che, nel corso della specificata convergenza, anche la regione dello spazio degli stati "occupata" da quest'ultimo insieme si "contrae" al fine di convergere asintoticamente a quella occupata dal suo insieme attrattore. Tale contrazione si può realizzare secondo distinte modalità, principali, fra le quali, le seguenti:

(4.B.1) la regione dello spazio degli stati specificata si contrae contemporaneamente secondo tutte le  $n$  direzioni; a tale modalità di contrazione risulta associato come attrattore il punto fisso;

(4.B.2) la regione dello spazio degli stati specificata si contrae contemporaneamente secondo  $n - 1$  direzioni e non si contrae secondo la rimanente direzione; a tale modalità di contrazione risulta associato come attrattore l'orbita periodica;

(4.B.3) la regione dello spazio degli stati specificata, pur complessivamente contraendosi, si "stira" contemporaneamente secondo  $n_1 < n - 1$  direzioni, non si contrae secondo una direzione e si contrae secondo le rimanenti direzioni; a tale modalità di contrazione risulta associato come attrattore l'attrattore strano.

Gli aspetti teorici necessari a formalizzare quanto da ultimo premesso si presentano nella seguente definizione ( per i cui maggiori dettagli si veda [Benettin G. *et al.*, 1976], [Eckmann J.-P., 1985] e [Medio A., 1992]):

**Definizione 4.B.1.** *Sia dato un sistema dinamico autonomo  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : I \rightarrow I$ ,  $I \subset \mathbf{R}^n$ , e siano dati una coppia di punti  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in I$  e un numero intero  $j$ , con  $1 \leq j \leq n$ , tali che  $x_i = y_i$  se  $i \neq j$ . Si definiscono esponenti caratteristici di Lyapunov per lo specificato sistema le seguenti quantità*

$$\Lambda_j \stackrel{def}{=} \Lambda_j(x) \stackrel{def}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{y_j \rightarrow x_j} \frac{1}{t} \ln \frac{\|g^t(x) - g^t(y)\|}{\|x_j - y_j\|}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.5)$$

È da porre in evidenza come tale definizione sia anche valida in riferimento ai sistemi (2.1), poiché gli esponenti caratteristici di Lyapunov relativi a questi sistemi coincidono con quelli relativi agli stessi sistemi ai quali sia stata imposto che  $t \in \mathbf{Z}$  anzichè  $t \in \mathbf{R}$  (per maggiori dettagli si veda [Eckmann J.-P. *et al.*, 1985]. In termini qualitativi, questo indicatore permette di quantificare, in media, la dipendenza di un generico sistema dinamico autonomo dalle condizioni iniziali secondo la prescelta direzione, infatti, in termini approssimati si ha

$$\|g^t(x) - g^t(y)\| \cong \|x_j - y_j\| \exp(\Lambda_j t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6)$$

In particolare, le traiettorie che partono da due distinti stati iniziali del sistema dinamico,  $x$  e  $y$ , arbitrariamente vicini, lungo la direzione  $j$ -esima, con  $j = 1, 2, \dots, n$ , tendono a convergere se  $\Lambda_j < 0$ , a rimanere equidistanti se  $\Lambda_j = 0$  e a divergere se  $\Lambda_j > 0$ . Nel primo e nel secondo caso ( $\Lambda_j < 0$  e  $\Lambda_j = 0$ ) il sistema dinamico non mostra dipendenza sensibile alle condizioni iniziali; nel terzo caso ( $\Lambda_j > 0$ ) il sistema dinamico mostra dipendenza sensibile alle condizioni iniziali.

In relazione alla definizione (4.B.1) è da porre in evidenza quanto segue:

(4.B.1) è possibile verificare che, risultando soddisfatte date condizioni, si ha l'esistenza e la finitezza degli esponenti caratteristici di Lyapunov  $\Lambda_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, n$ , quasi ovunque relativamente ad una specificata misura di probabilità;

(4.B.2) è possibile verificare che, nel caso di sistemi dinamici deterministici autonomi lineari, gli esponenti caratteristici di Lyapunov  $\Lambda_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, n$ , si particolarizzano nella parte reale degli autovalori associati a tale sistema (ad esempio si veda [Medio A., 1992]);

(4.B.3) è possibile verificare che, se allo specificato sistema dinamico deterministico indagato risulta associato un attrattore, allora si ha che  $\sum_{j=1}^n \Lambda_j < 0$ . In particolare, se tale attrattore è un punto fisso allora tutti gli  $n$  esponenti caratteristici di Lyapunov risultano negativi, se tale attrattore è un'orbita periodica allora  $n-1$  esponenti caratteristici di Lyapunov risultano negativi ed il rimanente risulta uguale a zero, se tale attrattore è un attrattore strano allora  $n_1 < n - 1$  esponenti caratteristici di Lyapunov risultano positivi, uno risulta uguale a zero ed i rimanenti risultano negativi.

## 5. SULLA PREDICIBILITÀ DELLE DINAMICHE DETERMINISTICHE IN REGIME CAOTICO

In generale, secondo una diffusa concezione "Laplaciana", la "deterministicità" di uno specifico sistema dinamico comporta, *sic et simpliciter*, la sua esatta predicibilità relativamente ad un qualunque momento futuro (ad esempio si veda [Lambert K. *et al.*, 1981] e [Cramer F., 1994]). Peraltro, è possibile verificare come, in relazione ai sistemi dinamici deterministici in regime caotico, tale concezione, in generale, non risulti corretta. L'illustrazione di tale affermazione necessita previamente della seguente definizione (per i cui maggiori dettagli si veda [Benettin G. *et al.*, 1976], [Shaw R., 1984], [Eckmann J.-P. *et al.*, 1985], e [Medio A., 1992]).

**Definizione 5.1.** *Siano dati un sistema dinamico  $x(t+1) = g[x(t)]$ , con  $t \in \mathbf{Z}$  e con  $g[\cdot] : I \rightarrow I$ ,  $I$  insieme compatto, una misura di probabilità  $\mu(\cdot)$  su  $I$  e una partizione di  $I$   $\{I_i, i = 1, \dots, p < +\infty\}$ . Con la notazione  $g^{-t}[I_i]$ , con  $i = 1, 2, \dots, p$ , si indichi l'insieme  $\{x \in I : g^t[x] \in I_i\}$ , con la notazione  $I^{(t)}$  si indichi un'altra partizione  $\{\cup_{k=1}^t g^{-k}[I_i], i = 1, \dots, p < +\infty\}$  e con la notazione  $H(I^{(t)})$  si indichi la quantità  $\sum_{i=1}^p \mu\{\cup_{k=1}^t g^{-k}[I_i]\} \ln \mu\{\cup_{k=1}^t g^{-k}[I_1]\}$ . Si definisce entropia di Kolmogorov-Sinai la quantità*

$$h(\mu) \stackrel{def}{=} \lim_{d(I) \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} H(I^{(t)}) \quad (5.1)$$

dove



$d(I) \stackrel{def}{=} \max_{1 \leq i \leq p} \{\text{diam}(I_i)\}$ , dove  $\text{diam}(\cdot)$  indica l'operatore diametro.

È da porre in evidenza come tale definizione sia anche valida in riferimento ai sistemi (2.1), poiché l'entropia di Kolmogorov-Sinai relativa a questi sistemi coincide con quella relativa agli stessi sistemi ai quali sia stata imposto che  $t \in \mathbf{Z}$  anziché  $t \in \mathbf{R}$  (per maggiori dettagli si veda [Eckmann J.-P. *et al.*, 1985]). L'entropia di Kolmogorov-Sinai permette di quantificare, in media, l'“informazione” distrutta o creata dal sistema dinamico deterministico indagato nel corso della sua evoluzione temporale<sup>5</sup>. In particolare, dato un generico sistema dinamico deterministico, si considerino due sue distinte traiettorie aventi, come rispettive origini, due condizioni iniziali arbitrariamente distanti che, dunque, forniscono distinte informazioni relativamente allo spazio degli stati. Nel caso in cui tali traiettorie risultino asintoticamente convergenti, le rispettive informazioni da loro fornite sullo spazio degli stati differiscono sempre meno al fluire del tempo e, asintoticamente, coincidono: il sistema considerato distrugge informazione nel corso della sua evoluzione temporale ( $h(\mu) < 0$ ). Nel caso in cui tali traiettorie risultino “parallele” le rispettive informazioni da loro fornite sullo spazio degli stati differiscono sempre ugualmente al fluire del tempo: il sistema considerato non distrugge e non crea informazione nel corso della sua evoluzione temporale ( $h(\mu) = 0$ ). Infine, nel caso in cui tali traiettorie risultino “indipendenti”, le rispettive informazioni da loro fornite sullo spazio degli stati differiscono sempre variabilmente al fluire del tempo: il sistema considerato crea informazione nel corso della sua evoluzione temporale ( $h(\mu) > 0$ ). È quasi superfluo porre in evidenza come i sistemi dinamici deterministici per i quali si verifica che  $h(\mu) < 0$  o, equivalentemente, che l'informazione contenuta nell'eventuale differenza, seppur grande a piacere, del valore “misurato” della condizione iniziale da quello “vero” viene asintoticamente ridotta o mantenuta, risultano predicibili, mentre quelli per i quali che  $h(\mu) > 0$  o, equivalentemente, che l'informazione contenuta nell'eventuale differenza, seppur piccola a piacere, del valore “misurato” della condizione iniziale da quello “vero” viene continuamente variata, risultano predicibili solo nel breve periodo.

Ora, relativamente all'entropia di Kolmogorov-Sinai relativa ad uno specificato sistema deterministico, è possibile verificare che tra quest'ultima e gli esponenti caratteristici di Lyapunov associati allo stesso sistema dinamico deterministico si ha la seguente relazione:

$$h(\mu) \leq \sum_{j=1}^n \Lambda_j^+ \quad (5.2)$$

dove

$\Lambda_j^+$ ,  $j = 1, \dots, n$ : esponenti caratteristici di Lyapunov positivi,

---

<sup>5</sup> Al fine di esprimere in bits l'informazione distrutta o creata dal sistema indagato, la quantità  $H(I^{(t)})$  deve essere calcolata utilizzando il logaritmo in base 2 anziché quello in base  $e$ .

relazione che si particolarizza nella seguente

$$h(\mu) = \sum_{j=1}^n \Lambda_j^+ \quad (5.3)$$

se e solo se la misura di probabilità  $\mu(\cdot)$  risulta assolutamente continua secondo le direzioni dello spazio degli stati a cui risultano associati i  $\Lambda_j^+$ , con  $j = 1, 2, \dots, n$  (per maggiori dettagli si veda [Eckmann J.-P. *et al.*, 1985] e [Medio A., 1992]). In particolare, da entrambe le relazioni da ultime introdotte si ha che i sistemi dinamici deterministici a cui risulta associato come attrattore o un punto fisso o un'orbita periodica e, dunque, aventi, rispettivamente, o tutti gli  $n$  esponenti caratteristici di Lyapunov negativi o  $n - 1$  positivi ed il rimanente uguale a zero risultano predicibili poiché  $h(\mu) \leq 0$ ; specificamente dalla sola relazione (5.2) si ha che i sistemi dinamici deterministici a cui risulta associato come attrattore un attrattore strano e, dunque, aventi  $n_1 < n - 1$  esponenti caratteristici di Lyapunov positivi, uno uguale a zero ed i rimanenti negativi, possono, o meno, risultare predicibili in corrispondenza del rispettivo verificarsi o che  $h(\mu) \leq 0 < \sum_{j=1}^n \Lambda_j^+$ , o che  $0 < h(\mu) \leq \sum_{j=1}^n \Lambda_j^+$ ; infine, specificamente dalla sola relazione (5.3), si ha che questi ultimi sistemi risultano predicibili solo nel breve periodo poiché  $0 < h(\mu) = \sum_{j=1}^n \Lambda_j^+$ . Anche in questo senso le dinamiche deterministiche non lineari complesse manifestano proprietà analoghe a quelle caratterizzanti le dinamiche stocastiche.

## 6. VERIFICHE NUMERICHE

In questa sezione si presentano gli aspetti applicativi ed i risultati di una semplice verifica numerica della dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali da parte dei sistemi dinamici deterministici in regime caotico. In un primo momento si è specificata una dinamica capace di “manifestare” caoticità deterministica mediante la scelta della seguente mappa, detta equazione logistica,

$$x(t+1) = \alpha x(t)[1 - x(t)] \quad (6.1)$$

dove

$\alpha$ : parametro,

considerata, in letteratura, la più semplice dinamica capace di risultare in regime caotico (ad esempio si veda [May R.M., 1976]) e la si è puntualizzata fissando il valore del parametro  $\alpha$  a 4. In un secondo momento si sono puntualizzati il valore “vero” e quelli “misurati” della condizione iniziale come  $x(0) = 0.25$  e  $x_i^-(0) = 0.25(1 - 1E - i)$ ,  $x_i^+(0) = 0.25(1 + 1E - i)$ , con

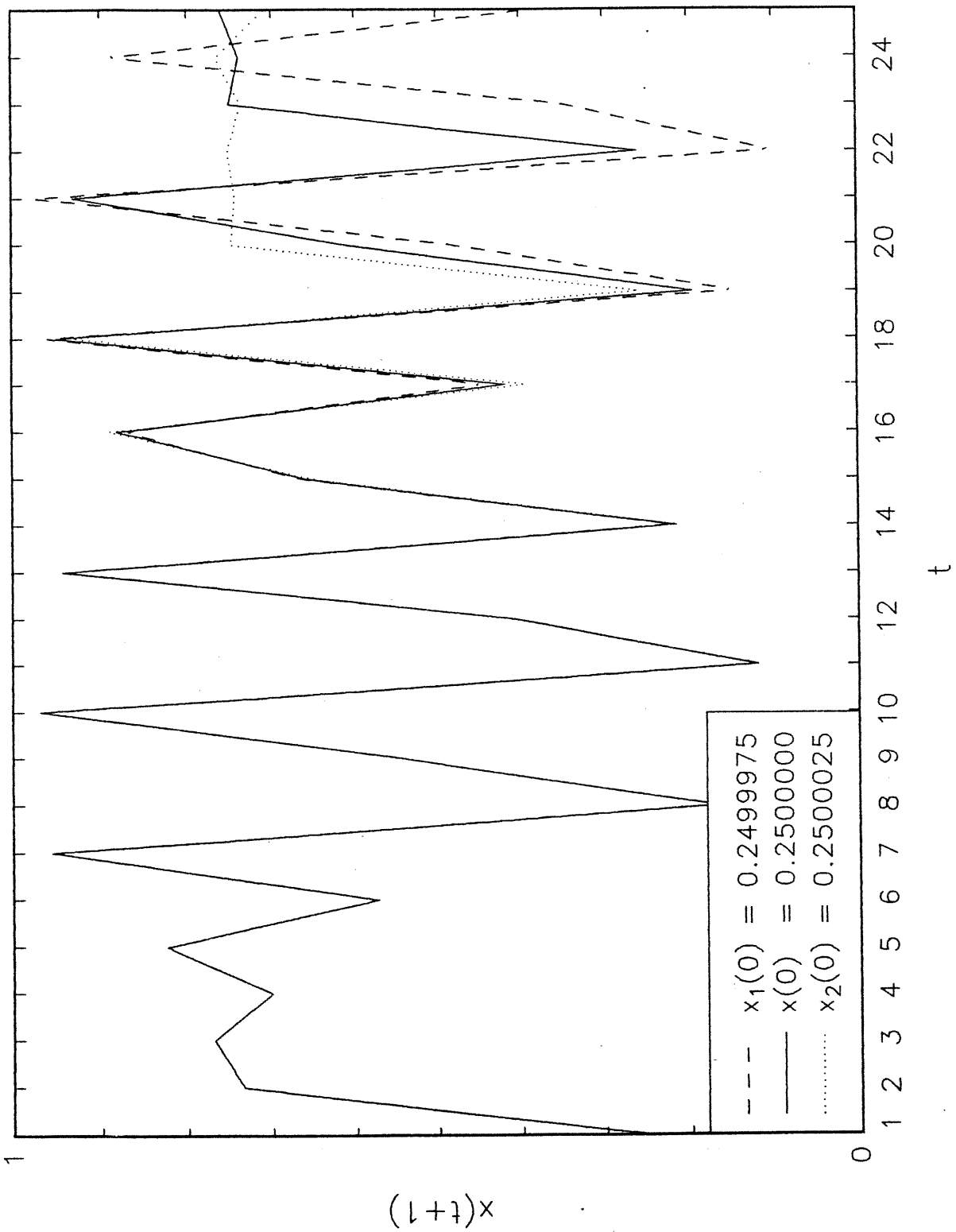
$i = 1, 2, \dots, 5$ . Infine, in un terzo momento si sono generate le serie temporali, rappresentabili come segue, corrispondenti al valore “vero” e a quelli “misurati” delle condizioni iniziali

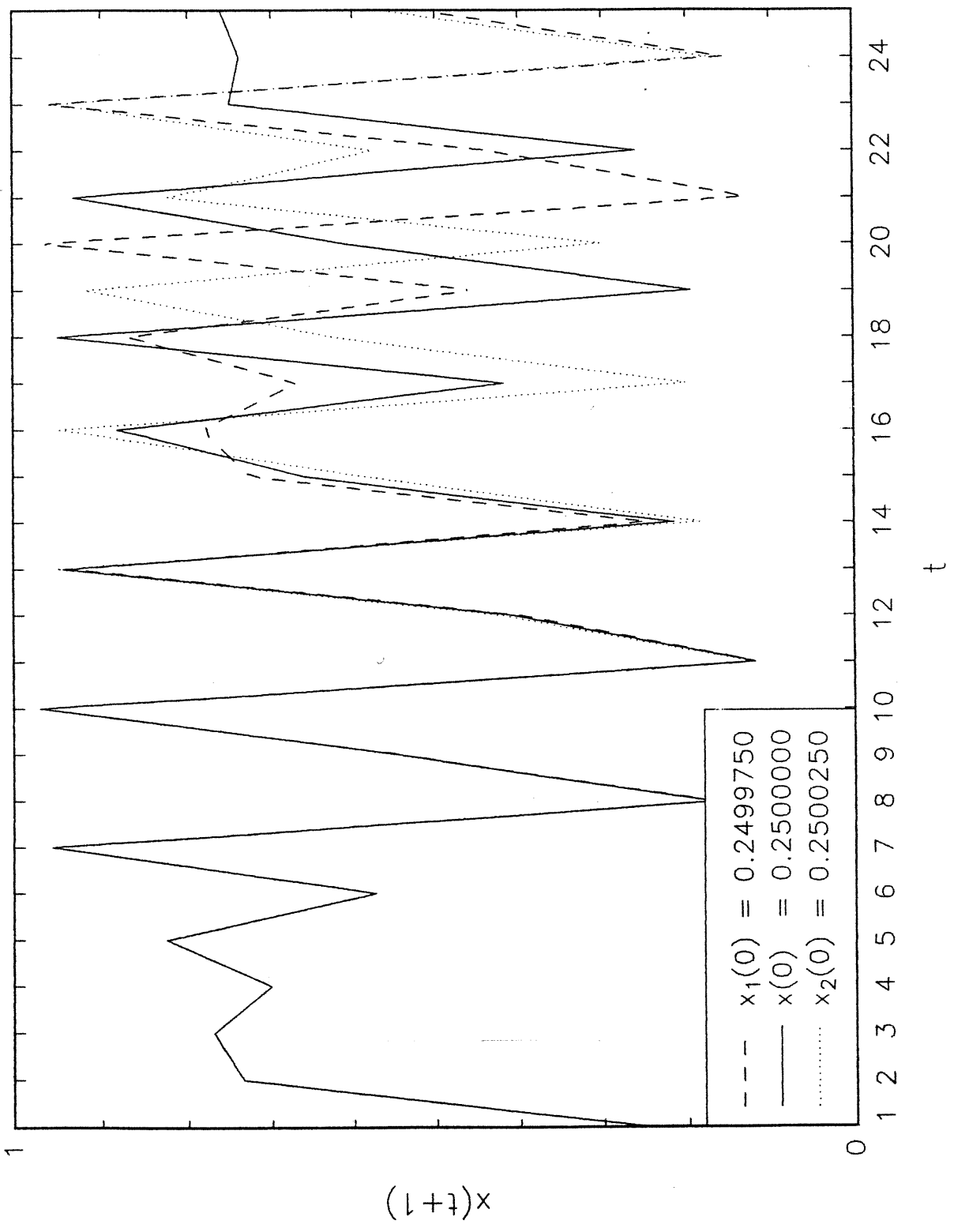
$$\underline{x} = \{x(k), k = 0, 1, \dots, 24 : x(0) = 0.25, x(k+1) = 3.9x(k)[1 - x(k)]\}, \quad (6.2)$$

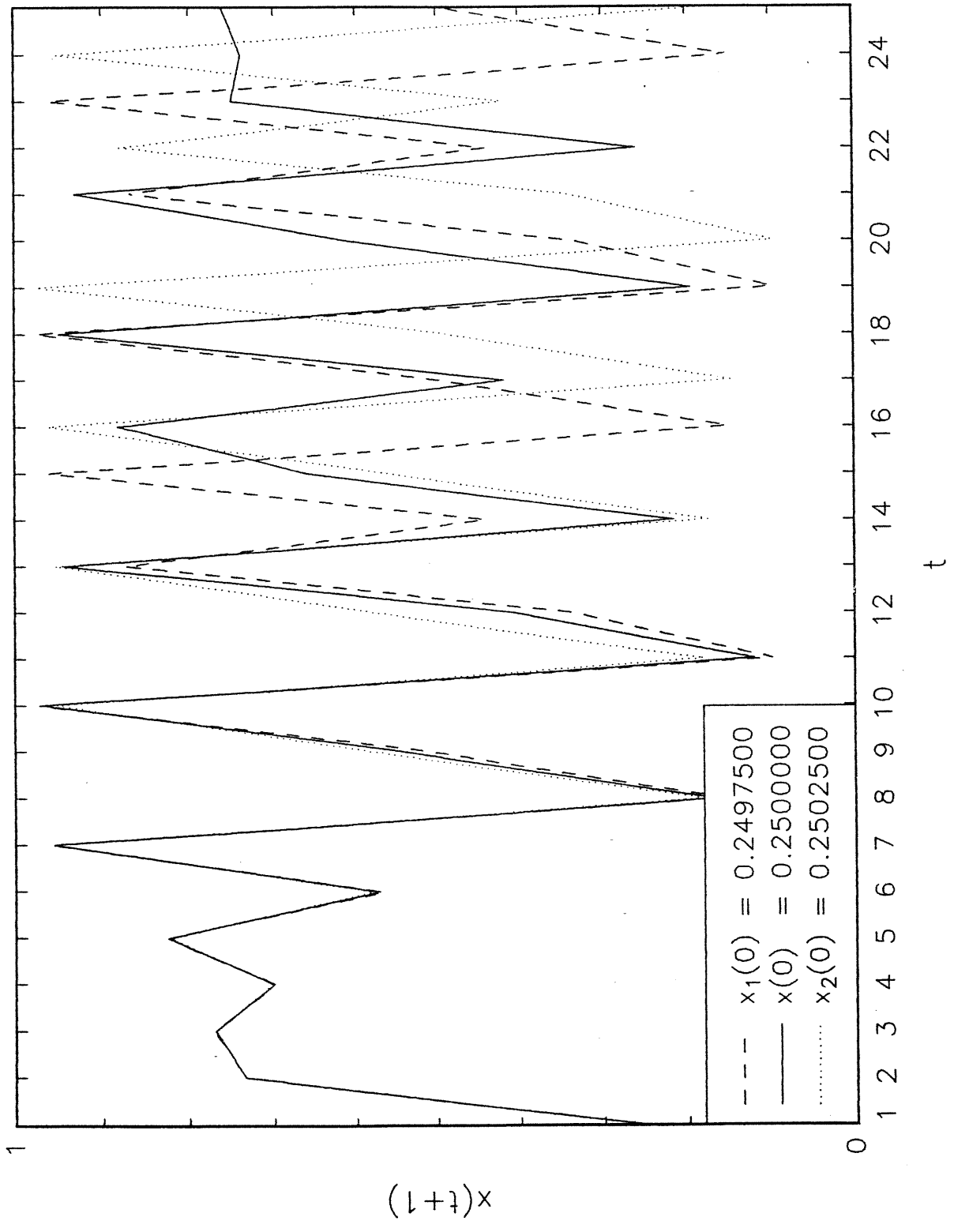
$$\begin{aligned} \underline{x}_i^- = \{x(k), k = 0, 1, \dots, 24 : x_i^-(0) = 0.25(1 - 1E - i), \\ x(k+1) = 3.9x(k)[1 - x(k)]\}, \quad i = 1, 2, \dots, 5, \end{aligned} \quad (6.3)$$

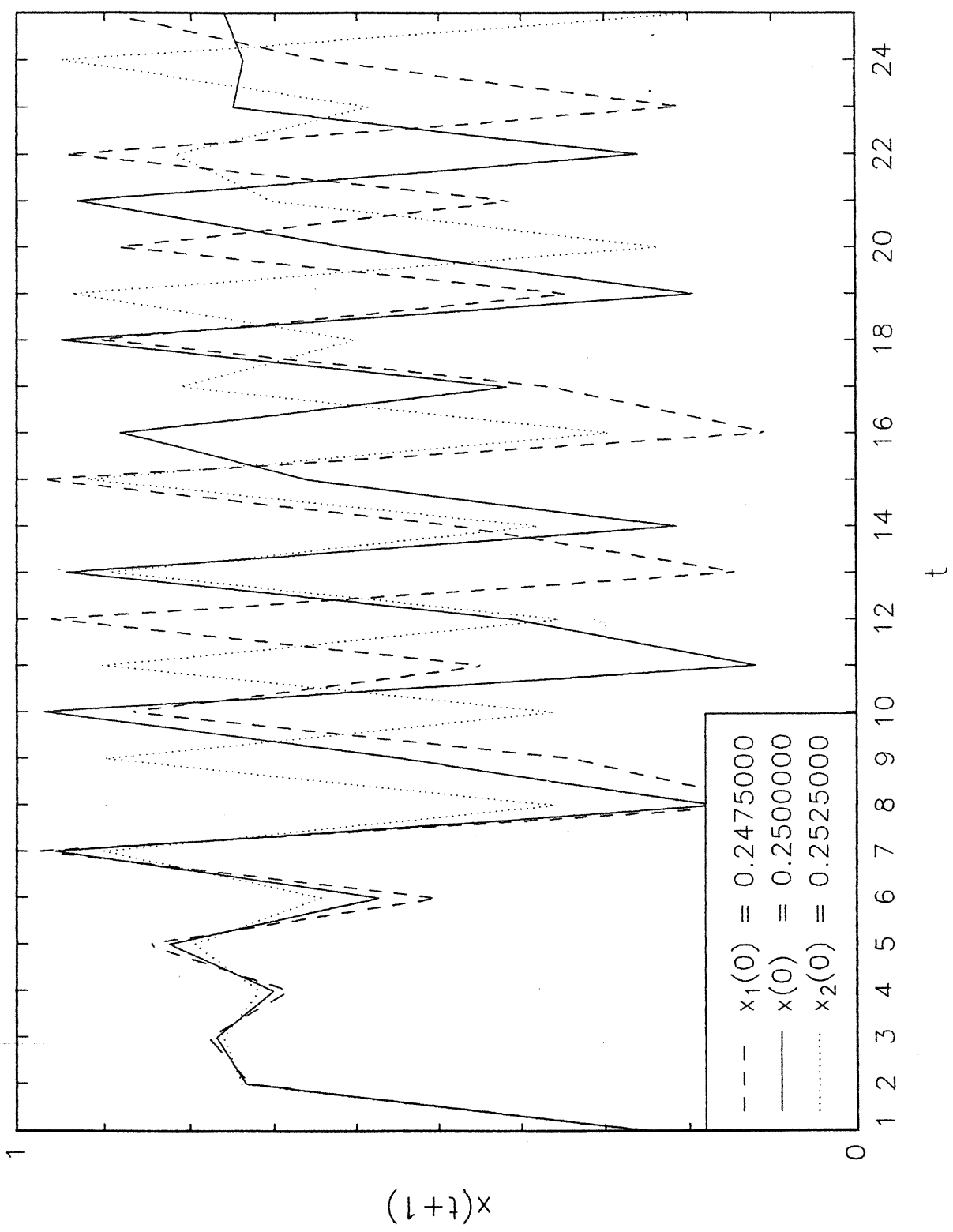
$$\begin{aligned} \underline{x}_i^+ = \{x(k), k = 0, 1, \dots, 24 : x_i^+(0) = 0.25(1 + 1E - i), \\ x(k+1) = 3.9x(k)[1 - x(k)]\}, \quad i = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned} \quad (6.4)$$

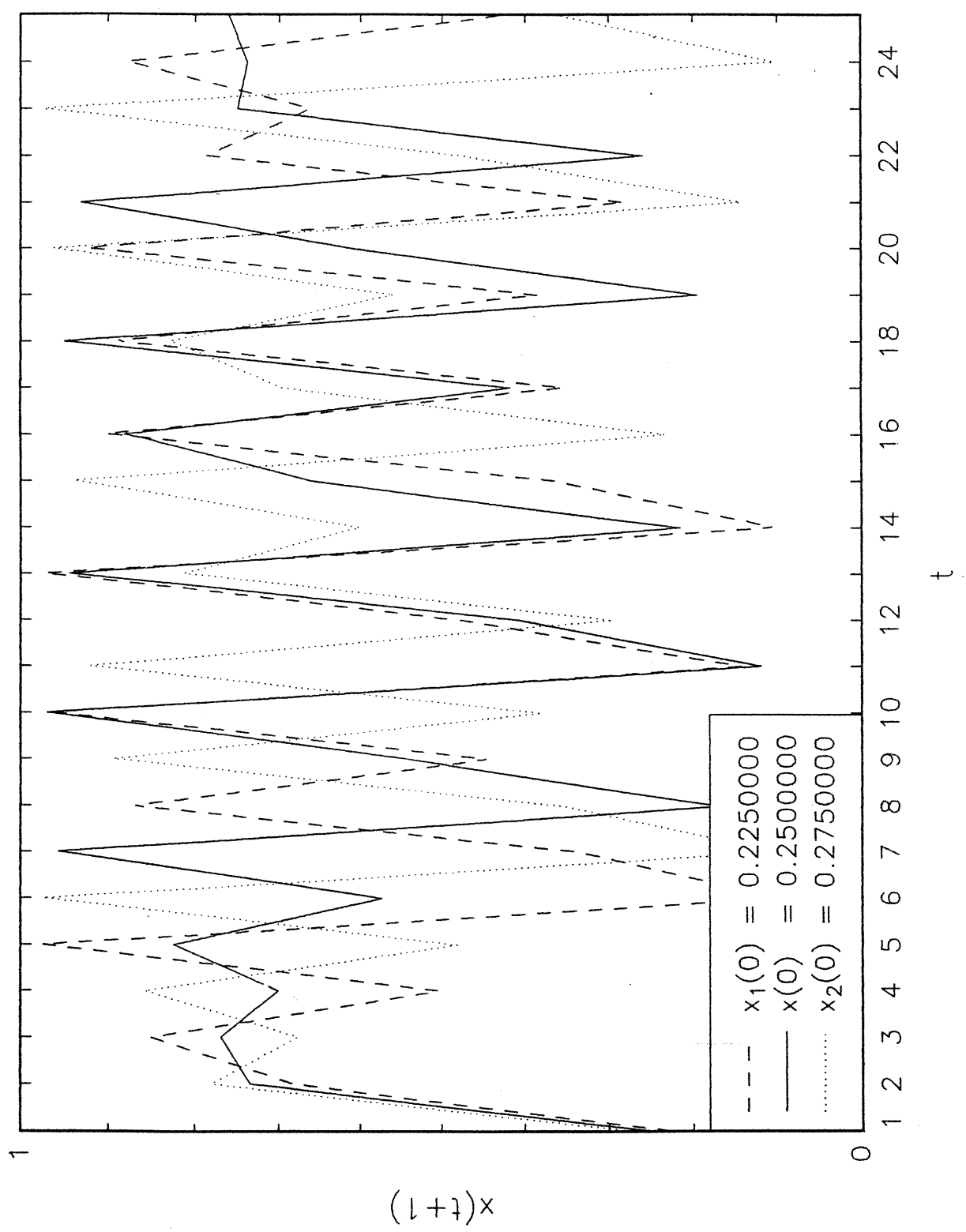
Dai risultati le cui esemplificazioni grafiche sono riportate dalla Figura 1 alla Figura 5 è possibile sia rilevare come lo specificato sistema dinamico deterministico in regime caotico risulti, in generale, predicibile nel breve periodo, che rilevare come, per la relazione (4.6), la predicibilità di tale sistema aumenti al diminuire della differenza tra il valore “vero” e quelli “misurati” della condizione iniziale.













## BIBLIOGRAFIA

- [1] ALLEVI, E., DOLCI, P.V. e ZAMBRUNO, G.M. (1993) Market Efficiency and Chaotic Behaviour, lecture presentata all'*EURO Working Group on Financial Modelling*, 14th Meeting, Mantova.
- [2] AMBROSE, B.W., ANCEL, E.W. e GRIFFITHS, M.D. (1993) Fractal Structure in the Capital Market Revisited, *Financial Analysts Journal*, May-June, 73-77.
- [3] APTECH SYSTEMS, Inc. (1991) *The GAUSS System Version 2.2*. Aptech Systems, Inc., Washington.
- [4] BACHELIER, L. (1900) Theory of Speculation, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, in COOTNER, P. H. (ed.) (1964) *The Random Character of Stock Market Prices*, 17-78, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.
- [5] BADI, R. e POLITI, A. (1985) Statistical Description of Chaotic Attractors: The Dimension Function, *Journal of Statistical Physics*, 40, 5/6, 725-750.
- [6] BARNETT, W. e CHEN, P. (1988) Deterministic Chaos and Fractal Attractors as Tools for Nonparametric Dynamical Econometric Inference: with an Application to the Divisia Monetary Aggregates, *Mathl. Comput. Modelling*, 10, 4, 275-296.
- [7] BARTLETT, M.S. (1990) Chance or Chaos ? (con discussione), *J. R. Statist. Soc. A*, 153, 3, 321-347.
- [8] BENETTIN, G., GALGANI, L. e STRELCYN, J.-M. (1976) Kolmogorov Entropy and Numerical Experiments, *Physical Review A*, in HAO, B.-L. (ed.) (1984) *Chaos*, 411-418, World Scientific Publishing, Singapore.
- [9] BENHABIB, J. e DAY, R.H. (1981) Rational Choice and Erratic Behaviour, *Review of Economic Studies*, XLVIII, 459-471.
- [10] BERGÉ, P., POMEAU, Y. e VIDAL, C. (1986) *Order within Chaos. Towards a Deterministic Approach to Turbulence*. J. Wiley & Sons, New York.
- [11] BOOTH, G.G., KAEN, F.R. e KOVEOS, P.E. (1982) R/S Analysis of Foreign Exchange Rates under Two International Monetary Regimes, *Journal of Monetary Economics*, 10, 407-415.
- [12] BOOTH, G.G., MARTIKAINEN, T., SARKAR, S.S., VIRTANEN, I. e YLI-OLLI, P. (1992) Nonlinear Dependence in Finnish stock Returns, lecture presentata all'*EURO Working Group on Financial Modelling*, 12th Meeting, Helsinki.
- [13] BRASOLIN, A., CORAZZA, M. e NARDELLI, C. (1992) Autosimilarità e Comportamento Non Lineare di un Indice Azionario nel Mercato Italiano, *Atti del XVI Convegno A.M.A.S.E.S.*, Treviso, 155-170.
- [14] BROCK, W.A. (1986) Distinguish Random and Deterministic Systems: Abridged Version, *Journal of Economic Theory*, 40, 168-195.
- [15] BROCK, W.A., HSIEH, D.A. e LeBARON, B. (1991) *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*. The MIT Press, Cambridge.
- [16] BROCK, W.A. e MALLIARIS, A.G. (1989) *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*. North-Holland, Amsterdam.
- [17] BUTLER, A. (1990) A Methodological Approach to Chaos: are Economists Missing the Point?, *Federal Reserve Bank of St. Louis*, 72, 2, 36-48.
- [18] CASALEGGIO, A., CORANA, A. e ROLANDO C. (1993) Metodi di Quantificazione del Caos Deterministico in Serie Temporali e Valutazione dei Parametri, in BELARDINELLI, E. e CERUTTI, S. (eds.) (1993) *Biosistemi e Complessità*, 113-134, Pàtron Editore, Bologna.

- [19] CORAZZA M. (1989/90) *Approccio alle Serie Storiche con Dinamiche Nonlineari Complesse*. Tesi di Laurea, Università degli Studi di Venezia, Venezia.
- [20] CORAZZA, M., MALLIARIS, A.G. e NARDELLI, C. (1997) Searching for Fractal Structure in Agricultural Futures Market, *The J. of Futures Markets*, 17 (4), 434-474.
- [21] CORAZZA, M. e NARDELLI, C. (1993b) Analisi della Struttura Frattale del Mercato Finanziario Italiano, *Rendiconti del Comitato per gli Studi Economici*, XXX/XXXI, 171-186.
- [22] CORAZZA, M. e NARDELLI, C. (1993d) Looking for Fractal Structure in the Italian Capital Market, lecture presentata all' *International Conference on Predictability and Nonlinear Modelling in Natural Sciences and Economics*, Wageningen.
- [23] CRAMER, F. (1994) *Caos e Ordine. La complessa Struttura del Vivente*. Bollati Boringhieri, Torino.
- [24] CRUTCHFIELD, J.P., FARMER, J.D., PACKARD, N.H. e SHAW, R.S. (1987) Il caos, *Le Scienze*, XX, 222, 10-21.
- [25] DeCOSTER, G.P., LABYS, W.C. e MITCHELL, D.W. (1992) Evidence of Chaos in Commodity Futures Prices, *The Journal of Futures Markets*, 12, 3, 291-305.
- [26] DEVANEY, R.L. (1986) *An Introduction to Chaotic Dynamical System*. The Benjamin/Cummings Publishing, Menlo Park.
- [27] DEVANEY, R.L. (1990) *Caos e Frattali. Matematica dei Sistemi Dinamici e Applicazioni al Calcolatore*. Addison-Wesley, Milano.
- [28] ECKMANN, J.-P., OLIFFSON KAMPHORST, S., RUELLE, D. e CILIBERTO, S. (1986) Liapunov Exponents from Time Series, *Physical Review A*, 34, 6, 4971-4979.
- [29] ECKMANN, J.-P. e RUELLE, D. (1985) Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors, *Review of Modern Physics*, 57, 3, I, 617-655.
- [30] FALCONER, K. (1990) *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, Chichester.
- [31] FRANK, M. e STENGOS, T. (1988) Chaotic Dynamics in Economics Time-Series, *Journal of Economic Surveys*, 2, 2, 103-133.
- [32] GLASNERT, E. e WEISS, B. (1993) Sensitive Dependence on Initial Conditions, *Nonlinearity*, 6, 1067-1075.
- [33] GORI, F. e RINALDI, F. (1989) Comportamenti Caotici e Biforcazioni in un Modello Dinamico Discreto del Mercato Azionario, *Quaderno del Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica dell'Università degli Studi di Venezia*, 1-46.
- [34] GRASSBERGER, P. e PROCACCIA, I. (1983a) Measuring the Strangeness of Strange Attractors, *Physica 9D*, 189-208.
- [35] GRASSBERGER, P. e PROCACCIA, I. (1983b) Estimation of the Kolmogorov Entropy from a Chaotic Signal, *Physical Review A*, 28, 2591-2593.
- [36] HINICH, M.J. e PATTERSON, D.M. (1989) Evidence of Nonlinearity in the Trade-by-Trade Stock Market Return generating Process, in BARNETT, W.A., GEWEKE, J. e SHELL, K. (eds.) (1989) *Economic Complexity. Chaos, Sunspots, Bubbles, and Nonlinearity*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [37] HSIEH, D.A. (1991) Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets *The Journal of Finance*, XLVI, 5, 1839-1877.
- [38] LAMBERT, K. e BRITTAN, G.G. jr. (1981) *Introduzione alla Filosofia della Scienza*. Editore Boringhieri, Torino.
- [39] LASOTA, A. e MACKEY, M.C. (1985) *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*. Cambridge University Press, Cambridge.

- [40] LI, T.-Y. e YORKE, J.A. (1975) Period Three implies Chaos, *American Mathematical Monthly*, in HAO, B.-L. (ed.) (1984) *Chaos*, 244-251, World Scientific Publishing, Singapore.
- [41] LORENZ, H.W. (1989) *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Springer-Verlag, Berlin.
- [42] MACHONES, M., MASE, S., PLUNKETT, S. e THRASH, R. (1994) Price Prediction Using Nonlinear Techniques, *The Magazine of Artificial Intelligence in Finance*, Fall, 51-56.
- [43] MAINIERI, R. (1993) On the Equality of Hausdorff and Box Counting Dimension, *Chaos*, 3, 2, 119-125.
- [44] MALLIARIS, A.G. e PHILIPPATOS, G. (1992) Random Walk vs. Chaotic Dynamics in Financial Economics, comunicazione personale.
- [45] MANDELBROT, B.B. (1987) *Gli Oggetti Frattali. Forma, Caso e Dimensione*. Casa editrice Einaudi, Torino.
- [46] MANDELBROT, B.B. (1990) *La Geometria della Natura*. Edizioni Theoria s.r.l., Roma-Napoli.
- [47] MAY, R.M. (1976) Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics, *Nature*, in HAO, B.-L. (ed.) (1984) *Chaos*, 149-157, World Scientific Publishing, Singapore
- [48] MAY, R.M. e OSTER, G.F. (1976) Bifurcations and Dynamic Complexity in Simple Ecological Models, *The American Naturalist*, 110, 974, 573-599.
- [49] MEDIO, A. (1992) *Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [50] MEDIO, A., LINES, M. e DUFOUR, A. (1993) Chaos Theory and Prediction with Applications to Economics, lecture presentata all' *International Conference on Predictability and Nonlinear Modelling in Natural Sciences and Economics*, Wageningen.
- [51] NICOLIS, G. e PRIGOGINE, I. (1991) *La complessità*. Giulio Einaudi Editore, Torino.
- [52] ORNSTEIN, D.S. e WEISS, B. (1991) Statistical Properties of Chaotic Systems, *American Mathematical Society*, 24, 1, 11-116.
- [53] PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H. e SAUPE, D. (1992) *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, New York.
- [54] PETERS, E.E. (1989) Fractal Structure in the Capital Markets, *Financial Analysts Journal*, July-August, 32-37.
- [55] PETERS, E.E. (1991a) A Chaotic Attractor for the S&P 500, *Financial Analysts Journal*, March-April, 55-62 e 81.
- [56] PETERS, E.E. (1991b) *Chaos and Order in the Capital Market*. J. Wiley, New-York.
- [57] PETERS, E.E. (1994) *Fractal Market Analysis*. J. Wiley, New-York.
- [58] PRIGOGINE, I. e STENGERS, I. (1985) *Order out of Chaos. Man's new Dialogue with Nature*. Flamingo, Glasgow.
- [59] RINALDI, S. (1974) *Teoria dei Sistemi*. Ulrico Hoepli, Casa Editrice Libreria S.p.A., Milano.
- [60] RINALDI, S. (1993a) Comportamento Asintotico dei Sistemi Dinamici, in BELARDINELLI, E. e CERUTTI, S. (eds.) (1993) *Biosistemi e Complessità*, 15-26, Pàtron Editore, Bologna.
- [61] RINALDI, S. (1993b) Stabilità Strutturale e Biforcazioni, in BELARDINELLI, E. e CERUTTI, S. (eds.) (1993) *Biosistemi e Complessità*, 27-46, Pàtron Editore, Bologna.
- [62] RINALDI, S. (1993b) Il Caos Deterministico, in BELARDINELLI, E. e CERUTTI, S. (eds.) (1993) *Biosistemi e Complessità*, 47-64, Pàtron Editore, Bologna.

- [63] RUELLE, D. (1979) Strange Attractors, *Mathematical Intelligencer*, 2, 126-137.
- [64] SCHEINKMAN, J.A. e LeBARON, B. (1989) Nonlinear Dynamics and Stock Returns, *The Journal of Business*, 62, 3, 311-337.
- [65] SHAW, R. (1984) *The Dripping Faucet as a Model Chaotic System*. Aerial Press, Inc., Santa Cruz.
- [66] SMITH, R.L. (1992) Optimal Estimation of Fractal Dimension CASDAGLI, M. e EUBANK, S. (eds.) (1989) *Nonlinear Modelling and Forecasting. SFI Studies in the Sciences of Complexity*. Addison-Wesley, Ney York.
- [67] SMITH, R.L. (1992) Estimating Dimension in Noisy Chaotic Time Series, *J. R. Statist. Soc. B.*, 54, 2, 329-351.
- [68] TAKENS, F. (1981) Detecting Strange Attractors in Turbolence, in RAND, D. e YOUNG, L. (eds.) (1981) *Dynamical Systems in Turbolence*. Springer-Verlag, Berlin.
- [69] THEILER, J. (1988) Lacunarity in a Best Estimator of Fractal Dimension *Physics Letters A*, 133, 4/5, 195-200.
- [70] THOM, R. (1985) *Modelli Matematici della Morfogenesi*. Giulio Einaudi Editore, Torino.
- [71] WHITLEY, D. (1983) Discrete Dynamical Systems in Dimensions One and Two, *Bull. London Math. Soc.*, 15, 177-217.
- [72] WOLF, A., SWIFT, J.B., SWINNEY, H.L. e VASTANO, J.A. (1985) Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, *Physica 16D*, 285-317.