

UNA PROPOSTA DI APPROCCIO MULTICRITERIALE ALLA SELEZIONE DI PORTAFOGLIO

Marco Corazza (corazza@unive.it)

Dipartimento di Matematica Applicata – Università Ca' Foscari di Venezia

Irene Favaretto (irene.favaretto@libero.it)

Sintesi – In questo lavoro si affronta il problema della Selezione di Portafoglio mediante l'approccio multicriteriale **MULTicriteria RAnking MEthod (MURAME)**. Lo scopo è quello di proporre uno strumento utile per la scelta del portafoglio "ottimo" utilizzando contemporaneamente quanti criteri di valutazione si reputi opportuno. In generale, con questo approccio si giunge a produrre un ordinamento totale dei portafogli presi in considerazione secondo i criteri adottati, assicurando così al decisore un valido strumento di supporto alle decisioni.

Parole chiave – Approcci multicriteriali, **MULTicriteria RAnking MEthod (MURAME)**, Selezione di Portafoglio, Markowitz, skewness, kurtosis, mercato azionario italiano, MIB30.

1 INTRODUZIONE

Con questo lavoro ci si propone di affrontare il problema della Selezione di Portafoglio con un approccio multicriteriale. Lo scopo è quello di riuscire a proporre uno strumento utile per poter effettuare la scelta del portafoglio "ottimo" utilizzando contemporaneamente più criteri di valutazione. In generale, con questo approccio si giunge a produrre un ordinamento totale dei portafogli presi in considerazione secondo i criteri adottati: si ottiene così uno strumento di grande aiuto al decisore nella fase di scelta.

Il lavoro è strutturato come segue: nella sezione 2 viene esposto brevemente il problema della Selezione del Portafoglio; nella sezione 3 si presentano delle osservazioni sull'uso dei momenti di ordine superiore al secondo nella Selezione di Portafoglio; nella sezione 4 si accenna all'utilità dei metodi multicriterio; in particolare, nella sezione 5 verrà esaminato uno specifico metodo che permette di ottenere un ordinamento dei portafogli in maniera multicriteriale. Infine, nella sezione 6 viene presentata un'applicazione di tale metodo al mercato finanziario italiano. Seguono osservazioni e conclusioni finali.

2 LA SELEZIONE DEL PORTAFOGLIO: ASPETTI TEORICI

La Selezione di Portafoglio è un argomento che viene considerato di frequente. È per questo motivo che in questo lavoro ci si limita ad un breve accenno, utile ad introdurre il tema affrontato ed a specificare la notazione che di seguito verrà usata.

La Teoria del Portafoglio costituisce un importante strumento finanziario. Il portafoglio è definito come l'insieme delle attività detenute da un individuo ad una certa data. Con l'espressione "Selezione di Portafoglio" si intende porre attenzione sul problema della ripartizione di un capitale tra più investimenti a reddito aleatorio: tipicamente, anche se non necessariamente, si tratta di titoli azionari.

Il primo a trattare il problema della Selezione di Portafoglio fu Markowitz, prima nell'articolo "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, 1952 e successivamente nel libro "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments", Wiley, New York, 1959. Negli anni successivi è stato poi più volte ripreso da vari studiosi. Uno degli obiettivi principali della Teoria del Portafoglio è di spiegare i vantaggi che l'investitore consegue nel diversificare il suo rischio e quindi perché sia più conveniente detenere più titoli anziché concentrare tutta la ricchezza nel titolo che, ad una certa data, offre il rendimento più elevato. A tal riguardo, Markowitz nelle sue pubblicazioni mette in evidenza che la varianza della media dei rendimenti dei titoli decresce all'aumentare del numero n dei titoli. Perciò egli sostiene l'importanza della diversificazione del portafoglio, in modo da diminuire il rischio.

Si consideri un insieme di n titoli candidati alla scelta. Indichiamo con x_s , $s = 1, 2, \dots, n$, la quota di capitale da investire nel titolo s -esimo. Tali quote rappresentano le variabili del problema, cioè le quantità da determinare nella maniera ottima. Esse dovranno rispettare il vincolo:

$$\sum_{s=1}^n x_s = 1,$$

cioè esaurire l'intero capitale da impiegare¹.

La prima assunzione cruciale che qui si considera è che tutte le caratteristiche di un titolo possano essere ricondotte a due soli parametri: il suo rendimento medio e la variabilità intorno ad esso.

Indichiamo con $R_{i,t}$ il tasso di rendimento previsto in t dell' i -esimo titolo nell'intervallo temporale $(t, t+1)$ (che può essere l'anno, il mese, la decade, la settimana, il giorno, l'ora, il minuto) come:

$$R_{i,t} = \frac{P_{i,t+1} - P_{i,t} + D_{i,t+1}}{P_{i,t}}$$

dove

$P_{i,t}$: prezzo (quotazione) dell' i -esimo titolo all'istante t ;

$D_{i,t+1}$: dividendo e premi eventuali previsti all'istante $t+1$ (nel seguito, per semplificare l'analisi non verranno considerati premi e dividendi)².

Nel seguito, data una variabile casuale rendimento, con la notazione $E(R_i) = \bar{R}_i$ si indica il rendimento atteso dell' i -esimo titolo, con $i = 1, 2, \dots, N$, e con la notazione $\text{Var}(R_i) = E(R_i - \bar{R}_i)^2 = \sigma_i^2$ si indica la varianza del rendimento atteso dell' i -esimo titolo.

¹ Da un punto di vista operativo si dovrà anche avere

$$x_s \geq 0, \quad \forall s = 1, 2, \dots, n.$$

Ciò significa dire che o si investe in una quota non negativa, o non si investe.

² A tal riguardo, si fa presente che il rendimento del titolo dovrebbe essere corretto nel caso di variazioni del capitale sociale e nel caso in cui dividendi o premi fossero corrisposti in momenti diversi dall'istante finale.

lo, sempre con $i = 1, 2, \dots, N$. Qualitativamente, il momento primo della distribuzione misura il rendimento, ed il momento secondo misura il rischio relativo.

Il rendimento di un portafoglio è la media ponderata dei rendimenti delle attività che compongono il portafoglio stesso. Cioè:

$$R_p = \sum_i x_i R_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dove:

R_i = rendimento del portafoglio;

R_i = rendimento dell'attività i -esima;

x_i = peso dell'attività i -esima nel portafoglio totale.

Il rendimento atteso di un portafoglio, che indichiamo con $E(R_p)$, è la media ponderata dei rendimenti attesi dei singoli titoli:

$$E(R_p) = E\left(\sum_i x_i R_i\right) = \sum_i E(x_i R_i);$$

poiché abbiamo definito \bar{R}_i come il valore atteso per l'attività i -esima, abbiamo che

$$E(R_p) = \sum_i x_i \bar{R}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

A sua volta, la varianza di portafoglio, $\text{Var}(R_p)$ è data da:

$$\text{Var}(R_p) = E\left[R_p - E(R_p)\right]^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i x_k \text{Cov}(R_i, R_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{Var}(R_i) + 2 \sum_{i < k} x_i x_k \text{Cov}(R_i, R_k)$$

$$\text{poichè } \text{Cov}(R_i, R_i) = \text{Var}(R_i)$$

Considerando gli elementi finora esposti, l'obiettivo di un investitore si può così riassumere: costruire un portafoglio che abbia un rendimento di valor medio "abbastanza elevato" e di rischio "abbastanza basso" (sebbene come "misura del rischio del portafoglio" qui si consideri la varianza, si fa presente che lo stesso Markowitz, ed altri dopo di lui, hanno espresso la convinzione che l'uso della varianza per questo fine non fosse così appropriato³).

3 ALCUNE CONSIDERAZIONI SULL'USO DEI MOMENTI DI ORDINE SUPERIORE AL SECONDO

Fin qui è stato considerato l'approccio classico "alla Markowitz". Una delle critiche che viene fatta a questo metodo è di non tenere in considerazione i momenti di ordine superiore al secondo della distribuzione di probabilità dei rendimenti, che in alcuni casi potrebbero contenere informazioni di un qualche interesse per l'investitore⁴. Inoltre, molti

³ Per maggiori dettagli si veda Canestrelli E. e Nardelli C., "Criteri per la selezione del portafoglio", Giappichelli (1998).

⁴ Per maggiori dettagli si veda Canestrelli E. e Nardelli C., *Criteri per la Selezione del Portafoglio*, Giappichelli.

recenti lavori⁵ hanno mostrato l'importanza di includere i momenti di ordine superiore al secondo nella selezione di portafoglio⁶.

Come si diceva, è utile considerare i momenti di ordine superiore alla varianza poiché la distribuzione dei rendimenti potrebbe coincidere con la rappresentazione standard di Gauss, ovvero con una opportuna "curva a campana" che prevede che i valori siano disposti simmetricamente attorno a una media e presentino una dispersione minima. Infatti, a volte si osservano:

- asimmetrie nella distribuzione (skewness): fasi di rialzo più rapide o più lunghe o più ampie che non quelle di ribasso, e viceversa;
- code della distribuzione piuttosto pronunciate (fat tails): le variazioni di prezzo si allontanano dal valore medio più di quanto considerato "normale" secondo la distribuzione campanulare standard.

In questo lavoro verranno prese in considerazione la skewness e la kurtosis (in italiano *curtosi*) dei rendimenti, e verranno poi considerate la skewness e la kurtosis di portafoglio.

Skewness

In generale, l'indice di skewness è definito come:

$$s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^3$$

dove:

n è il numero di osservazioni valide;

σ è la deviazione standard.

Esso misura il coefficiente di asimmetria di una distribuzione di valori intorno alla propria media. È una grandezza adimensionale e può assumere valori sia positivi che negativi. Una skewness positiva indica l'orientamento verso i valori positivi (parte destra), mentre una skewness negativa verso i valori negativi (parte sinistra). Quindi, se è positiva denota una coda più "importante" verso destra, se è negativa denota invece una coda più "importante" verso sinistra.

Se la distribuzione è simmetrica, allora la skewness è nulla, ma l'inverso non è vero (la massima asimmetria è quella presentata dalla distribuzione Normale in cui moda, media e mediana coincidono). Per trasformazioni affini la skewness non cambia; la skewness è perciò invariante sia per la traslazione che per i cambiamenti di scala.

In generale, la skewness si misura mediante il terzo momento centrale diviso per il cubo della deviazione standard; in questo lavoro consideriamo la skewness come il terzo momento centrale non normalizzato⁷.

Per calcolare la skewness di un portafoglio, abbiamo bisogno di conoscere non solo le skewness dei singoli titoli, ma anche le relative co-skewness(es). In particolare, la co-skewness può essere calcolata come:

⁵ Ad esempio, si veda Chunhachindam, Dandapani, Hamid e Prakash (1987), Prakash, Chang e Pactwa (2003), Sun e Yan (2003).

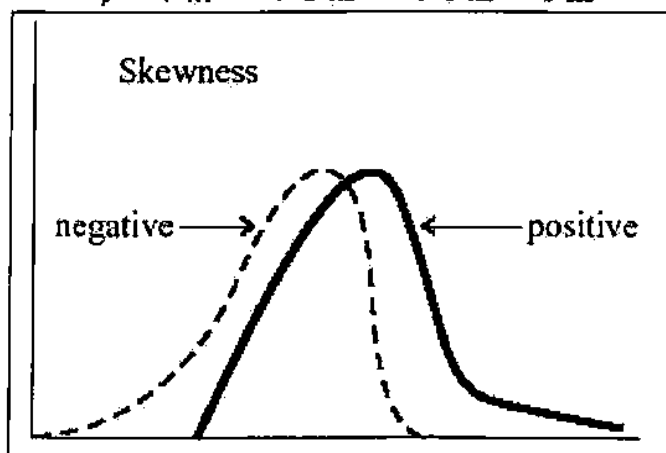
⁶ Per maggiori dettagli si veda Lucey B.M. e Tully E., *Portfolio Formation, Skewness & the Role of Gold*, School of Business Studies, University of Dublin, Trinity College Dublin (2003).

⁷ Per maggiori dettagli si veda Ingersoll J.R. Jr. "Theory of financial decision making", Studies in Financial Economics (1987).

$$s_{ijk} = E[(R_i - E(R_i)) \cdot (R_k - E(R_k)) \cdot (R_k - E(R_k))],$$

Per cui risulta che la skewness di un portafoglio sarà:

$$s_p = x_1^3 s_{111} + 3x_1^2 x_2 s_{112} + 3x_1 x_2^2 s_{122} + x_2^3 s_{222}.$$



In ambito finanziario, trovare una skewness negativa significa che c'è una significativa probabilità di un profitto negativo; invece, una skewness positiva significa che c'è una probabilità maggiore della normale che si verifichi un profitto positivo.

Kurtosis

La kurtosis caratterizza la concentrazione dei valori della distribuzione intorno alla media (peakedness), o la loro dispersione (flatness), in comparazione ad una distribuzione normale. In generale, la Kurtosis è definita come:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^4$$

dove:

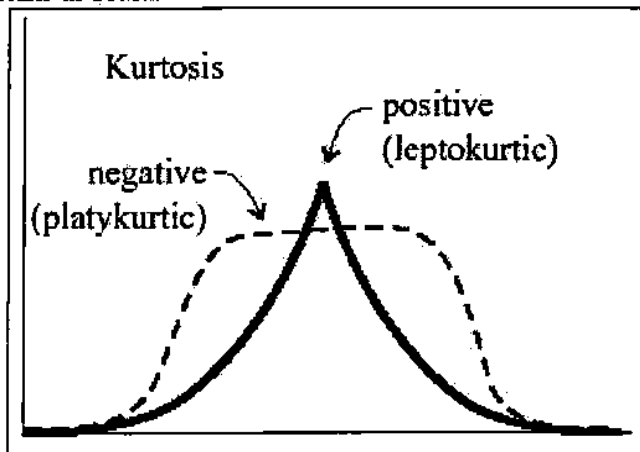
n è il numero di osservazioni valide;

σ è la deviazione standard.

La kurtosis non è altro che il momento quarto rispetto alla media, diviso la deviazione standard elevata alla quarta. La media alla quarta potenza dà molto più peso a deviazioni grandi della varianza. Quindi, qualitativamente, se il valore della kurtosis è "grande" significa che si concentrano molti valori in un intorno della media avente raggio uguale alla deviazione standard, e code molto distanti dalla media. Quindi, la kurtosis misura la concentrazione o dispersione dei dati attorno ad un valore centrale: il valore 0 è tipico di una distribuzione *mesocurtica* come la Normale. Per valori minori di 3 la distribuzione è detta *platocurtica* (o iponormale) e presenta una forma appiattita rispetto alla curva gaussiana, con valori maggiormente concentrati nelle code. Invece, per valori della kurtosis maggiore di 3 la distribuzione si dice *leptocurtica* (o ipernormale): ne risulta una curva più appuntita rispetto alla Normale, con un picco accentuato dato dalla concentrazione dei dati intorno ad un valore massimo.

La kurtosis misura quindi l'appiattimento della distribuzione delle frequenze poiché assegna un peso elevato agli scarti elevati (si noti come il valore della kurtosis non dipende dalla larghezza della "campana").

La kurtosis è un grandezza adimensionale non negativa, e per trasformazioni affini non cambia. Quindi la kurtosis, come la skewness, è invariante sia per la traslazione che per i cambiamenti di scala.



Analogamente alla skewness, la kurtosis di portafoglio si calcola considerando, oltre alla kurtosis della distribuzione dei rendimenti di ogni titoli preso singolarmente, anche quella che qui chiamiamo co-kurtosis⁸. Risulta perciò:

$$k_p = x_1^4 k_{1111} + 4x_1^3 x_2 k_{1112} + 6x_1^2 x_1^2 k_{1122} + 4x_1 x_2^3 k_{1222} + x_2^4 k_{2222}$$

dove

k_{ijkl} sono le co-kurtosis.

Per co-kurtosis tra i rendimenti dei titoli i, j, k, l si intende:

$$k_{ijkl} = E[(R_i - E(R_i)) \cdot (R_j - E(R_j)) \cdot (R_k - E(R_k)) \cdot (R_l - E(R_l))].$$

Sono stati condotti più studi che includono soprattutto la skewness per la Selezione del Portafoglio, molti dei quali strutturati sulla base del modello classico di Markowitz; a tal riguardo si cita, ad esempio, il lavoro di Ingersoll (1987)⁹.

In questo lavoro verranno utilizzati il concetto di skewness e di kurtosis, ma utilizzando un diverso tipo di approccio. Infatti, si utilizzerà infatti un metodo multicriteriale per la Selezione del Portafoglio, con la precisazione che saranno preferiti i portafogli con media e skewness più elevate, mentre varianza e kurtosis dovranno essere le più basse possibili. Questo perché, in generale, gli investitori preferiscono alti valori per i momenti di ordine dispari e bassi valori per momenti di ordine pari¹⁰.

4 L'UTILITÀ DEI METODI MULTICRITERIO

Le tecniche multicriterio prendono in considerazione il fatto che, nella maggior parte dei casi, il decisore non ha un unico obiettivo da perseguire, ma più di uno contempora-

⁸ In analogia al termine *covarianza* e *co-skewness*.

⁹ Ingersoll J.E. Jr. "Theory of financial decision making", Studies in Financial Economics (1987).

¹⁰ Per maggiori dettagli si veda de Athayde G.M E Flores R.G. Jr., *Finding a Maximum Skewness Portfolio: a General Solution to Three-moments Portfolio Choice* (2001), e Lucey B.M. e Tully E., "Portfolio Formation, Skewness & the Role of Gold", School of Business Studies, University of Dublin, Trinity College (2003).

neamente e, spesso, in situazione di conflitto di un obiettivo nei riguardi di altri (ad esempio si veda la tabella che segue): può succedere, ad esempio, che nel soddisfare uno specifico criterio di valutazione per la scelta, si corra il rischio di penalizzarne un altro. In generale quindi, si può dire che non esiste un'alternativa che sia migliore di tutte le altre in relazione a tutti i criteri considerati; per tale motivo il concetto di "scelta ottimale" non ha particolarmente senso nell'analisi multicriteri.

Bisogna comunque dire che tale aspetto, che appare come punto di forza nell'analisi multicriteri, rappresenta nel contempo un suo punto di debolezza: prendere in considerazione molti criteri differenti è certamente più vantaggioso dal punto di vista operativo, ma comporta notevoli difficoltà per quanto riguarda la formalizzazione.

Nell'ambito del processo decisionale in presenza di più criteri, ovvero *Multiple Criteria Decision Making (MCDM)*, possiamo distinguere tra:

- problemi **Multiattributo** (MultiAttribute Decision Making, **MADM**), quando le alternative (decisioni, politiche, ...) tra cui scegliere sono in numero finito;
- problemi **Multiobiettivo** (MultiObjective Decision Making, **MODM**), in caso contrario.

Un problema di decisione multiattributo viene formulato per mezzo di una matrice di decisione D , di dimensioni $(m \times n)$, il cui generico elemento x_{ij} indica la valutazione o il valore dell'alternativa i -esima rispetto all'attributo j -esimo.

In letteratura sono presenti più tipi di tecniche multicriteriali per affrontare problemi di tipo decisionale. In questo lavoro approfondiamo un metodo multiattributo di recente utilizzazione.

Attributi

	A_1	...	A_j	...	A_n
d_1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}
...
d_i	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}
...
d_m	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

Decisioni
(o alternative)

5 IL MODELLO PROPOSTO: MURAME (MULTICRITERIA RANKING METHOD)

Si introduce ora il metodo MURAME, uno strumento recente usato nell'analisi multicriteriale. Questo metodo costituisce un'interessante metodologia di analisi decisionale.

Per quanto nella letteratura finanziaria sia stato scarsamente utilizzato¹¹, nel presente lavoro si è formalizzato un problema multicriterio ai fini della Selezione di Porta-

¹¹ Ciò è dovuto al fatto che si tratta di un approccio di recente introduzione (2001). La sua applicazione ha avuto successo per l'avvio di un progetto industriale in Armenia (si veda al riguardo Goletsis Y. e Psarras,

foglio. L'approccio proposto appare un'interessante alternativa alla metodologia tradizionale con cui si affrontano i problemi di Selezione del Portafoglio.

Si considerino un insieme di m proposte alternative:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m\};$$

le alternative sono rappresentate dai portafogli presi in esame. Si assuma inoltre che esista una famiglia F di n criteri con cui poter valutare le alternative:

$$F = \{C_1, C_2, \dots, C_j, \dots, C_n\}.$$

I criteri potrebbero essere, se ad esempio consideriamo il caso del modello di Markowitz, la media e la varianza dei rendimenti dei portafogli considerati. In questo lavoro vengono considerati, oltre a media e varianza, anche la skewness e la kurtosis. Più in generale, i criteri da utilizzare possono essere sia quantitativi che qualitativi.

Si ipotizza che i criteri possano avere diversa importanza gli uni rispetto agli altri: un soggetto particolarmente avverso al rischio potrebbe, ad esempio, porre più attenzione al rischio che alla redditività media, e quindi assegnare alla varianza un peso maggiore rispetto a quello assegnato alla media. Per questo motivo viene introdotto il vettore dei pesi¹² $W = \{w_1, w_2, \dots, w_j, \dots, w_n\}$ che fornisce l'importanza relativa di ogni

criterio in modo tale che si abbia $\sum_{j=1}^n w_j = 1$.¹³

MURAME, il metodo proposto, è basato sulla costruzione di una relazione di superiorità, la cosiddetta *outranking relation*: il confronto tra coppie di alternative avrà come risultato quello di mettere in luce la superiorità di un'alternativa rispetto ad un'altra.

MURAME si articola in due fasi principali, combinando in questo modo due tra i metodi di "superiorità" più conosciuti, noti come ELECTRE III – si veda Roy (1978, 1990)¹⁴ – e PROMETHEE¹⁵ – si veda Brans e Vincke (1986) –.

Il primo passo nella procedura del modello consiste nel costruire la *matrice di valutazione* (o matrice di decisione): si tratta di una matrice, G , contenente il punteggio g_{ij} che ogni alternativa i consegue per ogni criterio j .

Poiché i confronti tra le alternative vengono fatti separatamente per ciascun criterio, non c'è bisogno di una unità di misura comune per tutti i criteri. Ogni criterio quantitativo è valutato nella propria unità di misura, mentre per eventuali criteri qualitativi deve essere usata una scala costruita in base al problema.

J. (2001), "Multicriteria Project Ranking in the Armenian Energy Sector", 53rd Meeting of the European Working Group on 'Multicriteria Aid for Decision', Athens).

¹² È stato sviluppato un numero di metodi particolari per la definizione dei pesi. Per un approfondimento si veda Hwang C. e Yoon K., "Multiple Attribute Decision Making, Methods and Applications", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol.186, Springer-Verlag, Berlin, 1981. Si pone in evidenza che, di regola, il metodo seguito dovrebbe essere relativamente semplice e facilmente comprensibile dal decision maker, cioè da colui cioè prende le decisioni.

¹³ In generale, la somma dei pesi non deve risultare 1. In molti studi, però, lo si richiede esplicitamente. Anche in questo lavoro, per semplicità, viene assunta questa ipotesi.

¹⁴ Roy B., "ELECTRE III: Un Algorithme de Classements Fonde sur une Representation floue des Preferences en Presence de Criteres Multicriteres", Cahiers de CERO (1978); Roy B., "The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods", in Bana e Costa, C., (eds.), Readings in Multiple Criteria Decision Aid, Springer-Verlag, Berlin (1990).

¹⁵ Brans J.P., Vincke P. e Mareschal B., "How to Select and how to Rank Projects: The PROMETHEE Method", European Journal of Operational Research, 24(2), 228-238, (1986).

Tabella 1: Matrice di valutazione
Criteri

		C_1	...	C_j	...	C_n
Alternative	a_1	g_{11}	...	g_{1j}	...	g_{1n}

	a_i	g_{i1}	...	g_{ij}	...	g_{in}

	a_m	g_{m1}	...	g_{mj}	...	g_{mn}

In generale, nei modelli di preferenza tradizionali, considerando uno stesso criterio j , si assumono le seguenti due relazioni che valgono per due alternative $(a_i, a_k) \in A$:

$$a_i P a_k \text{ (} a_i \text{ è preferito ad } a_k) \Leftrightarrow g(a_i) > g(a_k)^{16}$$

$$a_i I a_k \text{ (} a_i \text{ è indifferente a } a_k) \Leftrightarrow g(a_i) = g(a_k).$$

Però può succedere che la preferenza non sia così netta e facile da individuare nelle situazioni nelle quali un decisore effettivamente può venire a trovarsi quando ha a che fare con dei confronti reali. Per fare un semplice esempio, dovendo scegliere tra due tazze di tè che differiscono tra di loro per pochi mg. di zucchero, il soggetto che deve operare una scelta potrebbe trovarsi in difficoltà, essendo poco probabile che egli riesca a distinguere la differenza.

MURAME introduce invece una *soglia di indifferenza*, q_j , e le relazioni di preferenza, per ogni criterio j , vengono ridefinite come segue:

$$a_i P a_k \text{ (} a_i \text{ è preferito ad } a_k) \Leftrightarrow g(a_i) > g(a_k) + q_j$$

$$a_i I a_k \text{ (} a_i \text{ è indifferente ad } a_k) \Leftrightarrow |g(a_i) - g(a_k)| \leq q_j.$$

C'è poi un altro problema da prendere in considerazione: vi è un punto in cui il decisore passa dall'indifferenza alla stretta preferenza. Concettualmente, c'è una buona ragione per introdurre un "cuscinetto" tra l'indifferenza e la stretta preferenza, una zona intermedia in cui il soggetto è indeciso tra indifferenza e stretta preferenza. A questa zona di esitazione è attribuita una preferenza debole; si tratta ancora una relazione binaria come P e I di cui sopra, ed è modellata introducendo una soglia di preferenza, p_j . In questo modo si definisce un doppio modello di soglia, con una relazione binaria addizionale Q che misura la preferenza debole. Formalmente si ha:

$$a_i P a_k \text{ (} a_i \text{ è fortemente preferito ad } a_k) \Leftrightarrow g(a_i) - g(a_k) > p_j, \text{ cioè } g(a_i) > g(a_k) + p_j,$$

$$a_i Q a_k \text{ (} a_i \text{ è debolmente preferito ad } a_k) \Leftrightarrow q_j < g(a_i) - g(a_k) \leq p_j, \text{ cioè } g(a_k) + q_j < g(a_i) \leq g(a_k) + p_j,$$

$$a_i I a_k \text{ (} a_i \text{ è indifferente ad } a_k; \text{ e } a_k \text{ ad } a_i) \Leftrightarrow |g(a_i) - g(a_k)| \leq q_j, \text{ cioè } g(a_i) \leq g(a_k) + q_j \text{ e } g(a_k) \leq g(a_i) + q_j.$$

I valori di p_j e q_j potrebbero essere costanti o avere una forma del tipo $\alpha^* g_{ij} + \beta_j$; in ogni caso $q_j \leq p_j$.

Il risultato è che, quando si confrontano due alternative a_i e a_k , possiamo distinguere tre zone (si veda Figura 1): una zona in cui il Decision Maker è indifferente tra a_i

¹⁶ In generale, questo vale quando un criterio viene massimizzato; quando viene minimizzato si dovrà porre attenzione ad invertire il segno delle disuguaglianze.

e a_k , una zona dove egli preferisce una delle due, ed una zona intermedia dove egli non è sicuro se preferisce a_i o a_k . Quest'ultima è la zona di preferenza debole.

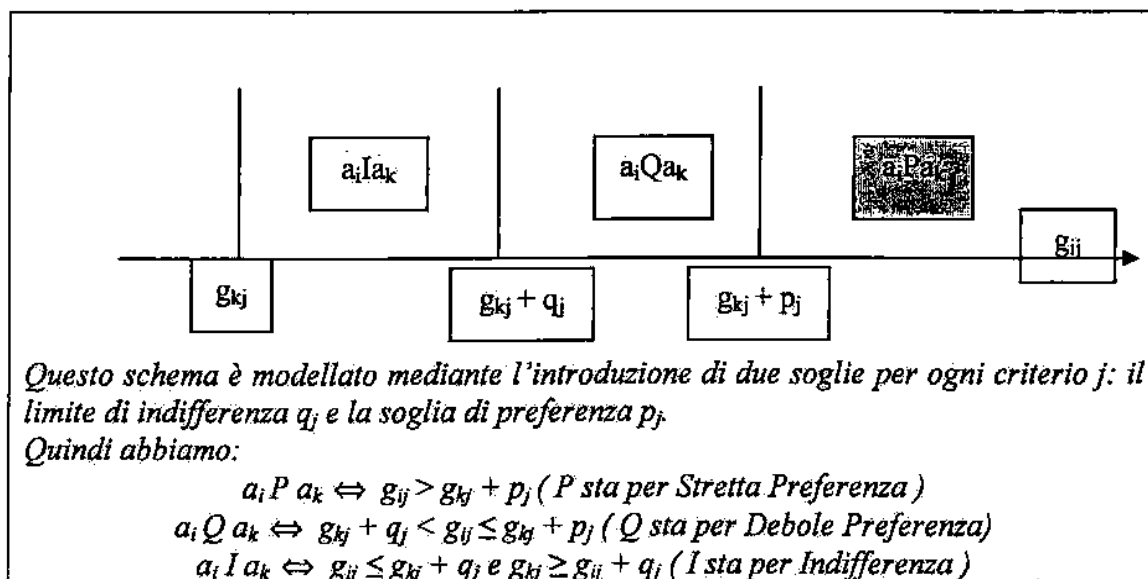
La scelta delle soglie incide profondamente; anche se la scelta di limiti appropriati non è facile, nella maggior parte delle situazioni decisorie realistiche ci sono buone ragioni per scegliere valori non nulli di p_j e q_j ¹⁷.

Al fine di costruire la relazione di superiorità S (la cosiddetta *outranking relation* di cui prima si è accennato¹⁸) è necessario procedere in più fasi. Lo scopo è quello di riuscire a costruire una matrice, detta *matrice di credibilità*, che contenga per ogni coppia di alternative (a_i, a_k) una misura del "grado di superiorità", cioè un valore che rappresenti la forza dell'affermazione "a_i è almeno tanto buona quanto a_k".

Il test per accettare l'affermazione $a_i S a_k$ viene effettuato usando due principi:

- un principio di *concordanza* che richiede che la maggioranza dei criteri, ciascuno considerato con il proprio peso¹⁹, sia in favore dell'affermazione (principio di maggioranza);

Figura 1: Le tre zone di preferenza



- un principio di *non discordanza* che richiede che all'interno della minoranza dei criteri che non supportano l'affermazione, nessuno di essi sia fortemente contro l'affermazione (rispetto del principio di minoranza).

Viene ora discussa l'attuazione operativa di questi due principi, assumendo che tutti i criteri debbano essere massimizzati.

In primo luogo consideriamo la relazione di superiorità per ognuno degli n criteri; cioè $a_i S_j a_k$, con $j = 1, \dots, n$. Il j -esimo criterio è in *concordanza* con $a_i S a_k$ se e solo se $a_i S_j a_k$. Questo significa che, se $g_j(a_i) \geq g_j(a_k) - q_j$, allora c'è concordanza con

¹⁷ In questo lavoro è stato considerato il caso in cui le soglie p_j e q_j sono costanti (invece che essere funzioni dell'importanza dei criteri, nel qual caso si parla di soglie variabili). Ovviamente, questa semplificazione rende più facile l'esposizione del metodo MURAME.

¹⁸ Si ricorda che, confrontando due alternative a_i e a_k , dire $a_i S a_k$ significa dire che "l'alternativa a_i è almeno buona come a_k " o, equivalentemente, " a_i è non peggiore di a_k ".

¹⁹ Ad ogni criterio viene assegnato un peso w_j che indica l'importanza che il decisore attribuisce a quel particolare criterio.

l'affermazione $a_i S_j a_k$ secondo il criterio j . In questo modo, anche se $g_j(a_i) < g_j(a_k)$ per una quantità al massimo uguale a q_j , questo non contraddice l'affermazione $a_i S_j a_k$ e quindi c'è concordanza.

Invece, il j -esimo criterio è in discordanza con l'affermazione $a_i S_j a_k$ se e solo se $a_k S_j a_i$. Questo significa se $g_j(a_k) \geq g_j(a_i) + p_j$. Cioè, se a_k è strettamente preferita ad a_i in base al criterio j considerato²⁰, allora c'è chiaramente non concordanza con l'affermazione $a_i S_j a_k$.

Per ogni criterio j stiamo quindi cercando di vedere se, per ogni coppia di alternative $(a_i, a_k) \in A$, c'è accordo o disaccordo con $a_i S_j a_k$.

Ora, il primo passo consiste nello sviluppare una misura di concordanza, ottenendo così una *matrice di concordanza* C che contenga i valori $C(a_i, a_k)$ per ogni coppia di alternative $(a_i, a_k) \in A$. A tale fine, indichiamo con w_j il coefficiente di importanza (o peso) per il criterio j ²¹. Definiamo una relazione aggregata di superiorità come segue:

$$C(a_i, a_k) = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^n w_j c_j(a_i, a_k),$$

$$\text{dove} \quad w = \sum_{j=1}^n w_j$$

con

$$c_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } g_j(a_i) + q_j \geq g_j(a_k) \\ & \text{(significa che l'alternativa } a_k \text{ non è preferita);} \\ 0, & \text{se } g_j(a_i) + p_j \leq g_j(a_k) \\ & \text{(significa che l'alternativa } a_k \text{ è preferita),} \quad j = 1, \dots, n; \\ \frac{p_j + g_j(a_i) - g_j(a_k)}{p_j - q_j}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In particolare, $C(a_i, a_k)$ è detto *indice di concordanza*; se considerassimo pesi uguali per ogni criterio, il valore di concordanza coinciderebbe con la percentuale dei criteri in cui un'alternativa è almeno tanto buona quanto l'altra. Invece, $c_j(a_i, a_k)$ è chiamato *indice di concordanza locale* (per ogni criterio) e può assumere valori da 0 a 1.

Per quanto riguarda le soglie ed i pesi, essi rappresentano dati soggettivi forniti dal decisore; devono riferirsi specificatamente ad ogni criterio e riflettere le preferenze del decisore²².

Finora non sono state presentate considerazioni sul principio di discordanza. Nella matrice di concordanza si legge la misura del grado di accordo che si ha con l'affermazione "l'alternativa a_i è almeno tanto buona quanto l'alternativa a_k ". Ora deve essere valutato se c'è qualche discordanza associata con l'affermazione $a_i S_j a_k$. L'*indice*

²⁰ Si pensi, ad esempio, al confronto tra due portafogli in base al loro rendimento atteso.

²¹ Il vettore dei pesi $W = \{w_1, w_2, \dots, w_j, \dots, w_n\}$ fornisce l'importanza relativa di ogni criterio.

²² Procedure per scegliere valori appropriati delle soglie e dei pesi vengono proposti da Rogers e Bruen (1998).

di discordanza $d_j(a_i, a_k)$ per un criterio j indica la discordanza dell'ipotesi che a_i domini²³ a_k , in relazione al criterio j .

Per calcolare la discordanza viene definito un'ulteriore soglia detta "soglia di veto". La soglia di veto viene usata per controllare se, per un criterio dato, un'alternativa a_i è così tanto peggiore di a_k , che non si può accettare che $a_i \succ a_k$, anche se quest'ultima relazione risultasse invece vera per tutti i criteri rimanenti.

Quindi, la soglia di veto, v_j , tiene conto della possibilità che $a_i \succ a_k$ possa essere rifiutata totalmente se, per il criterio j , l'alternativa a_i è così tanto peggiore di a_k che

$$g_j(a_k) > g_j(a_i) + v_j \quad ^{24}$$

Il limite di veto v_j non può essere minore di p_j .

In un modo analogo alla concordanza locale $c_j(a_i, a_k)$, l'indice di discordanza $d_j(a_i, a_k)$ viene calcolato per ogni criterio j come:

$$d_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } g_j(a_i) + p_j \geq g_j(a_k) \\ & \text{(significa che l'alternativa } a_k \text{ non è preferita);} \\ 1 & \text{se } g_j(a_i) + v_j \leq g_j(a_k), \\ & \text{(significa che l'alternativa } a_k \text{ è molto preferita), } j=1, \dots, n; \\ \frac{g_j(a_k) - g_j(a_i) - p_j}{v_j - p_j} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si precisa che, a differenza della concordanza, per la discordanza esiste un unico tipo di indice, per cui non c'è distinzione tra "indice di discordanza" e "indice di discordanza locale".

Dato quanto premesso, si produce una matrice di discordanza per ogni criterio. Diversamente dalla concordanza, per la discordanza non si verifica nessuna aggregazione sui criteri: un criterio discordante è sufficiente a scartare la superiorità.

È da porre in evidenza che di frequente, specialmente quando la lista delle alternative è lunga, possano mancare alcune valutazioni, ovvero che per alcuni criteri non sia possibile ottenere la performance in relazione a qualche alternativa. MURAME assicura che le valutazioni mancanti non influiscono sul confronto che viene fatto tra le coppie. Ad esempio, nel caso un grado g_{ij} sia mancante quando l'alternativa i viene confrontata con l'alternativa k , sotto il criterio j , allora viene posto $g_{ij} = g_{kj}$, che significa che il grado mancante viene sostituito da quello con cui è confrontato. In questo modo abbiamo:

$$c_j(a_i, a_k) = c_j(a_k, a_i) = 1, \quad \forall a_k \in A$$

$$d_j(a_i, a_k) = d_j(a_k, a_i) = 0, \quad \forall a_k \in A$$

e così viene assicurato di non aver favorito un'alternativa rispetto all'altra. Così, per ogni coppia di alternative $(a_i, a_k) \in A$ è assicurata l'esistenza di una misura di concordanza e di discordanza.

²³ È una libera traduzione dall'inglese. Il termine originario deriva dal verbo "to outrank". In questo lavoro è stato tradotto indifferentemente con "superare in grado", "dominare", "essere preferito a".

²⁴ Si ricorda che con $g_j(a_i)$, o con altra notazione equivalente g_{ij} , si intende il generico elemento della matrice di decisione G ; esso indica la valutazione o il valore dell'alternativa i -esima rispetto all'attributo j -esimo.

Il passo finale nella fase di costruzione del modello è, quindi, quello di combinare queste due misure per produrre una misura del grado di superiorità, cioè una matrice di credibilità che valuti la forza della proposizione "a_i è almeno tanto buona quanto a_k". Il grado di credibilità per ogni coppia (a_i, a_k) in A è definito come:

$$O(a_i, a_k) = \begin{cases} C(a_i, a_k), & \text{se } d_j(a_i, a_k) \leq C(a_i, a_k) \quad \forall j; \\ C(a_i, a_k) \prod_{j \in k(a_i, a_k)} \frac{1 - d_j(a_i, a_k)}{1 - C(a_i, a_k)}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $k(a_i, a_k)$ è il sottoinsieme dei criteri per il quale si ha $d_j(a_i, a_k) > C(a_i, a_k)$.

$O(a_i, a_k)$ è detto "indice di superiorità" (*outranking index*): lo si ottiene aggregando opportunamente gli indici di concordanza e discordanza, ed ha lo scopo di indicare quanto a_i supera (*outranks*) a_k.

La relazione sopra riportata può essere illustrata come segue: se la concordanza è più grande della discordanza per tutti i criteri, allora la seconda alternativa non è da prendere in considerazione, cioè il valore di concordanza non deve essere modificato. In caso contrario, si deve mettere in dubbio la proposizione che a_i > a_k e modificare C(a_i, a_k) diminuendo – come illustrato – la concordanza in diretta relazione alla discordanza.

Esemplificando, se la discordanza fosse 1,00 per ogni (a_i, a_k) ∈ A e per ogni criterio j, allora non avremmo fiducia sul fatto che a_i > a_k, e perciò si avrebbe S(a_i, a_k) = 0,00.

Ogni coppia di alternative a_i e a_k viene quindi esaminata in modo da controllare se la proposizione a_i > a_k è valida oppure no. Questo dà origine ad una delle seguenti situazioni:

- a_i > a_k e non a_k > a_i (a_i è preferito);
- a_k > a_i e non a_i > a_k (a_k è preferito);
- a_i > a_k e a_k > a_i, ovvero a_i I a_k (I indica la relazione di indifferenza);
- non (a_i > a_k) e non (a_k > a_i), ovvero a_i J a_k (J indica la relazione di incomparabilità).

Una volta esplicitata la relazione di superiorità tramite l'indice di outranking $O(\cdot, \cdot)$, questo stesso indice viene usato per classificare ed ordinare le preferenze. A tal riguardo si danno le seguenti definizioni:

- $\phi^+(a_i)$ è chiamato flusso di uscita; esso determina quanto buona è l'azione a_i attraverso la somma degli indici $O(a_i, a_k)$ che indicano le preferenze di a_i rispetto a tutte le alternative con essa comparate;
- $\phi^-(a_i)$ è chiamato flusso di entrata; esso mostra quanto inferiore è l'alternativa a_i.

In formule:

$$\text{flusso uscente: } \phi^+(a_i) = \sum_{k \neq i} O(a_i, a_k);$$

$$\text{flusso entrante: } \phi^-(a_i) = \sum_{k \neq i} O(a_k, a_i).$$

Il flusso uscente $\phi^+(a_i)$ indica la "forza" dell'alternativa a_i su tutte le alternative rimanenti. Viceversa, il flusso entrante $\phi^-(a_i)$ indica la "debolezza" dell'alternativa a_i (misurata come la "forza" che tutte le altre alternative esercitano su di essa).

L'alternativa a_i è superiore all'alternativa a_k se il flusso di uscita di a_i è più grande di quello di a_k e se il flusso di entrata è minore. Quindi, a_i supera in grado a_k se:

$$\phi^+(a_i) \geq \phi^+(a_k) \text{ e } \phi^-(a_i) \leq \phi^-(a_k).$$

Invece, l'uguaglianza tra i valori delle due funzioni φ^+ e φ^- indica l'indifferenza tra le due alternative che vengono confrontate.

Infine, nel caso in cui il flusso di uscita indichi che a_i è migliore di a_k , mentre il flusso in entrata indichi l'opposto, cioè:

$$\varphi^+(a_i) > \varphi^+(a_k) \text{ e } \varphi^-(a_i) > \varphi^-(a_k) \text{ o } \varphi^+(a_i) < \varphi^+(a_k) \text{ e } \varphi^-(a_i) < \varphi^-(a_k)$$

allora si verifica una situazione di incomparabilità.

Viene definito flusso netto, ed indicato con $\varphi(\cdot)$, la seguente quantità:

$$\varphi(a_i) = \varphi^+(a_i) - \varphi^-(a_i).$$

Il flusso netto, che è la differenza tra il flusso di uscita e quello di entrata, permette di realizzare una graduatoria completa di tutte le azioni.

Una volta calcolati i due flussi, $\varphi^+(\cdot)$ e $\varphi^-(\cdot)$, si possono avere due preordini: una *classifica discendente* secondo il flusso uscente $\varphi^+(\cdot)$, ed una *classifica ascendente* secondo il flusso entrante $\varphi^-(\cdot)$. Il confronto tra i due flussi dà il preordine parziale. In altre termini abbiamo:

$a_i P a_k$ se $\varphi^+(a_i) \geq \varphi^+(a_k)$ e $\varphi^-(a_i) \leq \varphi^-(a_k)$ (P indica una preferenza forte),
in cui almeno una disuguaglianza dev'essere stretta;

$a_i P^* a_k$ se $\varphi^+(a_i) \leq \varphi^+(a_k)$ e $\varphi^-(a_i) \geq \varphi^-(a_k)$ (P* indica preferenza debole),
in cui almeno una disuguaglianza dev'essere stretta;

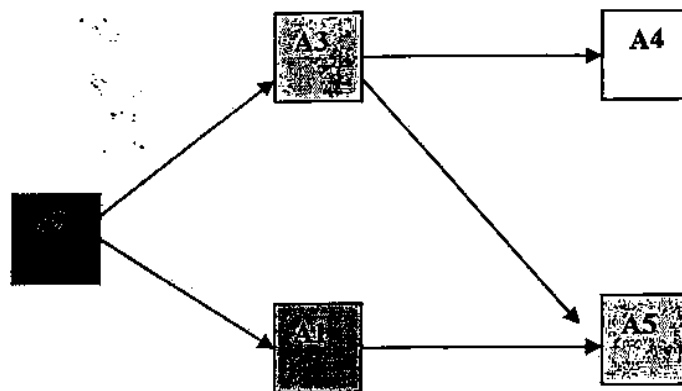
$a_i I a_k$ se $\varphi^+(a_i) = \varphi^+(a_k)$ e $\varphi^-(a_i) = \varphi^-(a_k)$;

$a_i J a_k$ altrimenti.

Queste relazioni possono essere rappresentate mediante l'uso di una matrice, detta *matrice di preferenza*, che incorpora i risultati di cui sopra, e mediante un grafico, chiamato *grafico di superiorità* (outranking). Al fine di esemplificare, una matrice di preferenza potrebbe essere del tipo:

	A1	A2	A3	A4	A5
A1	I	P*	J	J	P
A2	P	I	P	P	P
A3	J	P*	I	P	P
A4	J	P*	P*	I	J
A5	P*	P*	P*	J	I

Ed un grafico di superiorità potrebbe essere del tipo che segue:



Peraltro, più che un preordine parziale, spesso si desidera un classifica completa. Questa può essere fatta classificando le alternative (in ordine discendente) secondo il flusso netto ϕ . In questo modo si ricava un ordine totale. Un esemplificazione grafica può essere del tipo che segue:



È da porre in evidenza che selezionare un preordine totale invece di uno parziale fa perdere alcune informazioni; spetta comunque al decision maker e all'analista decidere quale si adatta meglio ai bisogni del problema.

Per concludere, si riassumono sinteticamente le caratteristiche principali di MURAME:

- il sistema di preferenze del decision maker è modellato attraverso tre regioni (indifferenza, preferenza debole, preferenza forte);
- la relazione di superiorità viene costruita attraverso un duplice approccio: il calcolo della concordanza e quello della discordanza;
- l'uso del veto assicura che un'alternativa con una cattiva performance anche solo in un particolare criterio, non riceva alta priorità;
- con il calcolo dei flussi, oltre ai preordini parziali, si possono anche avere preordini totali.

6 UN'APPLICAZIONE PRATICA ALLA SELEZIONE DI PORTAFOGLIO

Per la costruzione dei portafogli da valutare vengono presi in considerazione cinque titoli tra quelli appartenenti al paniere del MIB30. Si sono scelti titoli facenti riferimento a settori diversi. In dettaglio, sono stati considerati Banca Intesa, Fiat, Eni, Mediaset e Telecom Italia. I dati sono stati forniti da Borsa Italia S.p.a., e si tratta delle quotazioni giornaliera²⁵ nel periodo che va dal 22 Dicembre 2003 al 06 Maggio 2004, per un totale di 91 osservazioni.

Si sono quindi costruiti dei possibili portafogli, composti dai cinque titoli sopra indicati, tra i quali un ipotetico decisore dovrebbe operare una scelta. In particolare, si sono considerati 126 portafogli (le alternative dell'applicazione considerata) che divergono tra loro per la quantità con cui i singoli titoli partecipano alla formazione del portafoglio medesimo. Questi portafogli si sono specificati facendo variare da 0 a 1 (di decimale in decimale) le quantità con cui i singoli titoli partecipano alla composizione del portafoglio, ciò nel rispetto del vincolo $\sum_i x_i = 1$. In questo modo si sono identificati 1002 portafogli. Per vincoli computazionali, poiché il numero di portafogli risultanti non risultava gestibile²⁶, si è deciso di considerare solo i portafogli per i quali tutti e cinque i titoli sono presenti con quantità non nulle. Si è così ottenuto un l'insieme formato dai 126 portafogli di cui sopra, descritti nella la seguente tabella.

²⁵ Si sono considerati i prezzi di chiusura.

²⁶ I calcoli sono stati eseguiti mediante l'utilizzo di un foglio Excel.

Portafoglio	B. Intesa	Eni	Fiat	Mediasef	Telecom It.
1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,6
2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,5
3	0,1	0,1	0,1	0,3	0,4
4	0,1	0,1	0,1	0,4	0,3
5	0,1	0,1	0,1	0,5	0,2
6	0,1	0,1	0,1	0,6	0,1
7	0,1	0,1	0,2	0,1	0,5
8	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4
9	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3
10	0,1	0,1	0,2	0,4	0,2
11	0,1	0,1	0,2	0,5	0,1
12	0,1	0,1	0,3	0,1	0,4
13	0,1	0,1	0,3	0,2	0,3
14	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2
15	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1
16	0,1	0,1	0,4	0,1	0,3
17	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2
18	0,1	0,1	0,4	0,3	0,1
19	0,1	0,1	0,5	0,1	0,2
20	0,1	0,1	0,5	0,2	0,1
21	0,1	0,1	0,6	0,1	0,1
22	0,1	0,2	0,1	0,1	0,5
23	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4
24	0,1	0,2	0,1	0,3	0,3
25	0,1	0,2	0,1	0,4	0,2
26	0,1	0,2	0,1	0,5	0,1
27	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4
28	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3
29	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2
30	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1
31	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3
32	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2
33	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
34	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2
35	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
36	0,1	0,2	0,5	0,1	0,1
37	0,1	0,3	0,1	0,1	0,4
38	0,1	0,3	0,1	0,2	0,3
39	0,1	0,3	0,1	0,3	0,2
40	0,1	0,3	0,1	0,4	0,1
41	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3
42	0,1	0,3	0,2	0,2	0,2
43	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1
44	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2
45	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

46	0,1	0,4	0,4	0,1	0,1
47	0,1	0,4	0,1	0,1	0,3
48	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2
49	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1
50	0,1	0,4	0,2	0,1	0,2
51	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1
52	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1
53	0,1	0,5	0,1	0,1	0,2
54	0,1	0,5	0,1	0,2	0,1
55	0,1	0,5	0,2	0,1	0,1
56	0,1	0,6	0,1	0,1	0,1
57	0,2	0,4	0,1	0,1	0,5
58	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4
59	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3
60	0,2	0,1	0,1	0,4	0,2
61	0,2	0,1	0,1	0,5	0,1
62	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4
63	0,2	0,1	0,2	0,2	0,3
64	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2
65	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1
66	0,2	0,1	0,3	0,1	0,3
67	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2
68	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1
69	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2
70	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1
71	0,2	0,1	0,5	0,1	0,1
72	0,2	0,2	0,1	0,1	0,4
73	0,2	0,2	0,1	0,2	0,3
74	0,2	0,2	0,1	0,3	0,2
75	0,2	0,2	0,1	0,4	0,1
76	0,2	0,2	0,2	0,1	0,3
77	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
78	0,2	0,2	0,2	0,3	0,1
79	0,2	0,2	0,3	0,1	0,2
80	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1
81	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1
82	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3
83	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2
84	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1
85	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2
86	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1
87	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1
88	0,2	0,4	0,1	0,1	0,2
89	0,2	0,4	0,1	0,2	0,1
90	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1
91	0,2	0,5	0,1	0,1	0,1
92	0,3	0,1	0,1	0,1	0,4

93	0,3	0,1	0,1	0,2	0,3
94	0,3	0,1	0,1	0,3	0,2
95	0,3	0,1	0,1	0,4	0,1
96	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3
97	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2
98	0,3	0,1	0,2	0,4	0,1
99	0,3	0,1	0,3	0,1	0,2
100	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1
101	0,3	0,1	0,4	0,1	0,1
102	0,3	0,2	0,1	0,1	0,3
103	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2
104	0,3	0,2	0,1	0,3	0,1
105	0,3	0,2	0,2	0,1	0,2
106	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1
107	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1
108	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2
109	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1
110	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1
111	0,3	0,2	0,1	0,3	0,1
112	0,4	0,1	0,1	0,1	0,3
113	0,4	0,1	0,1	0,2	0,2
114	0,4	0,1	0,1	0,3	0,1
115	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2
116	0,4	0,1	0,2	0,2	0,1
117	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1
118	0,4	0,2	0,1	0,1	0,2
119	0,4	0,2	0,1	0,2	0,1
120	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1
121	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1
122	0,5	0,1	0,1	0,1	0,2
123	0,5	0,1	0,1	0,2	0,1
124	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1
125	0,5	0,2	0,1	0,1	0,1
126	0,6	0,1	0,1	0,1	0,1

Una volta specificate tutte le alternative tra cui effettuare la scelta, ovvero i 126 portafogli, è necessario determinare la matrice di decisione. A tal fine si devono specificare i criteri di valutazione da adottare che, nell'applicazione in oggetto, saranno la media, la varianza, la skewness e la *kurtosis* dei rendimenti dei portafogli.

Per specificare la matrice di valutazione si devono compiere nell'ordine i seguenti passi:

- calcolare i rendimenti giornalieri di tutti e cinque i titoli;
- calcolare la media, la varianza, la skewness e la kurtosis dei rendimenti di ognuno dei 5 titoli considerati;
- calcolare le covarianze, le co-skewness e le co-kurtosis tra i rendimenti dei 5 titoli;
- calcolare la media, la varianza, la skewness e la kurtosis per tutti i 126 portafogli presi in esame.

In particolare, i rendimenti attesi e la varianza dei rendimenti sono stati calcolati come segue:

$$E(R_i) = \frac{1}{90} \sum_{j=1}^{90} R_{ij} = \bar{R}_i$$

$$V(R_i) = E(R_{ij} - \bar{R}_i)^2 = \frac{1}{90} \sum_{j=1}^{90} (R_{ij} - \bar{R}_i)^2 = \sigma_i^2$$

dove

$E(R_i) = \bar{R}_i$: rendimento atteso dell'*i*-esimo titolo, con $i = 1, 2, \dots, 5$;

R_{ij} : *j*-esimo rendimento del titolo *i*-esimo, con $j = 1, 2, \dots, 90$.

La skewness e la kurtosis sono state calcolate seguendo l'approccio alla Ingersoll²⁷, cioè considerando rispettivamente il terzo e il quarto momento centrale non normalizzato. Per cui la skewness, per un singolo titolo, è data da

$$s = E \left[(R_{ij} - \bar{R}_i)^3 \right],$$

e la kurtosis, sempre per un singolo titolo, è data:

$$k = E \left[(R_{ij} - \bar{R}_i)^4 \right].$$

Una volta ottenuti i valori dei rendimenti attesi, delle varianze, delle skewnesses e delle kurtosis dei rendimenti dei singoli titoli, si deve calcolare la media, la varianza, la skewness e la kurtosis per ognuno dei 126 portafogli; per il calcolo delle tre ultime quantità sono necessarie le co-varianze, le co-skewness e le co-kurtosis.

Con particolare riferimento alle due ultime quantità, Ingersoll²⁸, dato un portafoglio costituito da due soli titoli, definisce la skewness di tale portafoglio come:

$$s_p = x_1^3 s_1^3 + 3x_1^2 x_2 s_{112} + 3x_1 x_2^2 s_{122} + x_2^3 s_2^3$$

dove

s_{112} e s_{122} sono le co-skewness.

In generale, per co-skewness tra i rendimenti dei titoli *i*, *j*, *k* si intende:

$$s_{ijk} = E \left[(R_i - E(R_i)) \cdot (R_j - E(R_j)) \cdot (R_k - E(R_k)) \right].$$

Ora, considerando che l'applicazione in esame è relativa a portafogli composti da cinque titoli, la skewness di uno di questi portafogli sarà data dal seguente cubo di un pentanomio:

$$\begin{aligned} s_p = & x_1^3 s_1^3 + x_2^3 s_2^3 + x_3^3 s_3^3 + \dots + \\ & + 3x_1^2 x_2 s_{112} + 3x_1 x_2^2 s_{122} + \dots + \\ & + 6x_1 x_2 x_3 s_{123} + \dots + 6x_3 x_4 x_5 s_{345}. \end{aligned}$$

In modo analogo si ricava la kurtosis di ognuno dei portafogli considerati.

Nella tabella che segue si riportano la media, la varianza, la skewness e la kurtosis per ogni portafoglio, accanto alla composizione del portafoglio stesso. La tabella, quindi, contiene la matrice di valutazione (o matrice di decisione) che fornisce il punteggio g_{ij} di ogni alternativa *i* in ogni criterio *j*.

²⁷ Ingersoll J.E. Jr. "Theory of financial decision making", Studies in Financial Economics (1987).

²⁸ Ingersoll J.E. Jr. "Theory of financial decision making", Studies in Financial Economics (1987).

Tabella 3: Matrice di valutazione

	A	B	C	D	E	Media	Varianza	Skewness	Kurtosi
1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,6	0,074447	0,591379	-0,02316	1,259378
2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,5	0,05789	0,597212	-0,04485	1,323693
3	0,1	0,1	0,1	0,3	0,4	0,041833	0,629095	-0,051883	1,473452
4	0,1	0,1	0,1	0,4	0,3	0,024776	0,687027	-0,074408	1,734303
5	0,1	0,1	0,1	0,5	0,2	0,003219	0,77101	-0,081029	2,145108
6	0,1	0,1	0,1	0,6	0,1	0,00034	0,881043	-0,080547	2,757949
7	0,1	0,1	0,2	0,1	0,5	0,056868	0,595216	-0,024027	1,241679
8	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4	0,089511	0,611589	-0,048726	1,361871
9	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3	0,022954	0,654011	-0,069447	1,580118
10	0,1	0,1	0,2	0,4	0,2	0,006397	0,722484	-0,085067	1,92578
11	0,1	0,1	0,2	0,5	0,1	0,01016	0,817006	-0,094664	2,44143
12	0,1	0,1	0,3	0,1	0,4	0,037689	0,640709	-0,005868	1,403971
13	0,1	0,1	0,3	0,2	0,3	0,02132	0,667621	-0,035873	1,582735
14	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2	0,004575	0,720583	-0,061657	1,879311
15	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1	-0,01198	0,799596	-0,082095	2,326767
16	0,1	0,1	0,4	0,1	0,3	0,01931	0,727858	-0,028176	1,761063
17	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2	0,002753	0,76531	-0,008934	2,009564
18	0,1	0,1	0,4	0,3	0,1	-0,0138	0,828811	-0,041579	2,402775
19	0,1	0,1	0,5	0,1	0,2	0,000981	0,856662	-0,074963	2,361544
20	0,1	0,1	0,5	0,2	0,1	-0,01563	0,904653	-0,028949	2,699413
21	0,1	0,1	0,6	0,1	0,1	-0,01745	1,027122	0,31349	3,287783
22	0,1	0,2	0,1	0,1	0,5	0,075706	0,514471	-0,060307	0,910572
23	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4	0,05915	0,530762	-0,078028	0,988226
24	0,1	0,2	0,1	0,3	0,3	0,042593	0,573102	-0,092594	1,147282
25	0,1	0,2	0,1	0,4	0,2	0,026036	0,641493	-0,102882	1,416682
26	0,1	0,2	0,1	0,5	0,1	0,009479	0,735933	-0,107769	1,838583
27	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4	0,057328	0,529677	-0,050557	0,943451
28	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,04077	0,556507	-0,071597	1,076077
29	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2	0,024214	0,609387	-0,089237	1,304862
30	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1	0,007657	0,688317	-0,102355	1,662459
31	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3	0,038949	0,586538	-0,025095	1,13074
32	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2	0,022392	0,623907	-0,051251	1,325592
33	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1	0,005835	0,687327	-0,073764	1,638504
34	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2	0,02057	0,685054	-0,042987	1,499625
35	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1	0,004013	0,732963	-0,020133	1,772426
36	0,1	0,2	0,5	0,1	0,1	0,002191	0,825226	-0,060398	2,111075
37	0,1	0,3	0,1	0,1	0,4	0,076966	0,464817	-0,086905	0,720828
38	0,1	0,3	0,1	0,2	0,3	0,060409	0,491565	-0,10110	0,809833
39	0,1	0,3	0,1	0,3	0,2	0,043853	0,544363	-0,11272	0,979782
40	0,1	0,3	0,1	0,4	0,1	0,027296	0,623211	-0,120639	1,26291
41	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3	0,058587	0,49139	-0,069772	0,786665
42	0,1	0,3	0,2	0,2	0,2	0,042031	0,528678	-0,087095	0,932252
43	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1	0,025474	0,592015	-0,101598	1,175686
44	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2	0,040209	0,559619	-0,04024	0,991903

45	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1	0,023652	0,607446	-0,062489	1,205884
46	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1	0,021683	0,669503	-0,001451	1,376105
47	0,1	0,4	0,1	0,1	0,3	0,078226	0,442416	-0,107363	0,648927
48	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2	0,061669	0,479621	-0,117977	0,750679
49	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1	0,045112	0,542876	-0,126592	0,936499
50	0,1	0,4	0,2	0,1	0,2	0,059827	0,480357	-0,086078	0,738273
51	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1	0,04329	0,528102	-0,099629	0,90073
52	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1	0,041468	0,559953	-0,055708	0,962579
53	0,1	0,5	0,1	0,1	0,2	0,079486	0,447267	-0,126089	0,66993
54	0,1	0,5	0,1	0,2	0,1	0,062929	0,49493	-0,136064	0,789206
55	0,1	0,5	0,2	0,1	0,1	0,061107	0,496576	-0,103884	0,781501
56	0,1	0,6	0,1	0,1	0,1	0,080746	0,479371	-0,147488	0,775175
57	0,2	0,1	0,1	0,1	0,5	0,046908	0,580007	-0,029174	1,158399
58	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4	0,032352	0,60252	-0,033647	1,251762
59	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3	0,015795	0,651082	-0,032899	1,437355
60	0,2	0,1	0,1	0,4	0,2	0,00076	0,725694	-0,025209	1,748589
61	0,2	0,1	0,1	0,5	0,1	0,01732	0,826356	-0,009656	2,232091
62	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4	0,03053	0,595361	-0,012386	1,179801
63	0,2	0,1	0,2	0,2	0,3	0,013913	0,628413	-0,020178	1,337205
64	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2	0,00253	0,687514	-0,022106	1,602178
65	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1	0,01914	0,772666	-0,017047	2,011843
66	0,2	0,1	0,3	0,1	0,3	0,01215	0,65237	0,01719	1,374996
67	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2	0,00441	0,695961	0,00448	1,606674
68	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1	0,02096	0,765603	-0,002122	1,968405
69	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2	0,00623	0,751034	0,056411	1,770958
70	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1	0,02279	0,805165	0,086985	2,095612
71	0,2	0,1	0,5	0,1	0,1	0,02461	0,891354	0,102135	2,428442
72	0,2	0,2	0,1	0,1	0,4	0,050168	0,515644	-0,061743	0,864146
73	0,2	0,2	0,1	0,2	0,3	0,033611	0,548614	-0,063655	0,973668
74	0,2	0,2	0,1	0,3	0,2	0,017055	0,607634	-0,061121	1,174821
75	0,2	0,2	0,1	0,4	0,1	0,000498	0,692704	-0,052423	1,504309
76	0,2	0,2	0,2	0,1	0,3	0,031789	0,542366	-0,035951	0,936989
77	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,015233	0,585875	-0,041383	1,112142
78	0,2	0,2	0,2	0,3	0,1	0,00132	0,655434	-0,041539	1,396412
79	0,2	0,2	0,3	0,1	0,2	0,013411	0,610742	-0,001281	1,165375
80	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1	0,00315	0,664791	-0,011446	1,420953
81	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1	0,00497	0,720775	-0,03972	1,588658
82	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3	0,051428	0,478534	-0,085789	0,73038
83	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2	0,034871	0,521962	-0,086075	0,857804
84	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1	0,018314	0,591439	-0,081898	1,079842
85	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2	0,033049	0,516623	-0,055417	0,841686
86	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1	0,016492	0,57059	-0,058442	1,038846
87	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1	0,01467	0,596368	-0,018885	1,100857
88	0,2	0,4	0,1	0,1	0,2	0,052688	0,468677	-0,101506	0,723563
89	0,2	0,4	0,1	0,2	0,1	0,036131	0,522562	-0,105513	0,874012
90	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1	0,034309	0,518134	-0,075189	0,868521
91	0,2	0,5	0,1	0,1	0,1	0,053948	0,486073	-0,130704	0,82643

92	0,3	0,1	0,1	0,1	0,4	0,02337	0,62645	0,040325	1,245117
93	0,3	0,1	0,1	0,2	0,3	0,006813	0,665641	0,031737	1,381289
94	0,3	0,1	0,1	0,3	0,2	-0,009774	0,730883	-0,015642	1,628958
95	0,3	0,1	0,1	0,4	0,1	-0,02663	0,822174	0,009082	2,029299
96	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	0,007991	0,653319	0,004044	1,319559
97	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2	-0,01157	0,70305	0,001814	1,530201
98	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1	-0,02612	0,778831	0,015422	1,870408
99	0,3	0,1	0,3	0,1	0,2	-0,01169	0,721844	0,038786	1,578771
100	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1	-0,02394	0,782115	0,040115	1,881653
101	0,3	0,1	0,4	0,1	0,1	-0,03177	0,832024	0,085024	2,061892
102	0,3	0,2	0,1	0,1	0,3	0,02463	0,574631	-0,076929	1,015415
103	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2	0,008973	0,62428	0,06748	1,177419
104	0,3	0,2	0,1	0,3	0,1	-0,00348	0,699979	-0,051102	1,453764
105	0,3	0,2	0,2	0,1	0,2	0,006251	0,612868	0,034448	1,147503
106	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	-0,01031	0,673057	-0,027539	1,388064
107	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1	-0,01213	0,692761	0,011269	1,453444
108	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2	0,02589	0,550065	-0,109416	0,961712
109	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1	0,009336	0,610172	0,099049	1,15502
110	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1	0,007511	0,59967	0,063966	1,143109
111	0,3	0,4	0,1	0,1	0,1	0,02716	0,552753	-0,142193	1,058144
112	0,4	0,1	0,1	0,1	0,3	-0,00217	0,730706	-0,077639	1,667985
113	0,4	0,1	0,1	0,2	0,2	-0,01872	0,786577	-0,059047	1,883474
114	0,4	0,1	0,1	0,3	0,1	-0,03523	0,868498	-0,031033	2,24221
115	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2	-0,02055	0,769091	-0,020027	1,809545
116	0,4	0,1	0,2	0,2	0,1	-0,0371	0,835502	-0,003776	2,112199
117	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1	-0,03893	0,849132	0,097896	2,164027
118	0,4	0,2	0,1	0,1	0,2	-0,00091	0,691432	-0,128677	1,532322
119	0,4	0,2	0,1	0,2	0,1	-0,01746	0,75776	-0,110527	1,79017
120	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1	-0,01929	0,741185	-0,067074	1,743077
121	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1	0,000352	0,67941	-0,178512	1,602253
122	0,5	0,1	0,1	0,1	0,2	-0,02771	0,892776	-0,162146	2,68807
123	0,5	0,1	0,1	0,2	0,1	-0,04426	0,965326	-0,136804	3,042134
124	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1	-0,04608	0,942677	-0,08136	2,910967
125	0,5	0,2	0,1	0,1	0,1	-0,02645	0,866046	-0,237416	2,695426
126	0,6	0,1	0,1	0,1	0,1	-0,05321	1,11266	-0,314862	4,679061

A questo punto è possibile applicare l'approccio MURAME.

Si è deciso di effettuare due valutazioni: una in base ai soli criteri di media e di varianza, l'altra in base a tutti e quattro i criteri considerati, ciò al fine di poter valutare le eventuali differenze. In particolare, si pone in evidenza che, come usuale, saranno preferiti i portafogli con media e skewness più elevate, e varianza e kurtosis più basse possibili, questo perché, in generale, si preferiscono valori elevati per i momenti di ordine dispari e valori ridotti per momenti di ordine pari²⁹.

²⁹ Per maggiori dettagli si veda de Athayde G.M. e Flores R.G. Jr., *Finding a Maximum Skewness Portfolio: a General Solution to Three-moments Portfolio Choice*, 2001, e Lucey B.M. e Tully E., *Portfolio Formation, Skewness & the Role of Gold*, School of Business Studies, University of Dublin, Trinity College, Dublin, 2003.

Poiché finora nell'approccio MURAME si è considerata la sola massimizzazione, continueremo nello stesso modo anche nell'applicazione. A tal fine, input quali la varianza e la kurtosis verranno considerati nella matrice di decisione con il segno opposto, in quanto vale la relazione:

$$-\min f(x) = \max [-f(x)].$$

Inoltre, per applicare la procedura consideriamo i seguenti soglie e pesi:

	p	g	v	w
	(soglia di preferenza)	(soglia di indifferenza)	(soglia di veto)	(pesi)
MEDIA	0,05	0,01	0,08	0,25
VARIANZA	0,1	0,01	0,3	0,25
SKEWNESS	0,05	0,01	0,08	0,25
CURTOSI	0,2	0,02	1,6	0,25

Le soglie sono stati scelte soggettivamente sulla base di quanto ottenuti nella matrice di decisione; invece, per quanto riguarda i pesi si è deciso di dare la stessa importanza a tutti e quattro i criteri.

Nel seguito, l'applicazione si articola come segue:

- calcolo delle matrici di concordanza locale;
- calcolo della matrice di concordanza (matrice finale);
- calcolo delle matrici di discordanza;
- calcolo dell'"outranking index" (o indice di superiorità);
- calcolo dei flussi ascendenti, di quelli discendenti e di quelli netti;
- ordinamenti parziali e totali.

I primi passi da intraprendere consiste nel calcolare le matrici di concordanza locale per ogni criterio (i cui elementi $c_j(a_i, a_k)$ appartengono all'intervallo $[0,1]$) e, successivamente, la matrice di concordanza (matrice finale).

Al fine di esemplificare si riportano parti di alcune matrici di concordanza (locale e non) ottenute. In particolare, sono state ottenute quattro matrici di concordanza locale (una per ogni criterio) e due matrici di concordanza "finale" (una per ogni applicazione, cioè utilizzando prima due e poi quattro criteri di valutazione), per un totale di sei matrici ognuna di dimensioni (126×126) .

Tabella 4: Matrici di concordanza (locale e non)

Parte della MATRICE DI CONCORDANZA LOCALE						
	1	2	3	4	5	6
	0,074447	0,05789	0,041333	0,024776	0,008219	0,00834
1	0,074446803	1	1	1	1	1
2	0,057889742	0,836078	1	1	1	1
3	0,04133288	0,422157	0,836078	1	1	1
4	0,024776018	0,008235	0,422157	0,836078	1	1
5	0,008219157	0	0,008235	0,422157	0,836078	1
6	0,00833771	0	0	0,008235	0,422157	0,836078
Parte della MATRICE DI CONCORD. LOCALE						
	1	2	3	4	5	6
	-0,59138	-0,59721	-0,62909	-0,68703	-0,77101	-0,881043

1	-0,59137855	1	1	1	1	1	1
2	-0,59721158	1	1	1	1	1	1
3	-0,62909455	0,692044	0,756856	1	1	1	1
4	-0,68702744	0,048346	0,713157	0,467412	1	1	1
5	-0,77101027	0	0	0	0,177969	1	1
6	-0,88104302	0	0	0	0	0	1

Parte della MATRICE DI CONCORDANZA LOCALE

	1	2	3	4	5	6
1	-0,023162	1	1	1	1	1
2	-0,0443514	0,720245	1	1	1	1
3	-0,06180792	0,283832	0,813587	1	1	1
4	-0,07440795	0	0,498586	0,934999	1	1
5	-0,08102871	0	0,333067	0,76948	1	1
6	-0,0805474	0	0,3451	0,781513	1	1

SKEWNESS

Parte della MATRICE DI CONCORDANZA LOCALE

KURTOSIS

	1	2	3	4	5	6
1	-1,25938	-1,32369	-1,47345	-1,7343	-2,14511	-2,757949
2	-1,25937828	0,753808	1	1	1	1
3	-1,47345227	0	0,279114	1	1	1
4	-1,73430279	0	0	0	1	1
5	-2,14510802	0	0	0	0	1
6	-2,75794887	0	0	0	0	0

Parte della MATRICE FINALE DI CONCORDANZA (con 2 criteri)

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0,91803923	1	1	1	1	1
3	0,55710067	0,796467	1	1	1	1
4	0,028290491	0,267657	0,651745	1	1	1
5	0	0,004118	0,211078	0,507024	1	1
6	0	0	0,004118	0,211078	0,418039	1

Parte della MATRICE FINALE DI CONCORDANZA (con 4 criteri)

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0,827532813	1	1	1	1	1
3	0,349508329	0,671409	1	1	1	1
4	0,014145245	0,258475	0,559622	1	1	1

5	0	0,085326	0,297909	0,503512	0,45902	1
6	0	0,086275	0,197437	0,355539	0,45902	1

Il passo successivo nella procedura consiste nel calcolare, sempre per ogni criterio, le matrici di discordanza. Anche ora, come nel caso della concordanza, si riportano solo alcune parti delle matrici di discordanza ottenute.

Tabella 5: Matrici di discordanza

Parte della MATRICE DI DISCORDANZA		1	2	3	4	5	6
		0,074447	0,05789	0,041333	0,024776	0,008219	0,008338
1	0,074446603	0	0	0	0	0	0
2	0,057889742	0	0	0	0	0	0
3	0,04133288	0	0	0	0	0	0
4	0,024776018	0	0	0	0	0	0
5	0,008219157	-3,87425	0	0	0	0	0
6	0,00833771	-3,87425	0	0	0	0	0
Parte della MATRICE DI DISCORDANZA		1	2	3	4	5	6
		-0,59138	-0,59721	-0,62909	-0,68703	-0,77101	-0,881043
1	-0,59137855	0	0	0	0	0	0
2	-0,59721158	0	0	0	0	0	0
3	-0,62909455	0	0	0	0	0	0
4	-0,68702744	0	0	0	0	0	0
5	-0,77101027	-1,39816	-1,36899	-1,20958	0	0	0
6	-0,88104302	-1,94832	-1,91916	-1,75974	-1,47008	-1,05016	0
Parte della MATRICE DI DISCORDANZA		1	2	3	4	5	6
		0,02316	-0,04435	-0,06181	-0,07441	-0,08103	-0,080547
1	-0,0231612	0	0	0	0	0	0
2	0,0443514	0	0	0	0	0	0
3	-0,06180792	0	0	0	0	0	0
4	0,07440795	-3,37489	0	0	0	0	0
5	-0,08102871	-3,59558	0	0	0	0	0
6	0,0805474	-3,57954	0	0	0	0	0
Parte della MATRICE DI DISCORDANZA		1	2	3	4	5	6
		-1,25938	-1,32369	-1,47345	-1,7343	-2,14511	-2,757949
1	-1,25937828	0	0	0	0	0	0
2	-1,32369286	0	0	0	0	0	0
3	-1,47345227	-0,29577	0	0	0	0	0
4	-1,73430279	-0,48209	-0,43615	-0,32918	0	0	0

5	-2,14510802	-0,77552	-0,72958	-0,62261	-0,43629	0	0
6	2,75794887	1,21326	1,16733	1,06035	0,87403	0,5806	0

Con i dati così ottenuti è ora possibile passare alla determinazione degli indici di superiorità. Come nei casi precedenti, anche di seguito si riportano solo parti delle matrici relative agli indici di superiorità stessi.

Tabella 6: L'indice di Superiorità

Parte della MATRICE RELATIVA ALL'INDICE DI SUPERIORITÀ						Con 2 criteri
	1	2	3	4	5	6
1	1			1	1	1
2	0,91803923	1	1	1	1	1
3	0,55710067	0,796467	1	1	1	1
4	0,028290491	0,267657	0,651745	1	1	1
5	0	0,004118	0,211078	0,507024	1	1
6	0	0	0,004118	0,211078	0,418039	1

Parte della MATRICE RELATIVA ALL'INDICE DI SUPERIORITÀ						Con 4 criteri
	1	2	3	4	5	6
1	1			1	1	1
2	0,827532813	1	1	1	1	1
3	0,349508329	0,671409	1	1	1	1
4	0,014145245	0,258475	0,559622	1	1	1
5	0	0,085326	0,297909	0,503512	1	1
6	0	0,086275	0,197437	0,355539	0,45902	1

Infine, come descritto nella sezione 5., al fine di realizzare l'ordinamento vero e proprio, l'indice di outranking viene usato per calcolare per ogni alternativa i flussi entranti ($\phi^+(\cdot)$) e quelli uscenti ($\phi^-(\cdot)$). Una volta calcolate le due tipologie di flussi, a partire da questi ultimi si possono specificare due preordini: una *classifica discendente* secondo il flusso uscente $\phi^-(\cdot)$, ed una *classifica ascendente* secondo il flusso entrante $\phi^+(\cdot)$. L'intersezione dei due flussi, che si realizza secondo quanto esposto nella sezione precedente, dà il preordine parziale. Classificando invece le alternative in ordine discendente secondo il flusso netto $\phi(\cdot)$ si ottiene un preordine totale.

I risultati relativi all'applicazione presa in esame, nelle due varianti, sono i seguenti:

2 criteri			
Ordinamento parziale ascendente		Ordinamento parziale discendente	
#	Flusso	#	Flusso
47	16,58049	47	126
53	16,66277	53	126
37	20,36297	37	125,8892
56	20,84127	56	125,6983
22	28,88359	48	125,2482
48	31,02623	50	125,0952
50	32,20388	54	124,8812
54	32,47201	38	124,8418

38	33,44349	88	124,7251
55	33,82601	41	124,7129
41	34,48469	55	124,6686
88	35,11933	91	124,5257
91	36,79342	82	124,4817
82	37,46282	22	124,0193
23	41,33842	72	122,5594
27	42,21571	23	122,1083
31	43,81698	27	122,0741
72	44,42619	51	120,3857
51	51,46386	42	120,0555
42	52,42678	49	119,1683
49	53,04544	89	119,0731
39	54,19619	90	118,9046
29	54,51421	83	118,7827
89	55,12288	39	118,7335
7	55,29997	85	118,6541
90	55,5438	28	116,5584
83	55,86658	52	116,2566
85	55,94241	44	116,0043
57	57,44301	76	115,8649
28	58,45216	73	115,664
52	58,77835	57	114,6996
44	59,56037	1	114,6072
24	60,52558	24	114,5505
73	61,9573	7	113,2101
76	61,96095	2	113,073
31	65,55908	111	112,9546
111	66,71442	108	112,8083
108	67,03622	31	111,6913
8	69,57352	102	108,8759
3	70,99173	62	108,0232
102	72,75993	8	108,0217
62	72,9912	58	107,6267
58	73,1174	43	106,633
12	75,57005	86	106,0754
43	75,64685	3	105,1765
86	76,66219	84	103,7913
29	79,62982	45	103,6924
45	79,65431	29	103,5582
40	79,7378	77	103,1844
84	79,9277	40	102,1393
77	80,51786	12	102,0914
92	82,76322	87	101,4095
87	82,93312	74	100,8551
32	82,97513	32	100,164
25	83,65725	92	100,057

74	83,82559	79	98,47622
79	86,31338	25	98,2066
110	86,95135	110	96,92847
109	87,61869	109	96,25136
109	88,24852	63	95,46658
63	88,72649	9	94,68709
105	90,0168	105	94,04383
46	90,6156	103	92,92647
13	90,77631	59	92,11146
103	90,94744	13	91,46681
4	91,2828	46	91,39688
59	91,56255	66	89,92555
66	93,673	4	89,17495
34	93,68081	34	87,67833
96	97,024	96	85,71189
93	98,12549	93	84,52246
16	99,51169	78	81,60252
78	99,61154	30	80,61934
30	101,0316	16	79,81046
80	101,4988	33	79,8023
33	101,647	80	78,8211
121	102,7131	121	78,13865
75	104,3734	75	75,65523
106	104,5697	118	75,0644
118	104,6961	64	74,80572
64	104,7224	10	73,86073
10	105,4978	26	73,56358
26	105,749	14	73,14655
14	106,0497	106	72,24215
67	106,2559	67	72,05072
107	107,5584	35	70,95439
104	107,7341	60	69,1798
35	107,7905	104	68,51805
60	108,4985	112	67,63491
97	108,6883	107	67,33134
81	109,271	81	67,28754
5	109,6304	5	67,05458
112	109,8605	97	65,88691
99	111,0938	17	64,85765
17	111,4194	94	62,48492
94	111,8323	69	61,53383
69	113,0566	99	61,328
120	114,2177	36	55,61754
119	115,6775	120	54,2322
36	116,101	119	52,64956
68	116,6447	15	50,38494
115	116,9036	19	50,28574

65	117,083	11	49,43257
19	117,9085	65	49,22696
113	118,1037	68	49,00089
98	118,1059	115	48,77483
15	118,2288	113	47,40948
100	118,4046	18	45,59116
11	119,3312	61	43,44478
70	119,8629	6	42,95385
18	120,5808	70	42,12022
61	120,9854	98	41,9991
6	121,4282	100	40,27739
95	121,5452	95	37,53034
101	122,2493	20	35,81008
116	122,5557	125	33,0734
20	123,0918	101	32,85239
117	123,1509	71	32,05089
125	123,3018	122	29,85671
114	123,7413	116	29,03572
71	123,806	114	26,92252
122	124,0242	117	26,50457
21	124,3558	21	18,47953
124	125,0161	124	14,91284
123	125,2122	123	14,75464
126	126	126	5,648017

4 criteri			
Ordinamento parziale ascendente		Ordinamento parziale discendente	
#	Flusso	#	Flusso
21	4,875881237	76	106,8797
71	9,890424883	44	104,3254
101	13,1175776	27	103,5419
19	18,37990656	57	102,4167
36	24,0471338	31	101,9277
69	24,47566263	72	101,8626
47	29,82456121	62	101,8455
53	30,11679485	22	101,8313
37	32,00883396	1	101,5016
81	32,07748705	85	101,3645
99	33,4553781	7	100,3771
56	34,83995537	87	99,58537
22	36,43806069	41	99,39718
100	36,74294725	79	98,99547
1	37,70255123	52	97,7288
16	37,8371621	58	96,10057
66	40,99978317	73	94,91818
50	41,82691718	12	94,22563
41	42,57178253	77	93,48613

70	42,92954493	90	93,41021
48	43,36865133	2	91,56735
117	43,97193798	66	91,55767
86	44,53118498	105	91,54069
27	44,68312602	23	91,17591
82	44,76294902	46	90,4523
34	44,81572178	82	90,39777
54	44,98049243	86	90,33292
55	45,04737517	63	90,30283
79	45,60601005	37	90,16035
38	45,88081582	92	89,93851
7	46,38049385	50	89,875
72	47,44569585	96	88,7263
62	47,58647823	28	88,4295
12	48,3142224	34	87,59404
20	48,34647819	8	87,29598
91	49,26106834	83	85,31181
57	49,73554153	45	84,80749
76	49,8579942	74	84,33804
31	50,66438982	42	84,25313
107	50,85590159	59	84,24821
46	51,50247434	102	84,159
85	51,70743242	32	82,99999
44	52,07912654	93	81,77063
87	52,45000746	110	81,69027
23	52,57916588	80	80,7773
96	54,62764269	13	80,15819
2	56,8888639	16	79,92583
98	56,90557879	3	79,50948
90	56,91570152	38	78,32629
52	57,36971599	51	77,12029
67	57,55650431	103	76,85043
83	58,3337213	84	76,83481
42	59,1049448	107	76,77737
51	59,31137941	55	76,44721
97	60,03303642	81	75,84931
89	60,41877376	78	75,76452
73	61,0737064	67	74,95429
63	61,87350223	47	74,54679
49	62,42107658	106	74,48946
58	62,55925086	88	73,8291
39	63,51290496	64	73,26224
95	63,74715022	97	73,02001
28	64,28014021	99	72,77737
80	64,57950502	24	72,59337
77	65,72986793	69	70,47365
105	68,49626817	89	69,87569

86	68,81185844	35	69,14558
92	69,41920273	9	67,81232
108	69,89539789	94	67,23437
8	69,97119018	60	66,88268
24	70,13304824	29	66,5728
68	71,02375603	75	65,5998
102	71,14909185	48	65,0098
111	72,73828459	17	63,56095
94	73,69776388	104	63,01981
64	74,79713466	39	62,84292
116	74,89815422	108	62,82651
59	74,9829345	43	61,61947
17	75,18399178	4	61,09845
93	76,03991916	109	59,87928
45	76,36520809	36	59,74095
3	76,55646705	53	59,40733
35	76,62005266	33	58,04579
74	76,66018286	14	56,71273
106	76,75570395	91	55,33653
32	76,98856249	68	55,13838
84	76,99493634	115	54,5818
13	77,56475603	100	53,5853
110	78,15782003	65	53,35776
43	79,74518941	54	53,30848
115	80,94858682	98	53,18595
65	81,07927446	49	52,88357
60	81,20259918	19	52,22811
61	81,44430659	70	52,13409
78	81,47485627	25	52,01509
103	82,06347481	112	49,78626
29	83,5638981	95	47,41488
40	84,91457074	101	47,13069
109	85,23746287	61	46,43612
25	89,29486667	10	45,78604
9	89,81492315	120	45,22512
75	90,89111737	5	43,84592
104	91,24447854	40	43,69458
4	94,79446825	113	42,28037
114	97,83331970	56	41,34688
33	98,08671578	30	41,27017
14	99,63376966	18	40,42882
18	102,2421021	71	40,24311
30	102,3493845	117	39,74655
112	102,8301631	116	39,36548
118	103,2995477	20	37,67465
120	104,0402974	111	36,40538
121	104,1153009	26	34,95889

113	105,0682255	15	32,76025
10	105,2423093	114	31,72505
26	107,6908387	118	28,23778
5	108,9028659	11	27,16406
119	112,1162439	119	26,00418
15	114,0792881	6	23,71793
6	116,0062375	21	18,02277
11	116,6943116	124	11,2238
124	117,859183	121	9,451429
125	123,1968097	122	5,416825
122	123,2482707	123	5,401125
123	123,3059376	125	2,895013
126	126	126	1

L'ordinamento finale che ne risulta è il seguente:

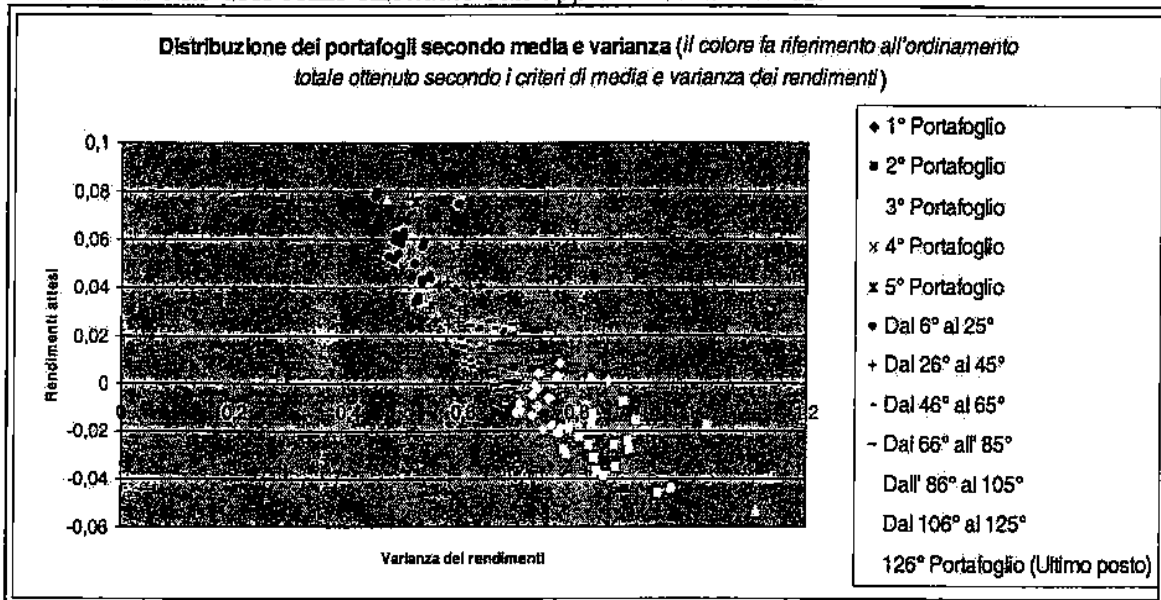
Ordinamento finale		2 criteri						Media	Varianza
Pos.	Flusso	Composizione del portafoglio							
		B.Intesa	Eni	Fiat	Mediaset	Telecom			
1	47	109,42	0,1	0,4	0,1	0,1	0,3	0,07823	0,44242
2	53	109,337	0,1	0,5	0,1	0,1	0,2	0,07949	0,44727
3	37	105,526	0,1	0,3	0,1	0,1	0,4	0,07697	0,46482
4	56	104,857	0,1	0,6	0,1	0,1	0,1	0,08075	0,47937
5	22	95,1357	0,1	0,2	0,1	0,1	0,5	0,07571	0,51447
6	48	94,222	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2	0,06167	0,47962
7	50	92,8913	0,1	0,4	0,2	0,1	0,2	0,05985	0,48036
8	54	92,4092	0,1	0,5	0,1	0,2	0,1	0,06293	0,49493
9	38	91,3983	0,1	0,3	0,1	0,2	0,3	0,06041	0,49157
10	55	90,8426	0,1	0,5	0,2	0,1	0,1	0,06111	0,49658
11	41	90,2282	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3	0,05859	0,49139
12	88	89,6053	0,2	0,4	0,1	0,1	0,2	0,05269	0,46868
13	91	87,7823	0,2	0,5	0,1	0,1	0,1	0,05395	0,48607
14	82	87,0189	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3	0,05143	0,47853
15	23	80,7698	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4	0,05915	0,53076
16	27	79,8584	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4	0,05733	0,52968
17	72	78,1332	0,2	0,2	0,1	0,1	0,4	0,05017	0,51564
18	1	70,7903	0,1	0,1	0,1	0,1	0,6	0,07445	0,59138
19	51	68,9218	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1	0,04329	0,5281
20	42	67,6287	0,1	0,3	0,2	0,2	0,2	0,04203	0,52868
21	49	66,1229	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1	0,04511	0,54288
22	39	64,5373	0,1	0,3	0,1	0,3	0,2	0,04385	0,54436
23	89	63,9502	0,2	0,4	0,1	0,2	0,1	0,03613	0,52256
24	90	63,3608	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1	0,03761	0,51813
25	83	62,9161	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2	0,03487	0,52196
26	85	62,7117	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2	0,03305	0,51662
27	2	58,5588	0,1	0,1	0,1	0,2	0,5	0,05789	0,59721
28	28	53,062	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,04077	0,55651
29	7	57,9101	0,1	0,1	0,2	0,1	0,5	0,05607	0,59522
30	52	57,4783	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1	0,04147	0,55995

31°	57	572565	0,2	0,1	0,1	0,1	0,5	0,04891	0,58001
32°	44	564439	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2	0,04021	0,55962
33°	24	540249	0,1	0,2	0,1	0,3	0,3	0,04259	0,5731
34°	76	539039	0,2	0,2	0,2	0,1	0,3	0,04179	0,54237
35°	73	537067	0,2	0,2	0,1	0,2	0,3	0,03961	0,54861
36°	111	462402	0,3	0,4	0,1	0,1	0,1	0,02745	0,55275
37°	31	461322	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3	0,03895	0,58654
38°	108	457721	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2	0,02589	0,55007
39°	8	384482	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4	0,03951	0,61159
40°	102	361159	0,3	0,2	0,1	0,1	0,3	0,02463	0,57463
41°	62	35032	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4	0,03053	0,59536
42°	58	345093	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4	0,03235	0,60252
43°	3	341848	0,1	0,1	0,1	0,3	0,4	0,04133	0,62909
44°	43	309862	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1	0,02547	0,59202
45°	86	294132	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1	0,01649	0,57059
46°	12	265214	0,1	0,1	0,3	0,1	0,4	0,03769	0,64071
47°	45	240381	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1	0,02365	0,60745
48°	29	239283	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2	0,02421	0,60939
49°	84	238637	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1	0,01831	0,59144
50°	77	226666	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,01523	0,58588
51°	40	224015	0,1	0,3	0,1	0,4	0,1	0,0273	0,62321
52°	87	184764	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1	0,01467	0,59637
53°	92	172933	0,3	0,1	0,1	0,1	0,4	0,02337	0,62645
54°	32	171388	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2	0,02239	0,62391
55°	74	170296	0,2	0,2	0,1	0,3	0,2	0,01705	0,60763
56°	25	145493	0,1	0,2	0,1	0,4	0,2	0,02604	0,64149
57°	79	121628	0,2	0,2	0,3	0,1	0,2	0,01341	0,61074
58°	110	997743	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1	0,00751	0,59967
59°	109	800284	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1	0,00933	0,61017
60°	9	70634	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3	0,02235	0,65401
61°	63	674009	0,2	0,1	0,2	0,2	0,3	0,01397	0,62841
62°	105	402703	0,3	0,2	0,2	0,1	0,2	0,00625	0,61287
63°	103	197903	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2	0,00807	0,62428
64°	46	078128	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1	0,02183	0,6695
65°	13	06905	0,1	0,1	0,3	0,2	0,3	0,02113	0,66762
66°	59	054891	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3	0,01579	0,65108
67°	4	21078	0,1	0,1	0,1	0,4	0,3	0,02473	0,68703
68°	66	37474	0,2	0,1	0,3	0,1	0,3	0,01215	0,65237
69°	34	58025	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2	0,02057	0,68505
70°	96	11312	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	0,00499	0,65332
71°	93	3603	0,3	0,1	0,1	0,2	0,3	0,00531	0,66564
72°	78	18009	0,2	0,2	0,2	0,3	0,1	0,0013	0,65543
73°	16	19701	0,1	0,1	0,4	0,1	0,3	0,01931	0,72786
74°	30	20412	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1	0,00766	0,68832
75°	33	21845	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1	0,00533	0,68733
76°	80	22678	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1	0,0031	0,66479
77°	121	24574	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1	0,00035	0,67941

78	75	28718	0,2	0,2	0,1	0,4	0,1	0,0005	0,6927
79	118	29632	0,4	0,2	0,1	0,1	0,2	0,0009	0,69143
80	64	29917	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2	0,0023	0,68751
81	10	31637	0,1	0,1	0,2	0,4	0,2	0,0064	0,72248
82	26	32185	0,1	0,2	0,1	0,5	0,1	0,0093	0,73593
83	106	32323	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0,0103	0,67306
84	14	32993	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2	0,0153	0,72058
85	67	34205	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2	0,0224	0,69596
86	35	35836	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1	0,0240	0,73296
87	104	36216	0,3	0,2	0,1	0,3	0,1	0,0335	0,69998
88	60	39319	0,2	0,1	0,1	0,4	0,2	0,0303	0,72569
89	107	40227	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1	0,0312	0,69276
90	81	41983	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1	0,005	0,72077
91	112	42226	0,4	0,1	0,1	0,1	0,3	0,0022	0,73071
92	5	42576	0,1	0,1	0,1	0,5	0,2	0,00322	0,77101
93	97	42801	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2	0,0116	0,70305
94	17	46532	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2	0,00275	0,76531
95	94	49347	0,3	0,1	0,1	0,3	0,2	0,0097	0,73088
96	99	49766	0,3	0,1	0,3	0,1	0,2	0,0134	0,72184
97	69	51523	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2	0,0062	0,75103
98	120	59936	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1	0,0193	0,74118
99	36	60233	0,1	0,2	0,5	0,1	0,1	0,00219	0,82523
100	119	66023	0,4	0,2	0,1	0,2	0,1	0,0175	0,75776
101	19	67623	0,1	0,1	0,5	0,1	0,2	0,0093	0,85666
102	68	67544	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1	0,021	0,7656
103	15	67844	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1	0,012	0,7996
104	65	67353	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1	0,0191	0,77267
105	115	68129	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2	0,0205	0,76909
106	11	69399	0,1	0,1	0,2	0,5	0,1	0,0102	0,81701
107	113	70694	0,4	0,1	0,1	0,2	0,2	0,0167	0,78658
108	18	7499	0,1	0,1	0,4	0,3	0,1	0,0133	0,82881
109	98	76107	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1	0,0231	0,77883
110	61	77547	0,2	0,1	0,1	0,5	0,1	0,0173	0,82636
111	70	77743	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1	0,0228	0,80517
112	100	78127	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1	0,0299	0,78211
113	6	78474	0,1	0,1	0,1	0,6	0,1	0,0033	0,88104
114	95	84015	0,3	0,1	0,1	0,4	0,1	0,0263	0,82217
115	20	87282	0,1	0,1	0,5	0,2	0,1	0,0156	0,90465
116	101	89397	0,3	0,1	0,4	0,1	0,1	0,0313	0,83202
117	125	90223	0,5	0,2	0,1	0,1	0,1	0,0264	0,86605
118	71	91755	0,2	0,1	0,5	0,1	0,1	0,0246	0,89135
119	116	9352	0,4	0,1	0,2	0,2	0,1	0,0371	0,8355
120	122	94163	0,5	0,1	0,1	0,1	0,2	0,0277	0,89278
121	117	96646	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1	0,0339	0,84913
122	114	96819	0,4	0,1	0,1	0,3	0,1	0,0353	0,8685
123	21	10583	0,1	0,1	0,6	0,1	0,1	0,0174	1,02712
124	124	1101	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1	0,0461	0,94268

125	123	10,46	0,5	0,1	0,1	0,2	0,1	0,0443	0,96533
126	126	20,35	0,6	0,1	0,1	0,1	0,1	-0,0532	1,11266

La rappresentazione che segue presenta la distribuzione dei 126 portafogli indagati. In particolare, la rappresentazione grafica riporta l'ordinamento così come effettuato dall'usuale approccio media-varianza, mentre la rappresentazione per colori riporta l'ordinamento così come effettuato dall'approccio MURAME.



Si presenta ora l'ordinamento determinato considerando i quattro criteri:

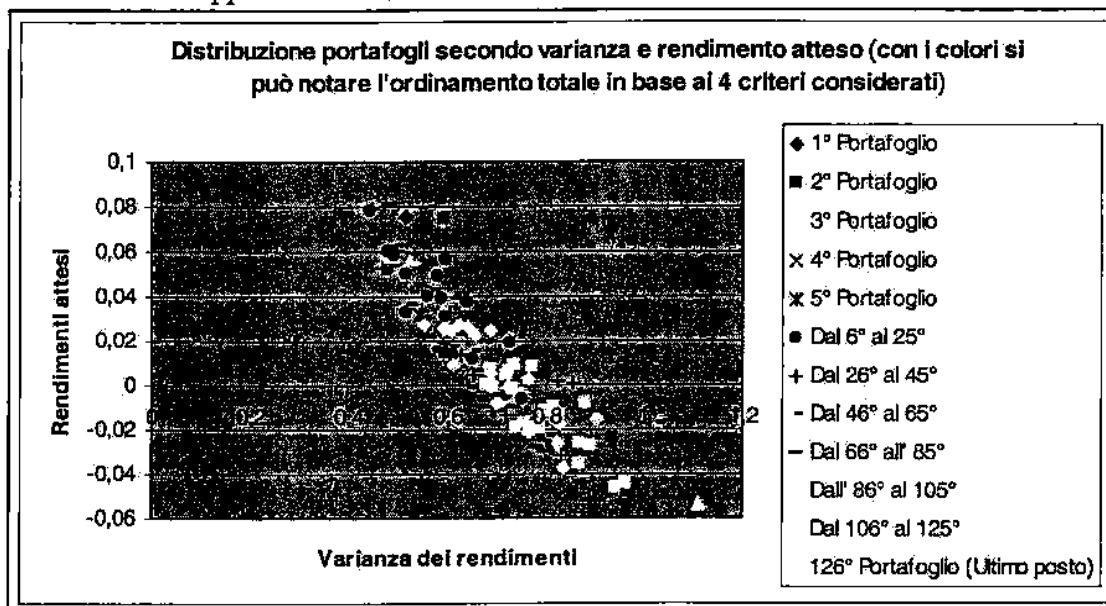
Ordinamento finale	Composiz. del portafogli.	4 Criteri					Media	Varianza	Skewness	Kurtosis	
		A	B	C	D	E					
1°	22	65,893278	0,1	0,2	0,1	0,1	0,5	0,0757	0,51447	-0,0666	0,9106
2°	1	63,799015	0,1	0,1	0,1	0,1	0,6	0,0744	0,59138	-0,0232	1,2594
3°	27	58,859729	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4	0,0573	0,52968	-0,0506	0,9435
4°	37	58,151519	0,1	0,3	0,1	0,1	0,4	0,0777	0,46482	-0,0869	0,7208
5°	76	57,021755	0,2	0,2	0,2	0,1	0,3	0,0318	0,54237	-0,036	0,937
6°	41	56,825402	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3	0,0586	0,49139	-0,0698	0,7867
7°	72	54,416909	0,2	0,2	0,1	0,1	0,4	0,0502	0,51564	-0,0611	0,8641
8°	62	54,259007	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4	0,0305	0,59536	-0,0124	1,1798
9°	7	53,995684	0,1	0,1	0,2	0,1	0,5	0,0561	0,59522	-0,024	1,2417
10°	79	53,38946	0,2	0,2	0,3	0,1	0,2	0,0134	0,61074	-0,0013	1,1654
11°	57	52,681163	0,2	0,1	0,1	0,1	0,5	0,0489	0,58001	-0,0292	1,1584
12°	44	52,246313	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2	0,0402	0,55962	-0,0402	0,9919
13°	31	51,263316	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3	0,0389	0,58654	-0,0251	1,1307
14°	66	50,557888	0,2	0,1	0,3	0,1	0,3	0,0122	0,65237	0,01719	1,375
15°	85	49,657046	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2	0,033	0,51662	-0,0534	0,8417
16°	50	48,04818	0,1	0,4	0,2	0,1	0,2	0,0598	0,48036	-0,0861	0,7383
17°	87	47,55536	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1	0,0147	0,59637	-0,0189	1,1009
18°	69	45,99799	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2	-0,006	0,75103	-0,05641	1,771
19°	12	45,91411	0,1	0,1	0,3	0,1	0,4	0,0377	0,64071	-0,0059	1,404
20°	82	45,634822	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3	0,0514	0,47853	-0,0858	0,7304
21°	47	44,722232	0,1	0,4	0,1	0,1	0,3	0,0782	0,44242	-0,1074	0,6489

22°	81	43771819	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1	-0,005	0,72077	0,08972	1,5887
23°	34	42778918	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2	-0,0206	0,68505	0,01294	1,4996
24°	16	4208867	0,1	0,1	0,4	0,1	0,3	-0,0193	0,72786	0,02818	1,7611
25°	52	40359082	-0,1	0,4	0,3	0,1	0,1	-0,0415	0,55995	-0,0557	0,9626
26°	99	39321994	0,3	0,1	0,3	0,1	0,2	-0,013	0,72184	0,03879	1,5788
27°	46	3894982	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1	-0,0218	0,6695	0,0019	1,3761
28°	23	38596748	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4	-0,0581	0,53076	-0,076	0,9882
29°	90	36494506	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1	-0,0343	0,51813	-0,0752	0,8685
30°	36	35693644	0,1	0,2	0,5	0,1	0,1	-0,022	0,82523	0,0504	2,1111
31°	2	34678491	0,1	0,1	0,1	0,2	0,5	-0,0579	0,59721	-0,0744	1,3237
32°	96	34098653	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	-0,005	0,65332	-0,0024	1,3196
33°	101	34018929	0,3	0,1	0,4	0,1	0,1	-0,032	0,83202	0,08502	2,0619
34°	19	33848202	0,1	0,1	0,5	0,1	0,2	-0,0009	0,85666	0,07496	2,3615
35°	73	33844372	0,2	0,2	0,1	0,2	0,3	-0,0336	0,54861	-0,0637	0,9737
36°	58	33541323	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4	-0,0324	0,60252	-0,0336	1,2518
37°	38	32445472	0,1	0,3	0,1	0,2	0,3	-0,0604	0,49157	-0,1011	0,8098
38°	55	31399835	0,1	0,5	0,2	0,1	0,1	-0,0611	0,49658	-0,1039	0,7815
39°	71	30352681	0,2	0,1	0,5	0,1	0,1	-0,025	0,89135	0,10214	2,4284
40°	53	29290532	0,1	0,5	0,1	0,1	0,2	-0,0795	0,44727	-0,1261	0,6699
41°	88	29197913	0,2	0,4	0,1	0,1	0,2	-0,0527	0,46868	-0,1075	0,7236
42°	63	2842933	0,2	0,1	0,2	0,2	0,3	-0,014	0,62841	-0,0202	1,3372
43°	77	27756262	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	-0,0152	0,58588	-0,0414	1,1121
44°	83	26978093	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2	-0,0349	0,52196	-0,0861	0,8578
45°	107	2592147	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1	-0,012	0,69276	0,0127	1,4534
46°	42	25148189	0,1	0,3	0,2	0,2	0,2	-0,042	0,52868	-0,0871	0,9323
47°	28	24149361	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	-0,0408	0,55651	-0,0716	1,0761
48°	105	23044421	0,3	0,2	0,2	0,1	0,2	-0,0063	0,61287	-0,0344	1,1475
49°	48	21641148	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2	-0,0617	0,47962	-0,118	0,7507
50°	86	21521057	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1	-0,0165	0,57059	-0,0582	1,0388
51°	92	20519312	0,3	0,1	0,1	0,1	0,4	-0,0234	0,62645	-0,0403	1,2451
52°	51	17808912	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1	-0,0493	0,5281	-0,0996	0,9007
53°	67	17397788	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2	-0,004	0,69596	0,00448	1,6067
54°	8	17324787	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4	-0,0395	0,61159	-0,0487	1,3619
55°	100	16842354	-0,3	0,1	0,3	0,2	0,1	-0,03	0,78211	0,04011	1,8817
56°	80	1619779	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1	-0,003	0,66479	-0,0124	1,421
57°	21	13146884	0,1	0,1	0,6	0,1	0,1	-0,017	1,02712	0,13135	3,2878
58°	102	13009904	0,3	0,2	0,1	0,1	0,3	-0,0246	0,57463	-0,0769	1,0154
59°	97	12986978	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2	-0,012	0,70305	0,00181	1,5302
60°	89	94569133	0,2	0,4	0,1	0,2	0,1	-0,0361	0,52256	-0,1055	0,874
61°	59	9265273	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3	-0,0158	0,65108	-0,0329	1,4374
62°	70	9204545	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1	-0,023	0,80517	0,03698	2,0956
63°	45	84422863	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1	-0,0287	0,60745	-0,0625	1,2059
64°	54	83279865	0,1	0,5	0,1	0,2	0,1	-0,0629	0,49493	-0,1331	0,7892
65°	74	7677857	0,2	0,2	0,1	0,3	0,2	-0,0171	0,60763	-0,0611	1,1748
66°	56	65069283	0,1	0,6	0,1	0,1	0,1	-0,0807	0,47937	-0,1475	0,7752
67°	91	60754629	0,2	0,5	0,1	0,1	0,1	-0,0539	0,48607	-0,1307	0,8264
68°	32	60114321	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2	-0,0224	0,62391	-0,0513	1,3256

69	93	57307083	0,3	0,1	0,1	0,2	0,3	0,0068	0,66564	0,0817	1,3813
70	110	55324485	0,3	0,3	0,2	0	0,1	0,0075	0,59967	0,062	1,1431
71	3	29530099	0,1	0,1	0,1	0,3	0,4	0,0413	0,62909	0,0618	1,4735
72	13	25934301	0,1	0,1	0,3	0,2	0,3	0,021	0,66762	0,0359	1,5827
73	24	24603175	0,1	0,2	0,1	0,3	0,3	0,0426	0,5731	0,0926	1,1473
74	84	0160122	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1	0,0183	0,59144	0,0819	1,0798
75	39	0669983	0,1	0,3	0,1	0,3	0,2	0,0469	0,54436	0,027	0,9798
76	64	1534897	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2	0,013	0,68751	0,0221	1,6022
77	106	2266249	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0,01	0,67306	0,0275	1,3881
78	98	3719629	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1	0,028	0,77883	0,0542	1,8704
79	117	4225385	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1	0,039	0,84913	0,0379	2,164
80	103	5213044	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2	0,0084	0,62428	0,0575	1,1774
81	78	5710333	0,2	0,2	0,2	0,3	0,1	0,001	0,65543	0,0415	1,3964
82	94	6463397	0,3	0,1	0,1	0,3	0,2	0,01	0,73088	0,0156	1,629
83	108	7068886	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2	0,0259	0,55007	0,1094	0,9617
84	35	7747447	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1	0,004	0,73296	0,0201	1,7724
85	49	9537505	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1	0,0451	0,54288	0,1266	0,9365
86	20	1067183	0,1	0,1	0,5	0,2	0,1	0,016	0,90465	0,02895	2,6994
87	17	1162305	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2	0,0028	0,76531	0,0089	2,0096
88	60	1431991	0,2	0,1	0,1	0,4	0,2	0,004	0,72569	0,0252	1,7486
89	68	1588538	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1	0,021	0,7656	0,0921	1,9684
90	95	1633227	0,3	0,1	0,1	0,4	0,1	0,026	0,82217	0,0303	2,0293
91	29	1699109	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2	0,0242	0,60939	0,0392	1,3049
92	43	1812572	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1	0,0255	0,59202	0,1016	1,1757
93	9	220026	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3	0,023	0,65401	0,0694	1,5801
94	75	2529131	0,2	0,2	0,1	0,4	0,1	0,0005	0,6927	0,0524	1,5043
95	109	2535818	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1	0,0093	0,61017	0,039	1,155
96	115	2636679	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2	0,021	0,76909	0,02	1,8095
97	65	2772151	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1	0,019	0,77267	0,017	2,0118
98	104	2822466	0,3	0,2	0,1	0,3	0,1	0,008	0,69998	0,051	1,4538
99	4	3369602	0,1	0,1	0,1	0,4	0,3	0,0246	0,68703	0,0744	1,7343
100	61	3500819	0,2	0,1	0,1	0,5	0,1	0,017	0,82636	0,0097	2,2321
101	116	3553268	0,4	0,1	0,2	0,2	0,1	0,037	0,8355	0,0038	2,1122
102	111	363329	0,3	0,4	0,1	0,1	0,1	0,0271	0,55275	0,1122	1,0581
103	25	3727977	0,1	0,2	0,1	0,4	0,2	0,026	0,64149	0,029	1,4167
104	33	4004093	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1	0,0353	0,68733	0,0738	1,6385
105	40	4121999	0,1	0,3	0,1	0,4	0,1	0,0273	0,62321	0,1206	1,2629
106	14	4292104	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2	0,0046	0,72058	0,0617	1,8793
107	112	5302439	0,4	0,1	0,1	0,1	0,3	0,002	0,73071	0,0776	1,668
108	120	5381518	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1	0,019	0,74118	0,0671	1,7431
109	10	5945627	0,1	0,1	0,2	0,4	0,2	0,0064	0,72248	0,0851	1,9258
110	30	6107922	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1	0,0077	0,68832	0,1027	1,6625
111	18	6131328	0,1	0,1	0,4	0,3	0,1	0,014	0,82881	0,0416	2,4028
112	113	6278786	0,4	0,1	0,1	0,2	0,2	0,019	0,78658	0,059	1,8835
113	5	6505695	0,1	0,1	0,1	0,5	0,2	0,0082	0,77101	0,081	2,1451
114	114	6610827	0,4	0,1	0,1	0,3	0,1	0,035	0,8685	0,0311	2,2422
115	26	7273195	0,1	0,2	0,1	0,5	0,1	0,0095	0,73593	0,1078	1,8386

116	118	77,06177	0,4	0,2	0,1	0,1	0,2	9E-04	0,69143	-0,1287	1,5323
117	15	59,81994	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1	-0,012	0,7996	-0,052	2,3268
118	119	86,11205	0,4	0,2	0,1	0,2	0,1	-0,017	0,75776	-0,1105	1,7902
119	11	89,53025	0,1	0,1	0,2	0,5	0,1	-0,01	0,81701	-0,0945	2,4414
120	6	92,55331	0,1	0,1	0,1	0,6	0,1	-0,008	0,88104	-0,0805	2,7579
121	121	94,56937	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1	0,0004	0,67941	-0,1768	1,6023
122	124	93,6854	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1	-0,046	0,94268	0,0814	2,911
123	122	91,8374	0,5	0,1	0,1	0,1	0,2	-0,028	0,89278	-0,1621	2,6881
124	123	97,9046	0,5	0,1	0,1	0,2	0,1	-0,044	0,96533	-0,1368	3,0421
125	125	120,3018	0,5	0,2	0,1	0,1	0,1	-0,026	0,86605	0,2374	2,6954
126	126	125	0,6	0,1	0,1	0,1	0,1	-0,053	1,11266	-0,3149	4,6791

Anche per questa seconda applicazione (nella quale si considerano i 4 criteri) si fornisce una rappresentazione dei 126 portafogli indagati. In particolare, la rappresentazione grafica riporta ancora l'ordinamento così come effettuato dall'usuale approccio media-varianza, mentre la rappresentazione per colori riporta l'ordinamento così come effettuato dall'approccio MURAME utilizzando i 4 criteri.



Infine, si presenta una tabella riassuntiva degli ordinamenti ottenuti in entrambe le applicazioni.

#	In base ai criteri di		In base ai criteri di	
	Media e Varianza		Media, Varianza, Skewness, Kurtosis	
1	18° posto	2° posto	(discreta variazione)	
2	27° posto	31° posto		
3	43° posto	71° posto		
4	67° posto	99° posto		
5	92° posto	113° posto		
6	113° posto	120° posto		
7	29° posto	9° posto		
8	39° posto	54° posto		

9	60° posto	93° posto	
10	81° posto	109° posto	
11	106° posto	119° posto	
12	46° posto	19° posto	
13	65° posto	72° posto	
14	84° posto	106° posto	
15	103° posto	117° posto	
16	73° posto	24° posto	
17	94° posto	87° posto	
18	108° posto	111° posto	
19	101° posto	34° posto	
20	115° posto	86° posto	
21	123° posto	57° posto	
22	5° posto	1° posto	(piccola variazione)
23	15° posto	28° posto	
24	33° posto	73° posto	
25	56° posto	103° posto	
26	82° posto	115° posto	
27	16° posto	3° posto	
28	28° posto	47° posto	
29	48° posto	91° posto	
30	74° posto	110° posto	
31	37° posto	13° posto	
32	54° posto	68° posto	
33	75° posto	104° posto	
34	69° posto	23° posto	
35	86° posto	84° posto	
36	99° posto	30° posto	
37	3° posto	4° posto	(quasi nessuna variazione)
38	9° posto	37° posto	
39	22° posto	75° posto	
40	51° posto	105° posto	
41	11° posto	6° posto	
42	20° posto	46° posto	
43	44° posto	92° posto	
44	32° posto	12° posto	
45	47° posto	63° posto	
46	64° posto	27° posto	
47	1° posto	21° posto	(discreta variazione)
48	6° posto	49° posto	
49	21° posto	85° posto	
50	7° posto	16° posto	
51	19° posto	52° posto	
52	30° posto	25° posto	
53	2° posto	40° posto	(grande variazione)
54	8° posto	64° posto	
55	10° posto	38° posto	

56	4° posto	66° posto	(notevole variazione)
57	31° posto	11° posto	
58	42° posto	36° posto	
59	66° posto	61° posto	
60	88° posto	88° posto	
61	110° posto	100° posto	
62	41° posto	8° posto	
63	61° posto	42° posto	
64	80° posto	76° posto	
65	104° posto	97° posto	
66	68° posto	14° posto	
67	85° posto	53° posto	
68	102° posto	89° posto	
69	97° posto	18° posto	
70	111° posto	62° posto	
71	118° posto	39° posto	
72	17° posto	7° posto	
73	35° posto	35° posto	
74	55° posto	65° posto	
75	78° posto	94° posto	
76	34° posto	5° posto	(grande variazione)
77	50° posto	43° posto	
78	72° posto	81° posto	
79	57° posto	10° posto	
80	76° posto	56° posto	
81	90° posto	22° posto	
82	14° posto	20° posto	
83	25° posto	44° posto	
84	49° posto	74° posto	
85	26° posto	15° posto	
86	45° posto	50° posto	
87	52° posto	17° posto	
88	12° posto	41° posto	
89	23° posto	60° posto	
90	24° posto	29° posto	
91	13° posto	67° posto	
92	53° posto	51° posto	
93	71° posto	69° posto	
94	95° posto	82° posto	
95	114° posto	90° posto	
96	70° posto	32° posto	
97	93° posto	59° posto	
98	109° posto	78° posto	
99	96° posto	26° posto	
100	112° posto	55° posto	
101	116° posto	33° posto	
102	40° posto	58° posto	

103	63° posto	80° posto	
104	87° posto	98° posto	
105	62° posto	48° posto	
106	83° posto	77° posto	
107	89° posto	45° posto	
108	38° posto	83° posto	
109	59° posto	95° posto	
110	58° posto	70° posto	
111	36° posto	102° posto	
112	91° posto	107° posto	
113	107° posto	112° posto	
114	122° posto	114° posto	
115	105° posto	96° posto	
116	119° posto	101° posto	
117	121° posto	79° posto	
118	79° posto	116° posto	
119	100° posto	118° posto	
120	98° posto	108° posto	
121	77° posto	121° posto	
122	120° posto	123° posto	
123	125° posto	124° posto	(quasi nessuna variazione)
124	124° posto	122° posto	(quasi nessuna variazione)
125	117° posto	125° posto	
126	126° posto	126° posto	(nessuna variazione)

Con queste applicazioni abbiamo ottenuto un ordinamento totale dei 126 portafogli presi in esame secondo le due classi di criteri considerati. Nell'approccio non si utilizza alcuna funzione di utilità poiché l'ordinamento che essa comporterebbe è implicito nel risultato di queste applicazioni. Inoltre, la soggettività che caratterizza l'operatore economico (che, usualmente, si riassume nella tipologia di funzione di utilità utilizzata da quest'ultimo) viene qui riassunta tramite i valori soggettivi attribuiti alle soglie ed ai pesi.

Il secondo risultato relativo a queste applicazioni si ottiene dal confronto tra l'ordinamento ottenuto utilizzando i 2 criteri con quello ottenuto utilizzando i 4 criteri; infatti, in tali ordinamenti l'ordine dei portafogli varia in maniera significativa. Ciò conferma quanto già affermato, ovvero che i momenti di ordine superiore al secondo possono essere rilevanti nella valutazione di portafoglio. Naturalmente, tali variazioni negli ordinamenti potrebbero a loro volta variare al variare dei valori delle soglie e dei pesi.

7 CONCLUSIONI

In questo lavoro si è preso in considerazione il modello di selezione di portafoglio alla Markowitz, evidenziando come questo modello si basi solo sui primi due momenti della distribuzione dei rendimenti. Se, invece, oltre alla media ed alla varianza, si considerano anche la skewness e la kurtosis, si è di fronte ad un problema di scelta multicriterio.

Ovviamente, oltre ai criteri utilizzati nelle applicazioni presentate, se ne possono prendere in considerazione anche altri di carattere istituzionale, dettati dalle caratteristi-

che tecniche del mercato investigato, dai costi, Infatti, il metodo multicriteriale qui utilizzato, MURAME, permette di considerare ogni criterio singolarmente per buona parte della procedura, aggregandoli solo nella fase finale; quindi, non sono necessarie particolari "affinità" e/o legami tra i criteri stessi (infatti, i criteri possono avere unità di misura diverse, e possono essere sia quantitativi che qualitativi).

Ancora, a differenza del classico criterio di scelta media-varianza, con MURAME si riesce a ottenere un ordinamento *totale* di tutti i portafogli considerati.

In questo tipo di approccio, la funzione di utilità dell'investitore non compare, ma le preferenze soggettive di quest'ultimo vengono espresse mediante la specificazione delle soglie di preferenza, di indifferenza e di veto, mediante la specificazione dei pesi.

In relazione all'obiettivo che si è perseguito in questo lavoro, ci sono dei fattori significativi che hanno indirizzato verso la scelta di MURAME piuttosto che verso altri metodi multicriteriali validi e conosciuti. In primo luogo, la possibilità di poter incorporare l'incertezza e l'imprecisione del decisore mediante l'uso delle soglie di indifferenza e preferenza, è abbastanza "attraente". In particolare, la sensibilità delle classificazioni ai cambiamenti riguardanti le soglie ed i pesi (che a prima vista potrebbe sembrare "scomoda"), dovrebbero invece essere vista come un punto di forza della robustezza della procedura di *ranking*.

Altra caratteristica di MURAME (che lo distingue da altri metodi di multicriteriali) è quella di essere fondamentalmente non compensativo, ovvero a dire che un punteggio molto brutto conseguito in un dato criterio non può essere compensato da buoni punteggi conseguiti in altri criteri.

Un'ulteriore caratteristica originale sta nel fatto che questo modello permette l'incomparabilità.

La scelta di MURAME è stata anche influenzata dalle sue applicazioni di successo, come quella relativa al progetto energetico in Armenia³⁰, oltre che alle applicazioni assai frequenti e con buoni risultati dei due metodi, ELECTRE e PROMETHEE, sui quali MURAME si basa³¹.

Concludendo, si potrebbe obiettare che comunque vi sono anche altri tipi di approcci per affrontare il problema considerato in questo lavoro, ognuno dei quali presenta diversi tipi di vantaggi. A ciò non si può dar torto: "Ci sono ovvie differenze tra i metodi, ma non è ovvio che un metodo sia più forte di un altro."³²

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

ARDITTI F.D., LEVY H., "Portfolio Efficiency Analysis in Three Moments: The Multi Period Case", *Journal of Finance*, 30, 797-809, 1975.

ARROW K.J., "Aspects of the Theory of risk-bearing", Yrjo Johnsson Lectures, Helsinki, 1965.

³⁰ Goletsis Y. e Psarras, J. (2001), "Multicriteria project ranking in the Armenian energy sector", 53rd Meeting of the European Working Group 'Multicriteria Aid for Decision', Athens.

³¹ Si veda, ad esempio, Roy et al. (1986) e Hokkanen J. e Salminen P. (1994).

³² Citato in Simpson (1996), pag. 928.

- BARLOW J., *"Excel Models For Business and Operations Management"*, John Wiley & Sons, 1999.
- BECKMANN M., KRELLE W., *"Essays and Surveys on Multiple Criteria Decision Making"*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 209, Verlag, Berlin.
- BRANS J.P., VINCKE P., *"A Preference Ranking Organisation Method: the PROMETHEE method for Multiple Criteria Decision Making"*, Management Science, Journal of the Institute of Management Sciences, 31(6), 647-656, 1985.
- BRANS J.P., MARESCHAL B., *"PROMETHEE V: MCDM Problems with Segmentation Constraints"*, INFOR, Information Systems and Operational Research, 30(2), 1992.
- BRANS J.P., VINCKE P., MARESCHAL B., *"How to select and how to rank projects: The PROMETHEE Method"*, European Journal of Operational Research, Mathematical Programming Multiple Criteria Decision Making, 24(2), 228-238, 1986.
- BUCHANAN J., SHEPPARD P., VANDERPOOTEN D., *"Project Ranking Using ELECTRE IIF"*, Working Paper dell'Università di Waikato, Hamilton, Nuova Zelanda, 1999.
- CANESTRELLI E., NARDELLI C., *"Criteri per la Selezione del Portafoglio"*, G. Giappichelli, Torino, 1998.
- CASTAGNOLI E., PECCATI L., *"Introduzione alla Selezione del Portafoglio"*, Coop. Lorenzo Milani, Milano-Torino, 1991.
- CHUNHACHINDA P., DANDAPANI K., HAMID S., PRAKASH A.J., *"Portfolio Selection and Skewness: Evidence from International Stock Markets"*, Journal of Banking & Finance, 21, 143-167, 1997.
- DE ATHAYDE G.M., FLORES Jr. R.G., *"Finding a Maximum Skewness Portfolio – a General Solution to Three Moments Portfolio Choice"*, Escola de Pós-Graduação em Economia, Rio de Janeiro, Brasile, 2001.
- EHRGOTT M., KLAMROTH K., SCHWEHM C., *"An MCDM Approach to Portfolio Optimization"*, European Journal of Operational Research, 155, 2004.
- FAMA E., *"The Behaviour of Stock Market Prices"*, Journal of Business, 38, 34-105, 1965.
- GOICOEHEA A., HANSEN DON. R., DUCKSTEIN L., *"Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications"*, John Wiley & Sons, 1982.
- GOLETSIS Y., DIMITRIS TH., PSARRAS J., *"Multicriteria Judgments for Project Ranking: an Integrated Methodology"*, Economic and Financial Modelling, Autumn 2001.
- GOLETSIS Y., PSARRAS J., *"Multicriteria Project Ranking in the Armenian Energy Sector"*, 53rd Meeting of the European Working Group 'Multicriteria Aid for Decisions', Athens, 2001. Sito internet: www.liee.chemeng.ntua.gr/MCDA-53/Program.htm.
- HANOK G. and LEVY H., *"Efficient Portfolio Selection with Quadratic and Cubic Utility"*, Journal of Business, 43, 485-489, 1970.
- HOKKANEN J. and SALMINEN P., *"The Choice of a Solid Waste Management System by Using ELECTRE III Decision-aid Method"*. In M. Paruccini (Ed.) "Ap-

- plying Multicriteria Aid for Decision to Environmental Management*", Kluwer Academic Publishers, 1994.
- HWANG C., MASUD A., "Multiple Objective Decision Making, Methods and Applications", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 164, Springer-Verlag, Berlin.
- HWANG C., YOON K., "Multiple Attribute Decision Making, Methods and Applications", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 186, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- JEAN W., "More on Multidimensional Portfolio Analysis", Journal of Financial and Quantitative Analysis", 8, 475-490, 1971.
- JEAN W., "The Extension of Portfolio Analysis to Three or More Parameters", Journal of Financial and Quantitative Analysis", 6, 505-515, 1973.
- JONATHAN E., INGERSOLL, Jr., "Theory of Financial Decision Making", Studies in Financial Economics, Rowman & Littlefield, 1987.
- JONDEAU E., RÖCKINGER M., "Conditional Volatility, Skewness, and Kurtosis: Existence, Persistence and Comovements", Journal of Economic Dynamics and Control, 27, 1699-1737, 2003.
- KONNO H., LUENBENGER R., MULVEY J.M., "Financial Engineering", Annals of Operations Research, 45, 1993.
- KRAUS A., LITZENBERGER R., "Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets", Journal of Finance, 33, 303-310, 1976.
- LAI T., "Portfolio Selection with Skewness", Review of Quantitative Finance and Accounting, 1, 293-305, 1991.
- LANDENNA G. "Fondamenti di statistica descrittiva", Il Mulino, Bologna, 1994.
- LEVY H. and MARSHALL S., "Investment & Portfolio Analysis", Wiley Series in Finance, 1972.
- LEVY H. and SARNAT M., "Forecasts of Future Prices, Unbiased Markets and Martingale Models", Journal of Business, 39, 242-255, 1966.
- LEVY H. and SARNAT M., "Investment and Portfolio Analysis", New York, Wiley, 1972.
- LUCEY B.M., TULLY E., "Portfolio Formation, Skewness & the Role of Gold", School of Business Studies, University of Dublin, Trinity College, Dublin, 2003.
- MANDLEBROT B., "The Variation of Certain Speculative Prices: The Random Character of Stock Prices", P. Cootner, Cambridge, 1964.
- MARKOWITZ H.M., "Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments", Blackwell, 1991.
- MASON F., "Metodi Quantitativi per le Decisioni", Giappichelli, Torino, 1992.
- MONTI E., ONADO M., "Il Mercato Monetario e Finanziario in Italia", Il Mulino.
- NUMMELIN K. "Global Coskewness and the Pricing of Finnish Stocks: Empirical Tests", Journal of International Financial Markets, Institutions and Money, 7, 137-155, 1997.
- OZERNOY V.M., "Choosing the "Best" Multiple Criteria Decision-making Method", INFOR, Information Systems and Operational Research, 30(2), 1992.
- PRAKASH A.J., CHANG C.H., PACTWA T.E., "Selecting a Portfolio with Skewness: Recent Evidence from Us, European and Latin American Equity Markets", Journal of Banking & Finance, 27, 1375-1390, 2003.

- ROGERS M., BRUEN M., "Choosing realistic values of indifference, preference and veto thresholds for use with environmental criteria within ELECTRE", *European Journal of Operational Research*, 107, 542-551, 1998.
- ROGERS M., BRUEN M., "A new system for weighting environmental criteria for use within ELECTRE IIF", *European Journal of Operational Research*, 107, 552-563, 1998.
- ROSSI F.A., "Introduzione alla Selezione del Portafoglio", Libreria Universitaria Editrice, Verona.
- ROY B., "ELECTRE III: Un Algorithme de Classements Fonde sur une Representation Floue des Preferences en Presence de Criteres Multicriteres", *Cahiers de CEROC*, 1978.
- ROY B., "The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods", in Bana e Costa, C., (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- SCOBIE H.M., ALLAN B., "Economic & Financial Modelling", *Journal of the European Economics and Financial Centre*, 2001.
- SINGLETON J. and WINGENDER J., "Skewness Persistence in Common Stock Returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13, 335-341, 1986.
- SPRONK J., "Interactive Multiple Goal Programming", *Applications to Financial Planning*, Martinus Nijhoff Publishing, Boston.
- STEUER R.E., NA P., "Multiple Criteria Decision Making Combined with Finance: A Categorized Bibliographic Study", 2003.
- SUN Q., YAN Y., "Skewness Persistence with Optimal Portfolio Selection", *Journal of Banking & Finance*, 27, 1111-1121, 2003.
- SUN Q., YAN Y., "Skewness and Portfolio Selection: Evidence from the Tokyo Stock Exchange", *School of Business Studies, University of Dublin*, 1999.
- ZANAKIS S.H., SOLOMON A., WISHART N., DUBLISH S., "Multi-attribute decision making: A simulation comparison of select methods" *European Journal of Operational Research*, 107, 507-529, 1998.