UNIVERSITÀ CA' FOSCARI VENEZIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA APPLICATA

Atti del

WORKSHOP DIDATTICO di FINANZA QUANTITATIVA

Venezia, Ca' Dolfin
4 Giugno 2004

I VINCOLI A VARIABILI MISTE-INTERE NELLA SELEZIONE DI PORTAFOGLIO: UNA RASSEGNA

Marco CORAZZA
E-mail: corazza@unive.it

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia

ABSTRACT – In questo *tutorial* si presentano le principali categorie di vincoli a variabili miste-intere che, a partire dai primi anni '90 del secolo scorso, sono state prese in considerazione nella formulazione di problemi di programmazione matematica per la selezione statica di portafogli azionari al fine di dare a questi stessi problemi una valenza operativa maggiore di quella posseduta dagli analoghi problemi fino ad allora trattati. Le specifiche categorie di tali vincoli che qui si considerano sono le seguenti tre: i vincoli relativi ai lotti minimi di transazione che devono essere acquistati o venduti in un numero intero non nullo di unità; i vincoli relativi al massimo numero intero positivo di diversi titoli azionari che possono essere acquistati e venduti; i vincoli relativi al minimo numero intero positivo di lotti minimi di transazione di un dato titolo azionario che deve essere acquistato.

KEYWORDS – Portafoglio azionario, variabili miste-intere, vincoli relativi ai lotti minimi di transazione, vincoli relativi al massimo numero di diversi titoli azionari acquistabili e vendibili, vincoli relativi al minimo numero di lotti minimi di transazione acquistabili, tecniche algoritmiche di tipo *branch-and-bound*.

1 INTRODUZIONE

In questo *tutorial* si presentano schematicamente le principali categorie di vincoli a variabili miste-intere che, a partire dai primi anni '90 del secolo scorso, sono state progressivamente prese in considerazione nella formulazione di problemi di programmazione matematica per la selezione statica di portafogli azionari al fine di dare a questi stessi problemi una valenza operativa maggiore di quella posseduta dagli analoghi problemi fino ad allora trattati. L'introduzione di tali categorie di vincoli ha almeno due ordini di implicazioni non banali: il primo è relativo al fatto che verificare l'ammissibilità del sistema dei vincoli di questi problemi di programmazione matematica è, in generale, un problema *NP*-completo; il secondo è relativo al fatto che risolvere questi problemi di programmazione matematica è, in generale, un problema *NP-hard.*

Per quanto riguarda le specifiche categorie di vincoli a variabili miste-intere che si considerano in questo *tutorial*, esse sono le seguenti:

- i vincoli relativi ai lotti minimi di transazione; questi ultimi, dato un titolo azionario, sono costituiti da un prefissato numero intero positivo di unità dello stesso titolo azionario e devono essere tradati (ovvero acquistati o venduti) solo in un numero intero non nullo di unità;
- i vincoli relativi al massimo numero intero positivo di diversi titoli azionari che possono essere acquistati e venduti;
- i vincoli relativi al minimo numero intero positivo di lotti minimi di transazione di un dato titolo azionario che deve essere acquistato.

Il seguito di questo *tutorial* è organizzato come segue. Nella sezione **2** si illustrano sinteticamente i principali approcci risolutivi sviluppati per affrontare problemi di programmazione matematica con vincoli a variabili miste-intere utili per la selezione statica di portafogli azionari. Nelle sezioni **3**, **4** e **5** si presentano, rispettivamente, ognuna delle tre categorie di vincoli a variabili miste-intere sopra elencate. Infine, nella sezione **6** si presentano alcune considerazioni ed alcune osservazioni finali.

2 I PRINCIPALI APPROCCI RISOLUTIVI

Come noto, la selezione classica di un portafoglio alla Markowitz richiede nella sua versione minimale, ovvero nel caso in cui sia possibile effettuare vendite allo scoperto di titoli azionari, la risoluzione di un problema di programmazione matematica caratterizzato da una funzione obiettivo quadratica soggetta a due vincoli lineari di uguaglianza. La soluzione di un tale problema è esprimibile in forma chiusa (si veda, ad esempio, [Szegö, 1980]). Questo stesso problema di programmazione matematica ed il relativo approccio risolutivo si complicano relativamente di poco quando non sia invece possibile effettuare vendite allo scoperto di titoli azionari, anche se la relativa soluzione non è più esprimibile in forma chiusa (si veda, ad esempio, ancora [Szegö, 1980]). Ma, in generale, selezionare un portafoglio alla Markowitz prendendo in considerazione anche solo alcune delle categorie di vincoli a variabili miste-intere elencate nella sezione precedente rende definitivamente complicata la risoluzione dei corrispondenti problemi di programmazione matematica.

Con particolare riferimento a quest'ultimo aspetto, è da notare che la maggioranza degli approcci risolutivi proposti nella letteratura specializzata si basa su tecniche algoritmiche di tipo *branch-and-bound* opportunamente adattate. A tal riguardo si vedano, ad esempio, [Gupta *et al.*, 1985], [Avella, 1990], [Bienstock, 1996], [Butera, 1997], [Fletcher *et al.*, 1998] e [Andramonov *et al.*, 2002]. Più in dettaglio, è possibile dimostrare che risolvere questi problemi di programmazione matematica è, in generale, un problema *NP-hard* (si vedano, ad esempio, [Bienstock, 1996], [Jobst *et al.*, 2001] e [Bussieck *et al.*, 2003]), ed è possibile dimostrare che verificare anche la sola ammissibilità del sistema dei vincoli di tali problemi di programmazione matematica è, in generale, un problema *NP*-completo.

Al fine di esemplificare quest'ultima affermazione, si consideri il sistema dei vincoli che segue, nel quale compare un solo vincolo a variabili miste-intere (quello relativo al massimo numero intero positivo di diversi titoli azionari che possono essere acquistati):

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ \#(\{i : x_i > 0\}) \leq K \\ 0 \leq x_i \leq u_i, i = 1, \ldots, N \end{cases}$$

dove A è una matrice nota di ordine $M \times N$, x è il vettore N-dimensionale delle variabili decisionali, b è un vettore noto M-dimensionale, K è un numero intero positivo minore di N, $\#(\cdot)$ indica la cardinalità dell'insieme argomento, e u_i, con $i=1, \ldots, N$, sono *upper bound*. In relazione a quest'ultimo sistema di vincoli, in [Bussieck *et al.*, 2003] è stato dimostrato che, occorrendo specificate ipotesi, verificarne l'ammissibilità è un problema NP-completo già quando $M \geq 3$, ovvero già quando la matrice A ha un numero di righe maggiore o uguale a 3.

3 VINCOLI RELATIVI AI LOTTI MINIMI DI TRANSAZIONE

Questi vincoli impongono che, dato un titolo azionario, quest'ultimo debba essere tradato (ovvero acquistato o venduto) solo in un numero intero non nullo di lotti minimi di transazione.

Tra le categorie di vincoli a variabili miste-intere utilizzate nei problemi di programmazione matematica per la selezione statica di portafogli azionari, questa categoria relativa ai lotti minimi di transazione è presumibilmente la più diffusa; a tal riguardo si vedano, ad esempio, [Avella, 1990], [Speranza, 1996], [Mansini *et al.*, 1999], [Kellerer *et al.*, 2000], [Jobst *et al.*, 2001], [Andramonov *et al.*, 2002] e [Corazza *et al.*, 2003]. In particolare, le variabili decisionali più "naturali" da considerare nella formulazione dei corrispondenti problemi di programmazione matematica risultano essere il numero di lotti, piuttosto che le classiche percentuali del capitale inizialmente disponibile.

Con particolare riferimento a quest'ultimo aspetto, di seguito si riporta il problema di programmazione matematica considerato in [Andramonov *et al.*, 2002], nel quale vengono anche presi in considerazione i costi di transazione e l'imposizione fiscale:

$$\begin{array}{ll} \min & (PLx)'V(PLx) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} (PLx)'r \geq \pi C \\ f_1(x) \leq \alpha C \\ f_2(x) \leq \beta C \\ (PLx)'e \geq (1-\alpha-\beta)C \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, N \\ x_j \in \mathbf{N} \ \forall j \in I \end{cases} \end{array}$$

dove x è il vettore N-dimensionale delle variabili decisionali, P è la matrice diagonale nota dei prezzi correnti, L è la matrice diagonale nota dei numeri (interi positivi) di unità dei titoli azionari che costituiscono il corrispondente lotto, V è la matrice nota delle varianze e delle covarianze dei rendimenti dei titoli azionari, r è il vettore N-dimensionale noto dei valori medi dei rendimenti dei titoli azionari, π è il rendimento noto che il portafoglio da selezionare deve conseguire, C è il capitale inizialmente disponibile, $f_1(\cdot)$ è una opportuna funzione non lineare relativa ai costi di transazione, $f_2(\cdot)$

è una opportuna funzione non lineare relativa all'imposizione fiscale, e è il vettore N-dimensionale unitario ed I è l'insieme degli indici dei titoli azionari infinitamente divisibili, con $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha+\beta<1$.

Per risolvere questo problema di programmazione matematica, gli Autori propongono un approccio risolutivo iterativo, articolato in due stadi, che si basa su tecniche algoritmiche di tipo *branch-and-bound* e su metodologie ti tipo *cutting plane* e di tipo sub-gradiente. In particolare, con riferimento a questo approccio risolutivo, gli Autori presentano il seguente risultato teorico:

Teorema – Se almeno un titolo azionario è infinitamente divisibile, allora in un numero finito di iterazioni l'approccio risolutivo proposto o individua una soluzione ottima, o indica che la regione ammissibile è vuota.

Al fine di illustrare tale approccio risolutivo, si consideri il problema di programmazione matematica che segue, e si consideri la successiva figura nella quale si rappresentano graficamente gli esiti ottenuti dall'approccio risolutivo medesimo in ognuna delle quattro iterazioni necessarie per risolvere il problema dato.

$$\min \quad 0.6x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 0.6x_1 + 2.8x_2 \geq 25 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 70 \\ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq 4.05 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

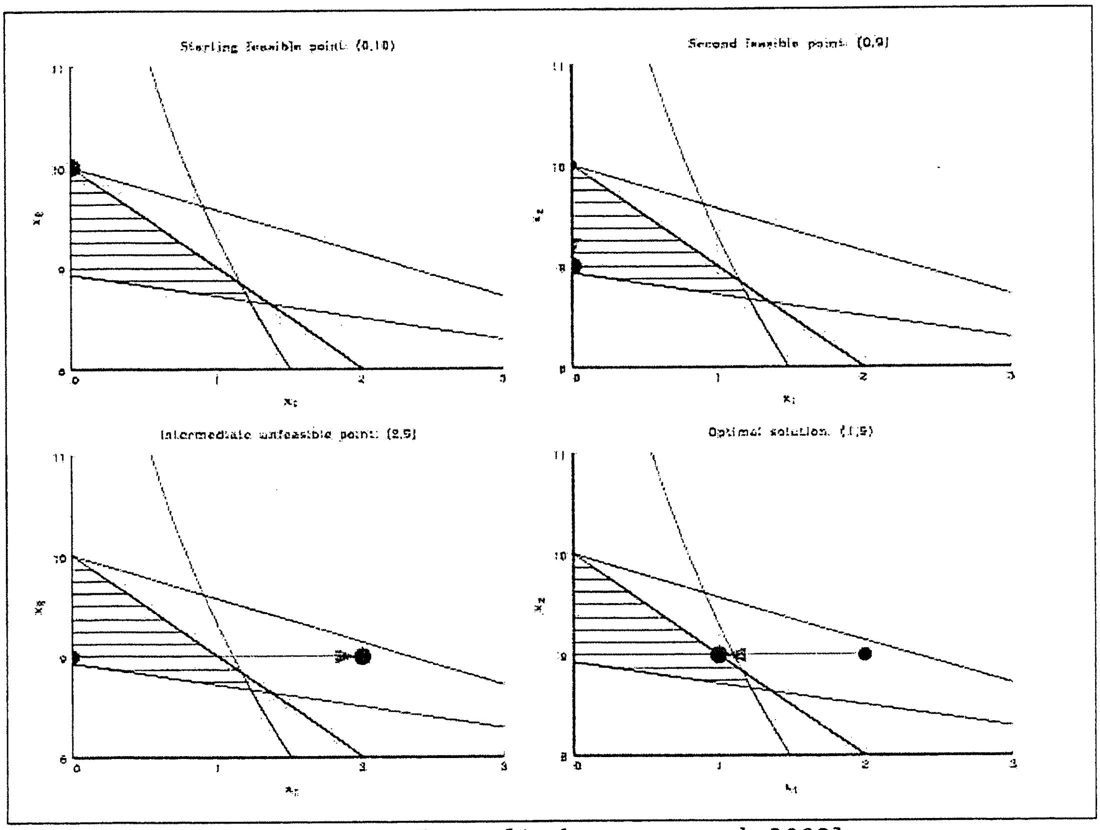

Figura 3.1 – Fonte: [Andramonov *et al.*, 2002]

Invece, con riferimento alla verifica dell'ammissibilità dei sistemi di vincoli considerati in questa sezione, di seguito si riporta il problema di programmazione matematica considerato in [Corazza *et al.*, 2003], anch'esso formulato in termini di numero di lotti:

$$\min \quad (PLx)'V(PLx)$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} (PLx)'r \geq \pi C \\ (PLx)'e \geq C \\ x_i \in \mathbf{N}, i = 2, \ldots, N+1 \end{cases}$$

dove x è il vettore $(N+1)$-dimensionale delle variabili decisionali.

In particolare, in relazione a questo problema di programmazione matematica, gli Autori presentano il seguente risultato teorico:

Teorema – Sia $I = \{2, \ldots, N+1\}$ l'insieme degli indici dei titoli a rendimento aleatorio. Il problema di programmazione matematica considerato ammette una soluzione ammissibile se e solo se

$$(r_1 \geq \pi) \vee ((r_i < \pi) \wedge (\text{esiste } \bar{i} \in I \text{ tale che } r_{\bar{i}} > r_1))$$

dove r_1 è il rendimento del titolo a rendimento certo.

Inoltre, gli Autori presentano anche un risultato teorico che permette di specificare un portafoglio ammissibile.

4 VINCOLI RELATIVI AL MASSIMO NUMERO DI TITOLI AZIONARI ACQUISTABILI E VENDIBILI

Questi vincoli impongono che il numero di diversi titoli azionari che possono essere acquistati e venduti non sia superiore ad un prefissato valore intero positivo (si vedano, ad esempio, [Chang *et al.*, 2000], [Jobst *et al.*, 2001] e [Jansen *et al.*, 2002]).

L'utilizzo di questo categoria di vincoli a variabili miste-intere nei problemi di programmazione matematica per la selezione statica di portafogli azionari permette di limitare, seppure indirettamente ed in maniera imprecisa, i costi di transazione ed il prelievo derivante dall'imposizione fiscale. Questi ultimi aspetti risultano di cruciale interesse per la selezione di portafogli azionari nell'ambito di una filosofia gestionale di tipo passivo. Con particolare a quest'ultimo approccio, di seguito si riporta il problema di programmazione matematica considerato in [Jansen *et al.*, 2002]:

$$\min \quad TEV(x)$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x'e = 1 \\ \#(\{i : x_i > 0\}) = K \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, N \end{cases}$$

dove $TEV(\cdot)$ è un'opportuna funzione di *tracking error*.

Gli Autori non affrontano direttamente questo problema di programmazione matematica, ma ne risolvono una sua versione approssimata a variabili (tutte) continue, versione approssimata che determinano nella maniera seguente:

- dapprima riformulano l'originario problema di programmazione matematica come segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & TEV(x) + c \cdot \#(\{i : x_i > 0\}) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x'e = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, N \end{cases} \end{aligned}$$

con $c \geq 0$;

- poi ricordano che vale il seguente risultato teorico

$$\#(\{i : x_i > 0\}) = \lim_{p \downarrow 0} \left(x_1^p, \ldots, x_N^p\right)' e;$$

- infine utilizzano il precedente risultato teorico per effettuare una sostituzione approssimata nella funzione obiettivo del problema di programmazione matematica riformulato, determinando così la seguente versione approssimata dell'originario problema di programmazione matematica:

$$\begin{aligned} \min \quad & TEV(x) + c \cdot \left(x_1^p, \ldots, x_N^p\right)' e \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x'e = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, N. \end{cases} \end{aligned}$$

Più in generale, in relazione alla categoria di vincoli considerati in questa sezione, è da notare come la loro presenza in problemi di programmazione matematica per la selezione statica di portafogli azionari possa rendere discontinua la frontiera efficiente associata al problema di programmazione matematica considerato. A tal riguardo si veda [Jobst *et al.*, 2001], in cui gli Autori presentano la frontiera efficiente – che di seguito si riporta – che essi determinano mediante un'investigazione numerica nel caso in cui siano N=4 e K=2.

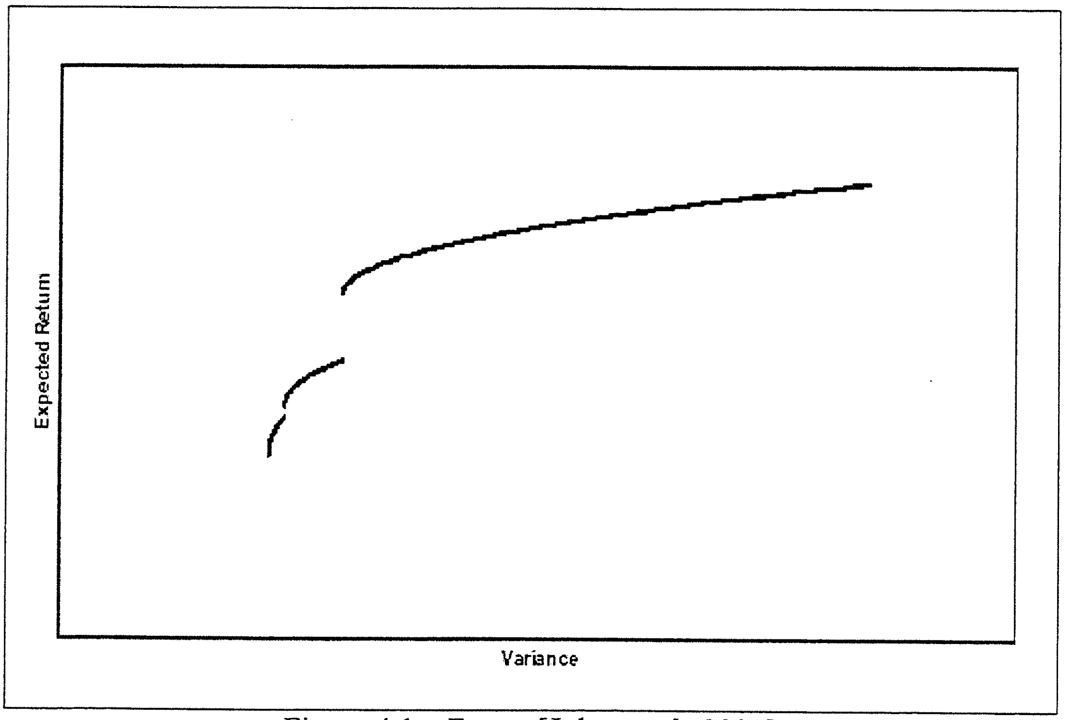

Figura 4.1 – Fonte: [Jobst *et al.*, 2001].

5 VINCOLI RELATIVI AL MINIMO NUMERO DI LOTTI MINIMI DI TRANSAZIONE ACQUISTABILI

Questi vincoli impongono che il numero minimo di lotti minimi di transazione di un dato titolo azionario che deve essere acquistato non sia inferiore ad un prefissato valore intero positivo.

Tra le categorie di vincoli a variabili miste-intere utilizzate nei problemi di programmazione matematica per la selezione statica di portafogli azionari, questa considerata in questa sezione è presumibilmente la meno diffusa. In uno dei pochi contributi a tal riguardo, [Jobst *et al.*, 2001], si presenta il problema di programmazione matematica che di seguito si riporta, nel quale viene anche congiuntamente preso in considerazione un vincolo relativo al massimo numero intero positivo di diversi titoli azionari che possono essere acquistati e venduti (il vincolo corrispondente è l'ultimo di quelli riportati nel sistema dei vincoli):

$$\min \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_i x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_i r_i = \pi \\ \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ l_i \cdot \delta_i \leq x_i \leq u_i \cdot \delta_i, i = 1, \ldots, N \\ \delta_i \in \{0,1\}, \forall i \\ \sum_{i=1}^{N} \delta_i = K \end{cases}$$

dove σ_{ij}, con i=1, ..., N e j=1, ..., N, è la covarianza tra il rendimento del titolo azionario i-esimo ed il rendimento del titolo azionario j-esimo e l_i e u_i, con i=1, ..., N, sono, rispettivamente, *lower* e *upper bound.*

Per risolvere questo problema di programmazione matematica, gli Autori propongono un approccio risolutivo iterativo che si basa su tecniche algoritmiche di tipo *branch-and-bound tree search.*

Infine, è da notare come anche in relazione alla categoria di vincoli considerati in questa sezione (come nel caso di quella considerata nella sezione precedente), la loro presenza in problemi di programmazione matematica per la selezione statica di portafogli azionari possa rendere discontinua la frontiera efficiente associata al problema di programmazione matematica considerato.

6 CONSIDERAZIONI ED OSSERVAZIONI FINALI

In conclusione di questo *tutorial* si presentano sinteticamente le considerazioni e le osservazioni che seguono:

- in generale, verificare l'ammissibilità del sistema dei vincoli di problemi di programmazione matematica del tipo considerato in questo *tutorial* è un problema *NP*-completo;
- in generale, risolvere problemi di programmazione matematica del tipo considerato in questo *tutorial* è un problema *NP-hard*;

- la maggioranza degli approcci risolutivi proposti nella letteratura specializzata per la risoluzione di problemi di programmazione matematica del tipo considerato in questo *tutorial* si basa su tecniche algoritmiche di tipo *branch-and-bound* opportunamente adattate;
- in generale, in relazione alla risoluzione di problemi di programmazione matematica del tipo considerato in questo *tutorial*, esiste un numero ridotto di risultati teorici costruttivi;
- in generale, la presenza di vincoli a variabili miste-intere in problemi di programmazione matematica per la selezione statica di portafogli azionari distrugge proprietà analitiche significative della frontiera efficiente associata al problema di programmazione matematica considerato.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDRAMONOV M.Y. e CORAZZA M., Mixed-Integer Non-Linear Programming Methods for Mean-Variance Portfolio Selection, *Rendiconti per gli Studi Economici Quantitativi*, Volume 2001, 21-34, 2002.

[2] AVELLA P., Portfolio Selection: un Modello di Programmazione Mista-Intera risolto con un Algoritmo Branch and Bound, *Ricerca Operativa*, 56, 3-28, 1990.

[3] BIENSTOCK D., Computational Study of a Family of Mixed-Integer Quadratic Programming Problems, *Mathematical Programming*, 74, 121-140, 1996.

[4] BUSSIECK M.R. e PRUESSNER A., Mixed-Integer Nonlinear Programming, *mimeo*, sito *web* `http://citeseer.nj.nec.com/596677.htm`, 2003.

[5] BUTERA G.O., *The Solution of a Class of Limited Diversification Portfolio Selection Problems*, Ph. D. Thesis, Rice University of Houston – Texas, 1997.

[6] CHANG T.-J., MEADE N., BEASLEJ J.E. e SHARAIHA Y.M., Heuristics for Cardinality Constrained Portfolio Optimization, *Computers & Operations Research*, 27, 1271-1301, 2000.

[7] CORAZZA M. e FAVARETTO D., On the Existence of Solutions in the Quadratic Mixed-Integer Mean-Variance Portfolio Selection Problem, sottoposto per la pubblicazione, 2003.

[8] FLETCHER R. e LEYFFER A., Numerical Experience with Lower Bounds for MIQP Branch-and-Bound, *SIAM Journal of Optimization*, 8, 604-616, 1998.

[9] GUPTA O.K. e RAVINDRAN A., Branch and Bound Experiments in Convex Nonlinear Integer Programming, *Management Science*, 31, 1533-1546, 1985.

[10] JANSEN R. e VAN DIJK R. (2002) Optimal Benchmark Tracking with Small Portfolios, *The Journal of Portfolio Management*, Winter, 33-39, 2002.

[11] JOBST N.J., HORNIMAN M.D., LUCAS C.A. e MITRA G., Computational Aspects of Alternative Portfolio Selection Models in the Presence of Discrete Asset Choice Constraints, *Quantitative Finance*, 1, 1-13, 2001.

[12] KELLERER H., MANSINI R. e SPERANZA M.G., Selecting Portfolios with Fixed Costs and Minimum Transaction Lots, *Annals of Operations Research*, 99, 287-304, 2000.

[13] MANSINI R. e SPERANZA M.G., Heuristic Algorithms for the Portfolio Selection Problem with Minimum Transaction Lots, *European Journal of Operational Research*, 14, 219-233, 1999.

[14] MARKOWITZ H., Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 7, 77-91, 1952.

[15] MARKOWITZ H.M., *Portfolio Selection: the Efficient Diversification of Investments*, J. Wiley & S., 1959.
[16] SPERANZA M.G., A Heuristic Algorithm for a Portfolio Optimization Model applied to the Milan Stock Market, *Computers & Operations Research*, 23, 433-441, 1996.
[17] SZEGÖ G.P., *Portfolio Theory with Application to Bank Asset Management*, Academic Press, 1980.

UNIVERSITÀ
CA' FOSCARI
VENEZIA

ISBN 88-88037-11-X