



UNIVERSITA' "CA' FOSCARI" DI VENEZIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA APPLICATA

MARCO CORAZZA ELISA SCALCO

Proposta per un criterio d'investigazione dell'interdipendenza
tra i prezzi dei *Commodity Futures*

n. 114/2003

PROPOSTA PER UN CRITERIO D'INVESTIGAZIONE DELL'INTERDIPENDENZA TRA I PREZZI DEI *COMMODITY FUTURES*

Marco CORAZZA

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia

Elisa SCALCO

Sunto - L'esistenza di relazioni di lungo o di breve periodo tra i prezzi *futures* delle *commodities* è un fenomeno di recente interesse. Più Autori si sono occupati di tale questione, proponendo l'utilizzo di svariati metodi d'analisi che, talvolta, hanno portato a conclusioni tra di loro contraddittorie. In questo lavoro si è affrontato il problema facendo invece uso del concetto di comonotonicità, una tecnica semplice, ma potente, originariamente utilizzata nell'ambito attuariale ed estesa solo di recente anche a quello della finanza. In particolare, si è utilizzato tale approccio in relazione ad un portafoglio finanziario composto da due contratti *futures* su *commodities*, esaminandone l'andamento della somma delle "funzioni prezzo" che, rispettivamente, descrivono come variano nel tempo le quotazioni *futures* delle due merci considerate. La *comonotonicity* rende più agevole tale studio e fornisce importanti informazioni circa la struttura della dipendenza delle variabili implicate. Mediante il suo utilizzo si è studiata la presenza di relazioni tra i prezzi *futures* di prodotti agricoli e si è stabilito il valore massimo del portafoglio finanziario composto da due contratti derivati. In particolare, nella prima parte del lavoro si propongono alcuni risultati teorici, mentre nella seconda si riportano quelli derivanti da un'analisi empirica (che ha confermato la potenza di tale tecnica nel fornire informazioni rilevanti sull'andamento della distribuzione congiunta delle due "funzioni prezzo").

Parole chiave e frasi – *Commodity futures*, comovimento dei prezzi, comonotonicità, avena, frumento, grano, soia.

1. INTRODUZIONE

L'interdipendenza tra i prezzi dei "*commodity futures*" è un argomento assai controverso in letteratura. Recentemente, diversi Autori si sono occupati di tale questione, proponendo l'utilizzo di svariati metodi d'analisi, i quali tuttavia hanno talvolta portato a risultati tra loro contraddittori.

L'essenza della questione consiste nel verificare l'esistenza di una qualche relazione tra le quotazioni di una fattispecie di contratti derivati, i *futures* appunto, nel caso particolare in cui l'attività sottostante il contratto è rappresentata dai prodotti agricoli. Tale legame si manifesta in presenza di "comovimento" tra i prezzi *futures* delle merci, ovvero, quando considerate due o più *commodities* i rispettivi prezzi presentano variazioni nella stessa direzione al variare dell'istante temporale. Intuitivamente, quindi, potremo aspettarci che questa

condizione sussista più facilmente per quei prodotti agricoli che sono simili per caratteristiche.

La crescente attenzione rivolta a questa problematica deve farci riflettere sulle utilità che possono derivare dalla presenza d'interdipendenza tra i prezzi dei *commodity futures*.

Innanzitutto, supposto che vi sia comovimento tra le quotazioni di alcuni beni agricoli, è evidente come la conoscenza dell'andamento della funzione del prezzo d'una qualsiasi tra le merci considerate, possa fornire informazioni utili anche per le altre materie ad essa collegate. Ipotizziamo, a titolo d'esempio, che i prezzi di una coppia di contratti *futures* aventi per attività sottostante due cereali, quali l'orzo ed il frumento, si muovano similmente al variare del tempo. La presenza di una tale relazione tra i prodotti ci consente quindi, noto il comportamento della quotazione dell'orzo, non solo di "apprendere" la funzione del prezzo del frumento, ma anche di tutte le altre merci che risultano in qualche modo ad essi connesse. L'utilità derivante dalla presenza di una relazione di lungo periodo tra i prezzi dei beni agricoli non si esaurisce, tuttavia, nel semplice fatto di segnalare informazioni vantaggiose per le altre *commodities* correlate.

Infatti, è necessario menzionare una seconda proficua implicazione riguardante la possibilità di effettuare delle coperture o delle speculazioni incrociate mediante l'impiego dei contratti *futures*. Ipotizziamo, ad esempio, che due beni come il grano e la soia siano legati tra loro e, quindi, che sussista comovimento tra i relativi prezzi. Questa condizione ci consente di effettuare delle coperture e delle speculazioni incrociate, ovvero di coprire, ad esempio, una posizione "a pronti" (lunga o corta) sulla soia, mediante una posizione "a termine" nel più liquido mercato *futures* del grano.

In questa trattazione si intende affrontare il problema dell'interdipendenza tra i prezzi dei prodotti agricoli, ricorrendo all'uso del concetto della comonotonia. La "*comonotonicity*" è una tecnica relativamente semplice, ma potente, comparsa originariamente per l'investigazione di questioni di tipo assicurativo. Come esempio del concetto di "*comonotonicity*" nel campo delle scienze attuariali è stato considerato un portafoglio assicurativo composto da n oggetti rischiosi, ovvero da n variabili casuali rappresentanti i danni causati dai rischi contro i quali si è assicurati. Il nostro interesse è quindi rivolto a calcolare la somma di tali variabili casuali aventi distribuzioni marginali note, ma delle quali non si conosce invece la distribuzione congiunta. L'eventuale ipotesi di reciproca indipendenza tra le componenti della sommatoria è certamente conveniente da un punto di vista del calcolo, ma tuttavia non realistica (e quindi da scartare), perché in presenza di dipendenza tra i rischi individuali, tale assunzione ci condurrebbe a sottovalutare le richieste

di risarcimento del nostro portafoglio. Infatti, in molte circostanze i rischi risultano correlati poiché influenzati dallo stesso ambiente economico e fisico, o dal medesimo meccanismo scatenante le richieste di risarcimento. La difficoltà di determinare la funzione di distribuzione della somma delle n variabili casuali può essere risolta ricorrendo alla nozione di comonotonia, che ci consente appunto di sostituire la complessa e, in generale, sconosciuta distribuzione di $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, con le componenti della versione comonotona $S^c = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) + \dots + F_{X_n}^{-1}(U)$, più facile da trattare.

In realtà, mentre la funzione di ripartizione di S si può ottenere se la struttura di dipendenza degli n rischi è nota¹, quella di S^c può essere invece calcolata con maggiore semplicità, poiché tale somma ha una distribuzione unidimensionale, essendo esprimibile unicamente in funzione della variabile casuale uniforme, U . La funzionalità del concetto di comonotonia risiede infatti nell'utilizzo della nozione di *funzione quantile*, che rappresenta la funzione di ripartizione inversa delle variabili casuali Y_1, Y_2, \dots, Y_n , e può assumere una forma più o meno complessa a seconda del caso trattato.

Sulla base di questo concetto, data una variabile casuale uniforme, ciascuno degli n oggetti rischiosi Y_1, Y_2, \dots, Y_n risulterebbe distribuito rispettivamente secondo $F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U)$, per cui per studiare l'andamento della distribuzione congiunta $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, basterebbe analizzare la somma delle *funzioni quantili*, cioè $S^c = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) + \dots + F_{X_n}^{-1}(U)$. La variabile S^c rappresenta, come sappiamo, la versione comonotona del vettore casuale iniziale.

È inoltre importante sottolineare che se le variabili casuali esaminate hanno distribuzione congiunta comonotona, la loro somma risulta essere la più elevata nel senso di ordine convesso (*convex order*), ovvero rispetto ad una forma di ordinamento impartito a delle variabili casuali aventi la stessa media (come prova di questo fatto si veda [10], [18], [20], [30] e [31]). In tal senso, la comonotonia ci consente di determinare il limite massimo superiore assunto dalla somma delle variabili casuali considerate. Sfruttando questo risultato, è stato provato da alcuni Autori che la "comonotonicity" può essere caratterizzata dalla correlazione massima di tutte le coppie di variabili casuali coinvolte. Per questa ragione, è considerata un'estensione del concetto di correlazione perfetta positiva e può quindi essere proposta come metodo d'analisi alternativo per testare l'esistenza di relazioni tra i prezzi *futures* dei prodotti agricoli.

Lo scopo della trattazione consiste innanzitutto nel verificare se tale tecnica, finora applicata prevalentemente nel campo delle scienze attuariali a portafogli assicurativi costituiti da oggetti rischiosi, può in qualche modo essere adattata nell'ambito della finanza al caso di un portafoglio finanziario composto da alcuni contratti derivati: i *futures*.

Considerate quindi le "funzioni prezzo" di due *commodities* qualsiasi, ad esempio l'orzo ed il frumento, che permettono di descrivere l'andamento dei prezzi *futures* di queste stesse merci al variare del tempo, anziché analizzarne individualmente gli spostamenti, si intende studiare una relazione tra essi, mediante l'impiego del metodo alternativo della comonotonia. Esaminare il movimento della somma delle due "funzioni prezzo" è cosa in generale complessa se non si hanno informazioni al riguardo, tuttavia la comonotonicità rende più agevole tale studio e, allo stesso tempo, fornisce maggiori notizie circa la struttura della dipendenza delle variabili casuali implicate.

Si dimostrerà quindi, inizialmente, da un punto di vista teorico, che è possibile determinare grazie alla comonotonia il valore massimo del portafoglio finanziario composto da due contratti *futures* su *commodities*; conoscere l'andamento della distribuzione congiunta delle due "funzioni prezzo", ed infine stabilire se sono tra loro correlate.

Infine si sottoporrà tale formalizzazione teorica a verifica empirica.

2. I VARI APPROCCI PROPOSTI IN LETTERATURA

In questa sezione si illustrano alcuni metodi d'analisi impiegati per testare l'esistenza di relazioni tra i prezzi dei contratti *futures* su prodotti agricoli. Gli approcci proposti in letteratura non sono numerosi ed i pochi presenti conducono talvolta a conclusioni tra loro contraddittorie (ad esempio, si veda [1], [7], [35] e [42]).

Malliaris ed Urrutia, ad esempio, sono ricorsi all'uso dell'*Error Correction Model* di Engle e Granger, ovvero un modello a due stadi fondato sui concetti di stazionarietà e cointegrazione, per studiare i legami presenti tra le quotazioni dei *futures* scambiati presso la *Chicago Board of Trade*. Essi hanno riscontrato forti correlazioni di lungo periodo in quasi tutte le coppie di contratti considerate, ed invece fragili relazioni nel breve periodo.

Invece, Dawson e White si sono serviti del *Metodo della Cointegrazione di Johansen* e degli *Indici di Clark* per investigare lo stesso fenomeno, relativamente ai contratti negoziati

¹ Tuttavia, anche se è nota la struttura di dipendenza di S , potrebbe essere comunque complicato determinarne da essa la distribuzione congiunta.

presso la *London International Financial Futures Exchange* (LIFFE). Gli esiti della loro analisi differiscono però completamente da quelli di Malliaris ed Urrutia. I risultati del *Test di Cointegrazione di Johansen* rivelano, infatti, l'assenza di relazioni di lungo periodo tra le quotazioni delle *commodities* negoziate presso la borsa di Londra e quindi d'interdipendenza tra le stesse, anche tra quei prodotti, che da una prima analisi degli *Indici di Clark*, potevano sembrare invece legati tra loro.

La contraddizione esistente tra i due studi è soggetta a varie interpretazioni.

In primo luogo, Malliaris ed Urrutia hanno utilizzato *commodities* molto simili, tanto da potersi considerare complementi o sostituti, mentre Dawson e White hanno impiegato invece beni che non sono certamente "interscambiabili". In secondo luogo si sono avvalsi entrambi di metodi e strumenti sostanzialmente diversi per analizzare lo stesso fenomeno, ovvero il legame tra i prezzi dei contratti *futures*. Non bisogna infine dimenticare che nei due studi sono state esaminate due borse, rispettivamente quella di Chicago e di Londra, e che perciò l'ambiente finanziario di riferimento è diverso.

Qualora siano le diversità dei metodi impiegati, delle *commodities* quotate e delle borse considerate a giustificare questi risultati contraddittori e non altre ragioni di carattere economico, allora può essere utile operare in modo da ridurre tali divergenze. Infatti, è necessario a questo punto comprendere se alla base dei legami riscontrati analizzando i prezzi *futures* dei contratti negoziati presso la borsa di Chicago, vi siano delle motivazioni economiche ben precise.

Il comovimento dei prezzi, che si riscontra ogni qual volta due o più quotazioni si muovono insieme nel lungo periodo, è solitamente attribuito ad una delle seguenti ragioni.

Innanzitutto, in molti casi le merci agricole esaminate presentano caratteristiche simili, tanto da potersi considerare come complementi o sostituti. Ad esempio, ipotizzando che il prezzo del grano aumenti, un allevatore di bestiame potrebbe utilizzare la farina di soia come sostituto, instaurando in questo modo una relazione di sostituibilità tra i due prodotti; gli andamenti delle quotazioni di queste merci risulterebbero quindi fortemente correlati.

Altri invece ritengono che la causa principale dell'esistenza di questi legami risieda nei fattori climatici e geografici. È probabile, infatti, che per prodotti agricoli coltivati in aree abbastanza concentrate e soggetti quindi alle medesime condizioni meteorologiche si manifesti correlazione tra i relativi prezzi *futures*.

L'interdipendenza tra le quotazioni dei beni potrebbe essere altrimenti attribuita ai cambiamenti di variabili macroeconomiche, quali l'inflazione, il tasso d'interesse o quelle legate alla domanda aggregata, come conseguenza delle politiche intraprese dai Governi in

ambito agrario. Alcuni progetti governativi consistono, ad esempio, nella stabilizzazione dei fondi o nella stipulazione di accordi internazionali.

Ancora, considerato un intervallo di tempo più ampio, anche lo sviluppo della tecnologia e la crescita della popolazione possono influenzare le relazioni tra i prezzi dei contratti *futures*.

Secondo Pyndick e Rotemberg, invece, l'interdipendenza tra le quotazioni dei *commodity futures* è dovuta alle seguenti motivazioni:

- le comuni variazioni dei prezzi dei prodotti possono essere il risultato dei vincoli di liquidità che si instaurano quando il mercato dei capitali è imperfetto. In tale circostanza, la caduta del prezzo di un bene comporta anche la riduzione di quello delle altre merci, perché impoverisce quegli speculatori che si trovano in posizione lunga su più *commodities* alla volta;
- la seconda motivazione è invece legata alle abitudini di massa proprie di coloro che operano nel mercato. I *traders*, infatti, si comportano alternativamente come rialzisti o ribassisti su tutti i prodotti senza alcuna spiegazione economica, ma come conseguenza di una psicologia di mercato. Le merci agricole sono quindi legate tra loro per mezzo di questa strategia di *trading*, definita *spreading*. Quando un *trader* ritiene, ad esempio, che il prezzo della soia sia basso, comprerà tale prodotto, mentre venderà l'olio di soia o la farina di soia. Questo suo atteggiamento sarà infatti motivato dalla percezione della presenza di differenze di prezzo tra i prodotti agricoli. Lo *spreading* quindi, similmente all'attività di arbitraggio, agisce come un meccanismo che instaura vere e proprie relazioni tra le quotazioni dei beni.

3. LA COMONOTONIA

In recenti pubblicazioni sulla matematica attuariale, è stata dedicata particolare attenzione al ruolo della comonotona (ad esempio si veda [13], [14], [15], [18] e [29]). Tale concetto compare originariamente in ambito assicurativo, poiché la maggior parte dei piani di *risk sharing* tra l'assicurato e l'assicuratore, o tra l'assicuratore ed il riassicuratore, porta a rischi parziali che sono comonotoni. Al contrario, sono meno frequenti le applicazioni di tale metodo in ambito finanziario ([46]).

Per comprendere l'importanza di questo concetto, iniziamo a darne una prima definizione.

DEFINIZIONE 1 - Due variabili casuali a valore reale X_1 e X_2 , definite sullo stesso spazio di probabilità (Ω, F, P) , sono comonotone se esiste A in F , con probabilità 1, e tale che

$$[X_1(\omega) - X_1(\omega')] \cdot [X_2(\omega) - X_2(\omega')] \geq 0$$

per tutti $(\omega, \omega') \in A \times A$, o equivalentemente, se la funzione di distribuzione cumulativa F_{X_1, X_2} della coppia (X_1, X_2) , è data da:

$$F_{X_1, X_2}(\xi_1, \xi_2) = \min(F_{X_1}(\xi_1), F_{X_2}(\xi_2)).$$

Altre caratterizzazioni delle variabili casuali comonotone sono fornite da Denneberg (si veda [8] e [9]).

In particolare, se due variabili casuali X_1 e X_2 sono tali che esiste una funzione non decrescente φ per cui X_1 può essere scritto nella forma $X_1 = \varphi(X_2)$, o indifferentemente, $X_2 = \varphi(X_1)$, allora X_1 e X_2 sono comonotone. Infatti, la comonotonia tra X_1 e X_2 si verifica, se e solo se, esse sono funzioni non decrescenti di una stessa variabile casuale X_3 che, ad esempio, può essere scelta uguale a $X_1 + X_2$. Per questo motivo, come è stato sottolineato da Wang e Dhaene (si veda [11], [12], [13], [14] e [49]), i rischi comonotoni possiedono la medesima forma di monotonia.

Come esempio del concetto di "comonotonicity" nel contesto assicurativo, esaminiamo innanzitutto un portafoglio composto da n oggetti rischiosi Y_1, Y_2, \dots, Y_n , identicamente distribuiti, rappresentanti i danni causati da alcuni rischi contro i quali si è assicurati. Siamo interessati alla loro somma $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, addizione di variabili casuali aventi distribuzioni marginali note, ma di cui non si conosce la distribuzione congiunta. L'eventuale ipotesi di reciproca indipendenza tra le componenti della sommatoria, è certamente conveniente da un punto di vista del calcolo, ma tuttavia non realistica (e quindi da scartare), perché in presenza di dipendenza tra i rischi individuali, tale assunzione ci porterebbe a sottovalutare le richieste di risarcimento del nostro portafoglio. Infatti, in molte circostanze i rischi risultano correlati poiché influenzati dallo stesso ambiente economico, fisico, o dal medesimo meccanismo scatenante le richieste di risarcimento. Ad esempio, i rischi individuali di un portafoglio assicurativo contro i danni causati da un terremoto (che sono situati nella medesima area geografica) sono fra loro correlati, in quanto le varie richieste di compensazione dei danni subiti sono condizionate dalla gravità dello stesso evento catastrofico.

La difficoltà di determinare la funzione di distribuzione della somma S può essere affrontata ricorrendo alla nozione di comonotonia, che ci permette di sostituire la complessa e sconosciuta distribuzione di $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, con la seguente $S^c = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) + \dots + F_{X_n}^{-1}(U)$, più facile da trattare. Infatti, per la definizione di *funzione quantile* (data più avanti) le variabili casuali Y_1, Y_2, \dots, Y_n , risultano distribuite rispettivamente secondo $F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U)$. In realtà, mentre la funzione di ripartizione di S si può ottenere se la struttura di dipendenza degli n rischi è nota², quella di S^c può essere calcolata con semplicità poiché tale somma ha una distribuzione unidimensionale, dipendendo soltanto dalla variabile casuale uniforme, U .

Prima di continuare ad addentrarci nell'argomento, è necessario dare alcune nozioni fondamentali per renderlo maggiormente comprensibile.

Innanzitutto, definiamo cosa si intende per *stop-loss order* e *convex order*, rispettivamente.

DEFINIZIONE 2 - Consideriamo due variabili casuali X e Y . Allora X è detta precedere Y nel senso di *stop-loss order*, $X \leq_{sl} Y$, se e solo se:

$$E[(X - d)_+] \leq E[(Y - d)_+],^3 \text{ con } -\infty < d < +\infty. \quad (1)$$

Quindi, per ogni ritenzione d , rappresentante il risarcimento versato dall'assicurazione, se vale la disuguaglianza (1), allora il rischio associato ad X è preferito al rischio associato ad Y , poiché rappresenta una perdita minore.

E' possibile dare un'interpretazione economica, in termini di utilità attesa, alla nozione di *stop-loss order*. Infatti, si può dimostrare che $X \leq_{sl} Y$, se e solo se, per tutte le funzioni concave u non decrescenti, vale che $E[u(-X)] \geq E[u(-Y)]$. Ciò significa che ciascun decisore avverso al rischio preferisce un importo aleatorio X rispetto a Y , perché meno rischioso.

DEFINIZIONE 3 - Consideriamo due variabili casuali X e Y . Allora, X è detta precedere Y nel senso di *convex order*, $X \leq_{cx} Y$, se e solo se:

$$E[X] = E[Y] \text{ e}$$

² Tuttavia, anche se è nota la struttura di dipendenza di S , può essere comunque complicato determinarne da essa la distribuzione congiunta.

³ Dove, $(X - d)_+ = \max(0, X - d)$. La quantità $X - d$, rappresenta, infatti, la differenza tra la richiesta di pagamento dell'assicurato e quanto di fatto verserà l'assicurazione.

$$E[(X - d)_+] \leq E[(Y - d)_+], \text{ con } -\infty < d < +\infty. \quad (2)$$

Da un punto di vista economico, quindi, il *convex order* rappresenta le preferenze comuni a tutti i decisori avversi al rischio, tra le variabili casuali aventi la stessa media. Inoltre vale:

LEMMA 1 - Se $X \leq_{cx} Y$ e $f(\cdot)$ è una funzione convessa, allora $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$.

Questo risultato conferma che il *convex order* induce allo stesso ordinamento che si otterrebbe ordinando i valori attesi $E[f(X)]$, per tutte le funzioni convesse $f(\cdot)$ non decrescenti.

Chiariti questi concetti base, possiamo ora dedicarci a definire cosa si intende per *comonotonicity* di un insieme di n -vettori in \mathcal{R}^n (un n -vettore (y_1, y_2, \dots, y_n) , sarà di seguito indicato mediante \underline{y}).

DEFINIZIONE 4 - L'insieme $A \subseteq \mathcal{R}^n$ è comonotono se per tutti gli (y_1, y_2, \dots, y_n) e (z_1, z_2, \dots, z_n) dell'insieme, con $y_i \leq z_i$ per qualunque i , implica $y_j \leq z_j$ per tutti j .

Quindi, un insieme comonotono è simultaneamente non decrescente in ciascuna componente. Oltre a ciò, è anche da tenere presente che ogni sottoinsieme di un insieme comonotono, è pure comonotono.

Presentiamo ora un risultato sulla chiusura \bar{S} di un insieme comonotono, e definiamo poi il concetto di supporto di un vettore casuale comonotono n -dimensionale $\underline{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

PROPOSIZIONE 1 - La chiusura \bar{S} di un insieme comonotono S è una curva continua che è comonotona.

L'insieme \bar{S} , può essere parametrizzato mediante la seguente funzione continua non decrescente:

$$\bar{S} = \{(f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z))\}, \text{ con } -\infty < z < +\infty.$$

DEFINIZIONE 5 - Ogni insieme $A \subseteq \mathcal{R}^n$ è detto supporto di \underline{Y} se $\Pr[\underline{Y} \in A] = 1$.

Ora è quindi possibile definire il concetto di comonotonia di un vettore casuale.

DEFINIZIONE 6 - Un vettore casuale $\underline{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ si dice comonotono se ha un supporto comonotono.

La comonotonicità è quindi una struttura di dipendenza positiva molto forte. Infatti, se \underline{z} e \underline{y} sono elementi del supporto comonotono di \underline{Y} , cioè se \underline{z} e \underline{y} sono due suoi possibili esiti, allora ciascuna delle loro componenti deve essere a due a due ordinata, cioè $z_i \leq y_i$ per ogni i ⁴. Questo spiega anche il perché del termine comonotonia (comune monotonia). Non solo, la comonotonicità di un vettore \underline{Y} implica, che al valore più grande di una sua componente Y_j , corrisponde il valore maggiore di ogni altra componente Y_k .

PREPOSIZIONE 2 - Supponiamo che il supporto di un vettore casuale (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) sia contenuto entro chiusura \bar{S} . Allora, la funzione di ripartizione congiunta di (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) deve assumere la seguente forma:

$$\Pr[Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \dots, Y_n \leq y_n] = \min_{j=1, \dots, n} \Pr[Y_j \leq y_j]. \quad (3)$$

In base a questa proposizione, qualsiasi altro vettore casuale comonotono avente le stesse marginali di (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) possiede la medesima funzione di distribuzione (3).

A questo punto introduciamo la fondamentale nozione di *funzione quantile*. Data una funzione di distribuzione H , un possibile metodo per definire uno spazio di probabilità, ed in esso una variabile casuale Z distribuita secondo H , è quello di considerare come tale spazio l'intervallo $(0,1)$ e su di esso la distribuzione uniforme. Definiamo sull'intervallo unitario $(0,1)$ la *funzione quantile* (o inversa generalizzata H^{-1}) di H come:

$$H^{-1}(p) = \inf\{x / H(x) > p\}$$

completata da $H^{-1}(1) = \sup\{x / H(x) < 1\}$, e poniamo $Z = H^{-1}(U)$.

Il fatto che Z risulti distribuita secondo H verrà utilizzato ripetutamente. Meno intuitiva è, invece, l'unicità di H^{-1} , per cui se $g: (0,1) \rightarrow \mathfrak{R}$ è non decrescente e se $g(U) \sim H$, allora $g(U) = H^{-1}(U)$. Questa costruzione di una variabile casuale con funzione di distribuzione data, può essere estesa anche ad una coppia di variabili casuali comonotone con assegnate distribuzioni marginali F e G come, ad esempio, $F^{-1}(U)$ e $G^{-1}(U)$.

Consideriamo ora alcune funzioni cumulative univariate F .

⁴ Ciò significa che se $z_i \leq y_i$ per tutti gli i , allora c'è l'ordinamento di tutte le componenti di \underline{z} e \underline{y} per cui si ha che $\underline{z} \leq \underline{y}$.

E' noto che, se U è una variabile uniforme in $(0,1)$, allora la variabile casuale $F^{-1}(U)$ è distribuita secondo F . Grazie a questo risultato, siamo in grado di semplificare il calcolo della funzione di ripartizione congiunta menzionato in partenza.

PREPOSIZIONE 3 - Consideriamo un vettore casuale (X_1, X_2, \dots, X_n) . Il seguente vettore ha un supporto comonotono e le stesse distribuzioni marginali di (X_1, X_2, \dots, X_n) :

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = (F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U)). \quad (4)$$

In altri termini, dato un campione di numeri casuali generato secondo una funzione di distribuzione F_X , questo può essere generato da un campione di numeri casuali uniformi.

Come conseguenza della **PREPOSIZIONE 3**, il supporto di (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) , vettore comonotono, è quindi rappresentato dall'insieme:

$$\{(F_{X_1}^{-1}(u), F_{X_2}^{-1}(u), \dots, F_{X_n}^{-1}(u)) / 0 < u < 1\}.$$

Inoltre, è inoltre importante notare che, per la **PROPOSIZIONE 3**, ogni altro vettore casuale comonotono avente le stesse marginali di (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) , ha la stessa funzione di distribuzione cumulativa (4). Quindi, in questo caso $(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U))$ è l'unico vettore casuale comonotono con le stesse distribuzioni marginali di (X_1, X_2, \dots, X_n) .

COROLLARIO 1 - La funzione di ripartizione congiunta di un vettore casuale comonotono (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) , con le stesse distribuzioni marginali di (X_1, X_2, \dots, X_n) , soddisfa la seguente uguaglianza:

$$\Pr[Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \dots, Y_n \leq y_n] = \min_{j=1, \dots, n} \Pr[X_j \leq y_j].$$

Ciò significa che per determinare la probabilità che gli esiti degli n importi aleatori comonotoni (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) siano, rispettivamente, minori di (y_1, y_2, \dots, y_n) , è necessario calcolare quella corrispondente all'evento che fra tutti è meno probabile che si verifichi.

Possiamo, quindi, enunciare il seguente teorema:

TEOREMA 1 - Se un vettore casuale (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) è comonotono e ha le stesse marginali di (X_1, X_2, \dots, X_n) , allora:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq_{cx} Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n. \quad (5)$$

La disuguaglianza (5) è molto importante poiché afferma che il valore massimo, nel senso di *convex order*, assunto dalla somma delle componenti di un vettore casuale con marginali note, si ottiene nel caso in cui il vettore casuale (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) ha distribuzione comonotona, ovvero quando prese due possibili realizzazioni (y_1, y_2, \dots, y_n) e (z_1, z_2, \dots, z_n) di \underline{Y} , queste hanno le componenti ordinate.

Abbiamo anche visto che, per ogni vettore casuale \underline{Y} , gli esiti del suo complemento comonotono $Y^c = (Y_1^c, Y_2^c, \dots, Y_n^c)$ fanno parte, con probabilità uno, del seguente insieme:

$$\{(F_{X_1}^{-1}(u), F_{X_2}^{-1}(u), \dots, F_{X_n}^{-1}(u)) / 0 < u < 1\}.$$

Quindi, data la funzione di ripartizione inversa di una somma comonotona di importi aleatori, Y_1, Y_2, \dots, Y_n , espressa in termini della funzione di ripartizione inversa della variabile casuale X_i , è possibile derivare il seguente risultato:

$$F_{Y_1+Y_2+\dots+Y_n}^{-1}(u) = F_{X_1}^{-1}(u) + F_{X_2}^{-1}(u) + \dots + F_{X_n}^{-1}(u).$$

Perciò, quando le sole informazioni disponibili concernenti la funzione di distribuzione multivariata del vettore casuale (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) consistono nelle distribuzioni marginali di Y_i , allora la funzione di distribuzione $S^c = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) + \dots + F_{X_n}^{-1}(U)$ è una scelta prudente per approssimare la sconosciuta funzione di distribuzione della somma di partenza $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$. Essa, infatti, rappresenta il migliore limite superiore che possa essere calcolato, nel rispetto delle condizioni assegnate. Sfruttando questo risultato (secondo il quale nella classe di tutti i vettori con marginali date la somma comonotona è la più ampia nel senso di *convex order*), è stato provato che la comonotonicità può essere caratterizzata dalla correlazione massima di tutte le coppie di variabili casuali coinvolte. Per questa ragione, la comonotonicità è da molti considerata come un'estensione del concetto di correlazione perfetta positiva.

Accanto alle nozioni finora riportate, vale la pena di citare un'altra caratterizzazione del concetto di comonotonia fornito da Denneberg⁵, che può essere facilmente interpretata anche per le variabili casuali.

DEFINIZIONE 7 - Due funzioni $X, Y: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ sono comonotone se esiste una terza funzione $Z: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ e due funzioni crescenti f e g , tali che $X = f(Z)$ e $Y = g(Z)$.

⁵ Denneberg, D. (1994): "Non additive measure and integral". Kluwer Academic Publishers ([9]).

La proprietà fondamentale delle variabili casuali comonotone consiste nel comportamento delle *funzioni quantile* della loro somma. Infatti, date due variabili casuali X e Y , vale l'uguaglianza che segue:

$$F_{X+Y}^{-1}(u) = F_X^{-1}(u) + F_Y^{-1}(u).$$

Inoltre, per la *comonotonicity*, considerata la variabile casuale uniforme $U \sim U[0,1]$, si ha che $Z = g(U) = F_X^{-1}(u) + F_Y^{-1}(u)$, dove g è una funzione continua a sinistra e crescente.

È importante osservare come la comonotonia giochi per le *funzioni quantili* lo stesso ruolo che il concetto di indipendenza ha nei confronti della varianza. In dettaglio, per variabili casuali comonotone, la *funzione quantile* di una somma è equivalente alla somma delle funzioni quantili, così come la varianza di una somma coincide con la somma delle varianze, per variabili casuali indipendenti. Tuttavia, nonostante questo aspetto comune, l'indipendenza e la comonotonia sono due concetti diametralmente opposti, rappresentando quest'ultima uno stato di massima dipendenza.

Supponiamo ora di avere una somma $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ dove le $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$, denotano variabili casuali possibilmente dipendenti, rappresentanti i danni generati da vari rischi contro i quali si è assicurati. Ipotizziamo di conoscere le distribuzioni marginali delle Y_i , ma non la loro distribuzione congiunta. È naturale chiedersi a questo punto se esiste un modo per limitare il comportamento di S utilizzando la versione comotonona della distribuzione congiunta. A tal proposito, riportiamo il seguente risultato (per maggiori dettagli si veda [33]):

TEOREMA 2 - Data la somma $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, con $Y_i \sim Z_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$, e una funzione convessa ρ , si ha che:

$$E\rho(z) \leq E\rho(\tilde{Z}) = \int \rho\left(\sum F_i^{-1}(t)\right) dt \quad (6)$$

dove $\tilde{Z} = \sum \tilde{Y}_i = \sum F_i^{-1}(U)$ e $U \sim [0,1]$.

In base a questo teorema, si stabilisce ancora una volta che, dato un vettore (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) avente distribuzioni marginali note e considerata la sua distribuzione congiunta comotonona, la somma $S^c = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) + \dots + F_{X_n}^{-1}(U)$ è la più ampia possibile, nel senso di *convex order*, perché ne costituisce il limite superiore. Infatti, la

versione comonotona della distribuzione congiunta rappresenta il peggiore degli scenari per ogni funzione danno convessa.⁶

Per concludere e, allo stesso tempo, per riassumere i concetti enunciati, si propone ora un teorema nel quale vengono formulate diverse caratterizzazioni equivalenti per la *comonotonicity* di un vettore casuale (per maggiori dettagli si veda [14]):

TEOREMA 3 - Un vettore casuale $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ è comonotono se e solo se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

(1) \underline{Y} ha un supporto comonotono;

(2) Per tutti $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, abbiamo che: $F_{\underline{Y}}(y) = \min\{F_{Y_1}(y_1), F_{Y_2}(y_2), \dots, F_{Y_n}(y_n)\}$;

(3) Per $U \sim \text{Uniforme}(0,1)$, abbiamo che: $\underline{Y} = (F_{Y_1}^{-1}(U), F_{Y_2}^{-1}(U), \dots, F_{Y_n}^{-1}(U))$;

(4) Esiste una variabile casuale Z e funzioni non decrescenti f_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), tali che:
 $\underline{Y} = (f_1(Z), f_2(Z), \dots, f_n(Z))$.

In questa sezione è stato illustrato il concetto di comonotonicità.

La dipendenza tra le variabili casuali è considerata da molti studiosi un “*nasty business*”, una faccenda sgradevole, che spesso si ignora utilizzando misure di associazione lineare quali, ad esempio, il coefficiente di correlazione di Pearson. La comonotonicità, al contrario, appartiene ad una categoria di concetti di dipendenza più “attraenti”.

Il nostro compito è ora di constatare se tale metodo finora, considerato nell’ambito delle scienze attuariali per un portafoglio assicurativo costituito da n rischi, possa in qualche modo essere adattato, nell’ambito della finanza, ai prezzi dei contratti *futures*. Di questo tema tratteremo nelle sezioni che seguono.

4. RISULTATI TEORICI ED APPLICAZIONI

4.1. I contributi teorici

Lo scopo di questa sezione è di verificare se il concetto della comonotonia sia in grado di cogliere o di permettere formalizzazioni sull’andamento della somma dei prezzi *futures* di alcune *commodities*. A tal fine, indichiamo con $P_o(t)$ e con $P_f(t)$ le “funzioni prezzo” di

⁶ Essendo tale somma la più elevata nel senso di *convex order* è, di conseguenza, anche la più rischiosa.

due merci, ad esempio dell'orzo e del frumento, che descrivono l'andamento dei prezzi *futures* di queste *commodities* al variare del tempo t .

La nostra attenzione non è però rivolta ad analizzare individualmente le variazioni di $P_O(t)$ e $P_F(t)$ ma, piuttosto, a studiarne una relazione eventualmente esistente tra di essi mediante l'impiego dei metodi basati sulla *comonotonicity*. Infatti, come abbiamo constatato nella precedente sezione, la comonotonia rende più agevole lo studio della somma delle due "funzioni prezzo", $P_{O+F}(t) = P_O(t) + P_F(t)$, ovvero del valore del portafoglio finanziario composto dai due contratti *futures*. Studiare l'andamento di $P_{O+F}(t)$ significa, infatti, avere a che fare con la distribuzione congiunta di $P_O(t) + P_F(t)$, cosa in generale complessa se non si hanno informazioni al riguardo. Grazie alla comonotonicità possiamo invece ricavare maggiori notizie circa la struttura della dipendenza delle variabili casuali implicate, $P_O(t)$ e $P_F(t)$ (lo studio di tali quantità è abbastanza inusuale se pensiamo che, solitamente, si è interessati a considerare il rendimento di un portafoglio, anziché il suo valore). Quindi, date $P_O(t)$ e $P_F(t)$, intendiamo studiarne la dipendenza mediante l'analisi della loro somma $P_{O+F}(t) = P_O(t) + P_F(t)$ che costituisce, appunto, il valore del nostro portafoglio.

Ipotizziamo ora che $P_O(t)$ e $P_F(t)$ siano comonotone, supposizione per lo più realistica poiché, ad esempio, orzo e frumento sono due prodotti agricoli simili sia per caratteristiche, sia per le zone in cui vengono coltivati. Diamo a questo punto la seguente definizione adattata alla nostra analisi specifica:

DEFINIZIONE 7 - Date due funzioni, $P_O(t)$ e $P_F(t): [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}$, esse sono comonotone se per ogni $t_1, t_2 \in [0, T)$, si ha che:

$$[(P_O(t_1) - P_O(t_2))(P_F(t_1) - P_F(t_2))] \geq 0$$

o, equivalentemente, se la funzione di distribuzione cumulativa $F_{(P_O(t), P_F(t))}$ della coppia $(P_O(t), P_F(t))$, è data da:

$$F_{(P_O(t), P_F(t))}(\xi_1, \xi_2) = \min(F_{P_O}(\xi_1), F_{P_F}(\xi_2)).$$

In altre parole, ciò equivale ad affermare che $P_O(t)$ e $P_F(t)$ sono comonotone se manifestano lo stesso tipo di monotonia.

È utile notare che se siamo a conoscenza dell'esistenza di un'altra ed opportuna funzione $Z: [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}$, tale definizione può essere riformulata nel seguente modo:

DEFINIZIONE 8 - Due funzioni $P_O(t)$ e $P_F(t): [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}$ sono comonotone se esiste una terza funzione $Z: [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}$ e due funzioni crescenti, f e g , tali che:

$$P_O(t) = f(Z) \text{ e } P_F(t) = g(Z).$$

Passiamo ora ad esaminare l'importanza dell'utilizzo del concetto della comonotonicità per analizzare la struttura della dipendenza di $P_{O+F}(t) = P_O(t) + P_F(t)$.

Innanzitutto, ricordiamo che abbiamo supposto che $P_O(t)$ e $P_F(t)$ siano due variabili casuali comonotone; abbiamo già visto che una proprietà fondamentale è legata alle *funzioni quantili* della somma delle variabili medesime. Infatti, date $P_O(t)$ e $P_F(t)$, le due variabili casuali comonotone di interesse, e definite con $F_{P_O}^{-1}(u)$ e $F_{P_F}^{-1}(u)$ le loro funzioni di ripartizione inverse, vale la seguente uguaglianza:

$$F_{P_O+P_F}^{-1}(u) = F_{P_O}^{-1}(u) + F_{P_F}^{-1}(u) \text{ con } 0 < u < 1.$$

In questo senso, la comonotonia ha per le *funzioni quantili* lo stesso ruolo che il concetto di indipendenza ha per la varianza. Infatti, per variabili casuali comonotone la *funzione quantile* di una somma è uguale alla somma delle *funzioni quantili*, così come la varianza di una somma è pari alla somma delle varianze, per le variabili casuali indipendenti. Per questo motivo, data la funzione di ripartizione inversa F^{-1} delle due variabili casuali rappresentanti l'andamento dei prezzi *futures* dei due contratti, si ha che se $U \sim U[0,1]$, allora la variabile casuale $F_{P_O}^{-1}(U)$ o, indifferentemente, $F_{P_F}^{-1}(U)$, risulta essere distribuita secondo F . Questo risultato fondamentale è, come sappiamo, conseguenza della definizione di *funzione quantile*, data nella sezione 3.. Lo stesso Denneberg ha dimostrato, per la comonotonicità di $P_O(t)$ e $P_F(t)$, che considerata una variabile casuale $U \sim U[0,1]$, si ha:

$$Z = F_{P_O}^{-1}(U) + F_{P_F}^{-1}(U) = g(U)$$

dove g è una funzione continua a sinistra e crescente.

L'utilità di questo risultato è notevole, poiché le due variabili casuali $P_O(t)$ e $P_F(t)$ soddisfano le seguenti uguaglianze in distribuzione:

$$P_O(t) = F_{P_O}^{-1}(U) \text{ e } P_F(t) = F_{P_F}^{-1}(U).$$

Così, infatti, possiamo semplificare di molto lo studio della complessa e sconosciuta distribuzione congiunta $P_{O+F}(t) = P_O(t) + P_F(t)$, che può essere sostituita da quella più agevole di una variabile casuale comonotona Z definita come segue:

$$Z = F_{P_{O+F}}^{-1}(U) = F_{P_O}^{-1}(U) + F_{P_F}^{-1}(U) = g(U)$$

dove g è, come al solito, una funzione crescente.

Mentre la funzione di ripartizione di P_{O+F} si può ottenere soltanto se è nota la struttura di dipendenza delle due “funzioni prezzo”, quella di Z si ottiene invece con maggiore facilità, poiché tale somma ha una distribuzione unidimensionale, essendo esprimibile unicamente dalla variabile casuale uniforme U . Non solo, nella precedente sezione abbiamo illustrato che, data una classe di vettori casuali e note le loro distribuzioni marginali, la somma di vettori comonotoni è la più ampia, nel senso di *convex order*. Per la stessa ragione, anche nel nostro caso, se le due variabili casuali $P_O(t)$ e $P_F(t)$ sono comonotone, la loro somma $P_{O+F}(t) = P_O(t) + P_F(t)$ - pure comonotona - è la più grande in termini di *convex order* e, di conseguenza, la loro comonotonicità definisce uno stato di massima dipendenza tra $P_O(t)$ e $P_F(t)$. Perciò, quando le sole informazioni disponibili concernenti la distribuzione della somma $P_{O+F}(t) = P_O(t) + P_F(t)$ consistono nelle funzioni marginali di $P_O(t)$ e $P_F(t)$, la funzione di distribuzione $Z = F_{P_O}^{-1}(U) + F_{P_F}^{-1}(U)$ è una scelta prudente per approssimare quella complessa e sconosciuta di P_{O+F} .

Fino a questo punto abbiamo ipotizzato che le variabili casuali $P_O(t)$ e $P_F(t)$ siano comonotone, perché considerando merci agricole simili quali, ad esempio, l'orzo ed il frumento, questa congettura sembra di fatto essere plausibile. Passiamo ora a supporre che $P_O(t)$ e $P_F(t)$ siano due variabili casuali non comonotone. In questo caso, sorge spontaneo chiedersi come possa essere impiegato il concetto di comonotonicità e se, comunque, il suo impiego comporti qualche utilità.

Nonostante le due variabili $P_O(t)$ e $P_F(t)$ non siano comonotone, è tuttavia possibile limitare il comportamento della distribuzione congiunta $P_{O+F}(t) = P_O(t) + P_F(t)$ utilizzando la versione comonotona della loro distribuzione. Possiamo, quindi, adattare il **TEOREMA 3** presentato nella precedente sezione relativamente alle “funzioni prezzo” dei due contratti *futures*, nel modo seguente:

TEOREMA 4 - Dato $P_{O+F}(t) = P_O(t) + P_F(t)$, con $P_O \sim F_O$ e $P_F \sim F_F$ e una funzione convessa ρ , si ha che:

$$E\rho(P_{O+F}) \leq E\rho(\tilde{Z}) = \int \rho(F_O^{-1}(t) + F_F^{-1}(t))$$

dove $\tilde{Z} = F_O^{-1}(U) + F_F^{-1}(U)$ rappresenta la versione comonotona della distribuzione congiunta di $P_O(t) + P_F(t)$.

In questo modo riusciamo a stabilire ugualmente un limite superiore per la sconosciuta e complessa funzione di distribuzione della somma $P_O(t) + P_F(t)$. In corrispondenza di tale limite, otteniamo il valore massimo che può assumere il nostro portafoglio finanziario.

Quindi, nonostante l'ipotesi di non comonotonia di $P_O(t)$ e $P_F(t)$, se le uniche informazioni sulla distribuzione congiunta delle due variabili casuali sono rappresentate dalle distribuzioni marginali di $P_O(t)$ e $P_F(t)$, soltanto la versione comonotona della loro somma, $Z = F_{P_O}^{-1}(U) + F_{P_F}^{-1}(U)$, è in grado di fornire notizie rilevanti.

Questo risultato mette in luce l'utilità del concetto della comonotonicità. Essa, infatti, ci consente non solo di semplificare lo studio di P_{O+F} rendendo la distribuzione di tale somma unidimensionale, ma allo stesso tempo fornisce indicazioni importanti sulla struttura della dipendenza delle due variabili casuali. Nel nostro caso specifico, essendo $P_O(t)$ e $P_F(t)$ le "funzioni prezzo" di due *commodities*, siamo in grado di interpretare l'andamento della loro somma, di misurare la dipendenza tra di esse e, infine, di calcolare il valore massimo assunto dal nostro portafoglio finanziario.

4.2. I contributi empirici

Nella precedente sotto-sezione si è verificato, da un punto di vista teorico, che è possibile studiare l'interdipendenza tra i prezzi dei prodotti agricoli utilizzando il concetto della comonotonicità. A questo punto, il nostro scopo è di verificare empiricamente la presenza, o meno, di comonotonicità tra alcune serie storiche dei prezzi *futures* di *commodities* quali, in particolare, l'avena, il frumento, il grano e la soia, che rappresentano le attività sottostanti di alcuni importanti contratti *futures* negoziati presso la borsa di Chicago.

L'intervallo di tempo preso in esame spazia dal 1 gennaio 1991 al 30 giugno del medesimo anno e comprende quindi 125 realizzazioni, ovvero 125 quotazioni *futures* (*daily settlement prices*).

Per prima cosa, risulta utile analizzare graficamente gli andamenti dei prezzi di ciascuna delle *commodities* al variare del tempo e confrontarli tra loro, in modo tale da valutare se, da un punto di vista grafico, vi siano delle analogie. Per procedere in tal senso, si normalizza ogni quotazione per permettere la comparazione tra le “funzioni prezzo” delle quattro merci agricole esaminate (la normalizzazione è opportuna poiché i prezzi del grano variano nell’intervallo di [225, 340] centesimi per staio⁷, mentre quelli del frumento, dell’avena e della soia si muovono, rispettivamente, negli intervalli di [246, 301], [103, 131] e [528, 600] centesimi per staio). Per normalizzare le serie storiche dei quattro prodotti agricoli è necessario individuare per ciascuna di esse il prezzo minimo e quello massimo e, successivamente, calcolare per ogni quotazione il seguente valore:

$$\frac{P_{MERCIE,t} - P_{MERCIE,min}}{P_{MERCIE,max} - P_{MERCIE,min}} \in [0, 1]. \quad (7)$$

Al fine di una maggiore “leggibilità” abbiamo inoltre moltiplicato le quotazioni normalizzate per 10000.

Per mezzo dei prezzi *futures* normalizzati, siamo ora in grado di effettuare una prima semplice analisi grafica comparativa degli andamenti delle quotazioni delle *commodities* al variare del tempo. Da questa analisi appare evidente l’esistenza di una “somiglianza” tra il movimento dei prezzi del frumento con quello dei prezzi dell’avena, e tra il movimento dei prezzi del grano con quello dei prezzi della soia.

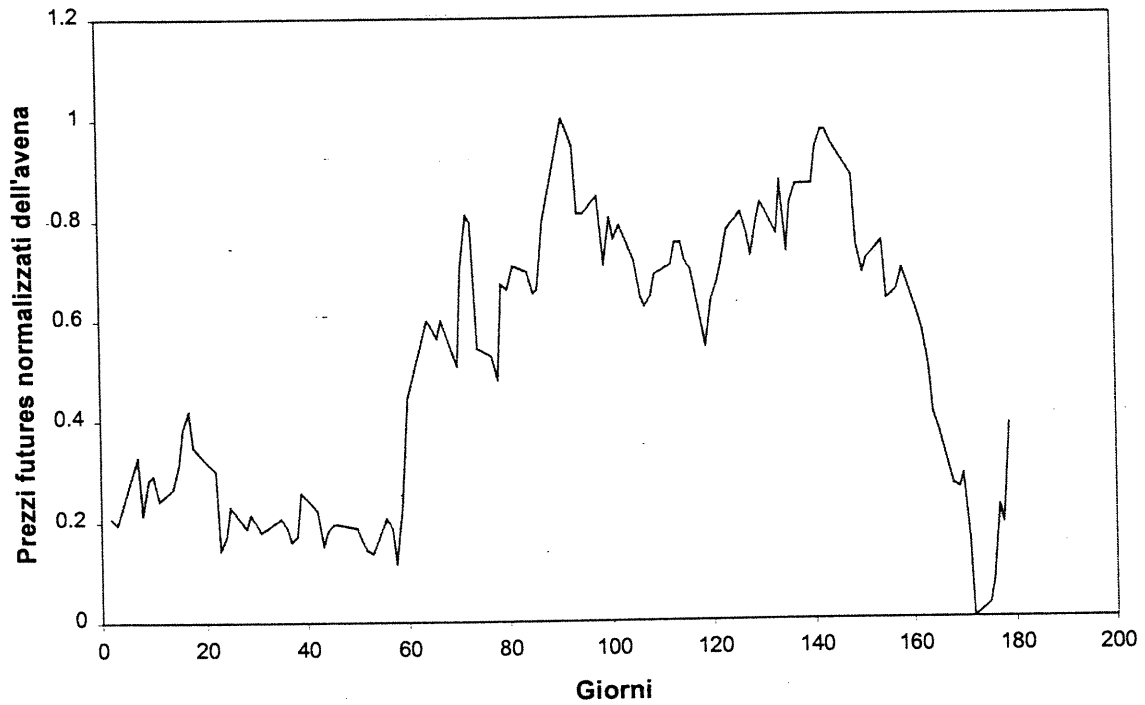
Le analogie rilevate tra le quotazioni delle due coppie di prodotti agricoli non devono sorprendere; infatti, sono coerenti con i già citati risultati proposti in letteratura da Malliaris ed Urrutia (per maggiori dettagli si veda [35]). Infatti, i loro studi compiuti considerando i prezzi *futures* delle merci agricole hanno confermato l’esistenza di correlazione reciproca tra il frumento e l’avena e tra la soia e l’avena. Quindi, possiamo aspettarci che le *commodities* che risultano caratterizzate da serie temporali delle quotazioni il cui andamento è molto simile siano anche comonotone.

Al fine di investigare in tal senso, inizialmente indichiamo con $P_F(t)$, $P_A(t)$, $P_G(t)$ e $P_S(t)$: $[0, T) \rightarrow \mathfrak{R}$ le “funzioni prezzo”, rispettivamente, del frumento, dell’avena, del grano e della soia. Per la **DEFINIZIONE 7** di comonotonicità, considerata, ad esempio, le variabili $P_F(t)$, $P_A(t)$, affinché queste risultino comonotone deve essere soddisfatta per ogni $t_1, t_2 \in [0, T)$ la seguente disuguaglianza:

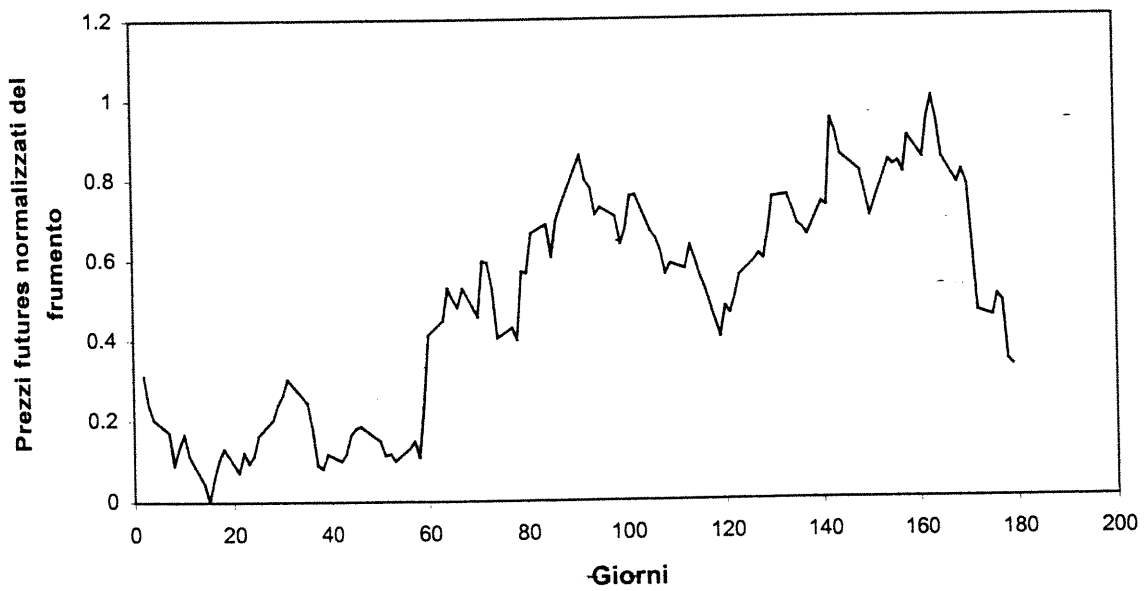
⁷ La dimensione del contratto (5000 stai) è la stessa per ognuna delle quattro merci agricole.

$$[P_F(t_1) - P_F(t_2)] \cdot [P_A(t_1) - P_A(t_2)] \geq 0. \quad (8)$$

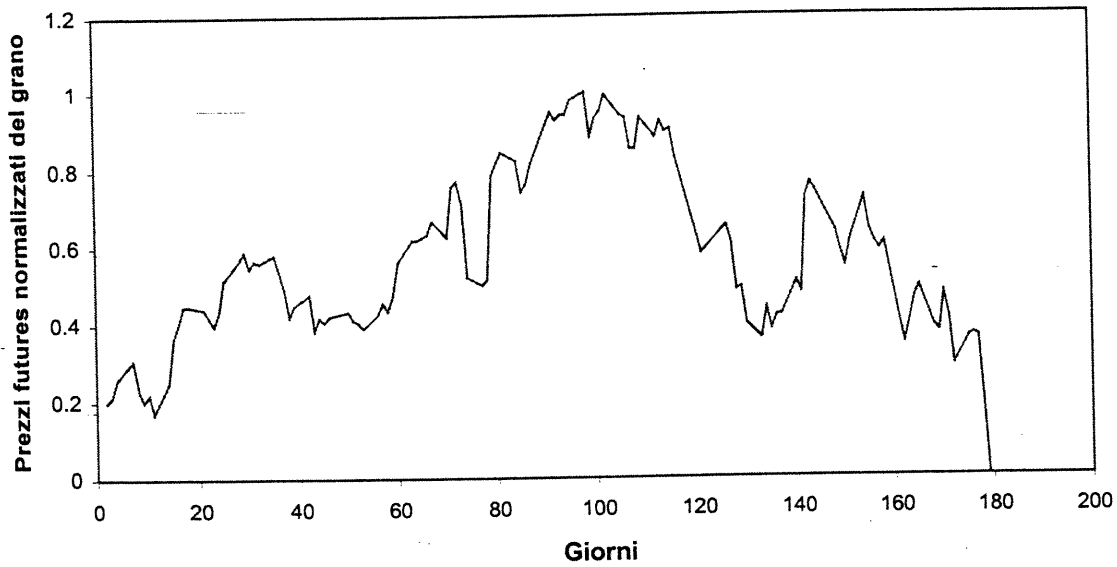
SERIE TEMPORALE DEI PREZZI DELL'AVENA (GENNAIO-GIUGNO 1991)



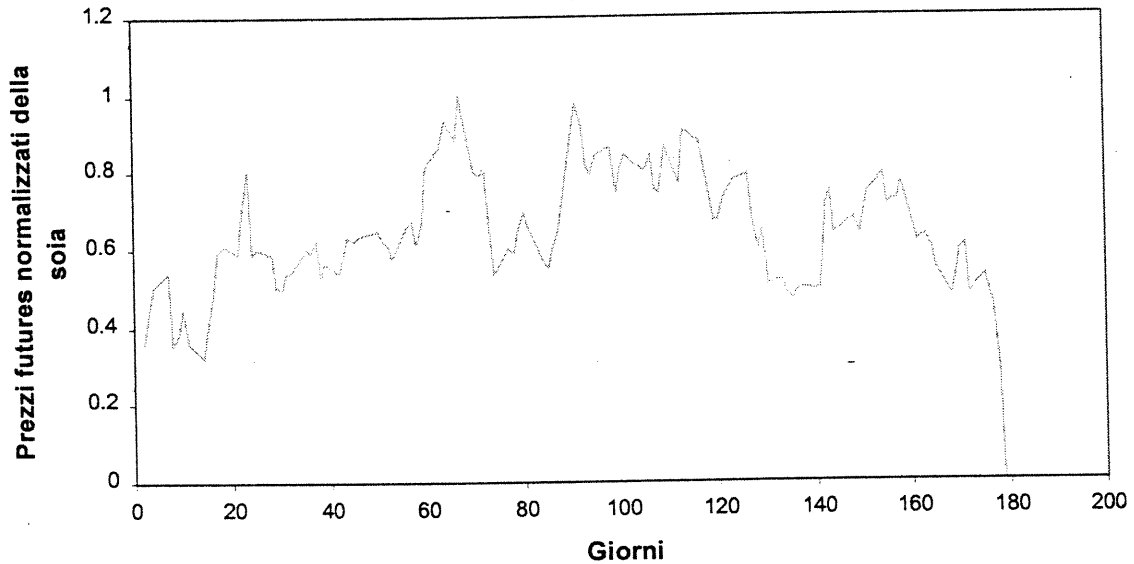
SERIE TEMPORALE DEI PREZZI DEL FRUMENTO (GENNAIO-GIUGNO 1991)



SERIE TEMPORALE DEI PREZZI DEL GRANO (GENNAIO-GIUGNO 1991)

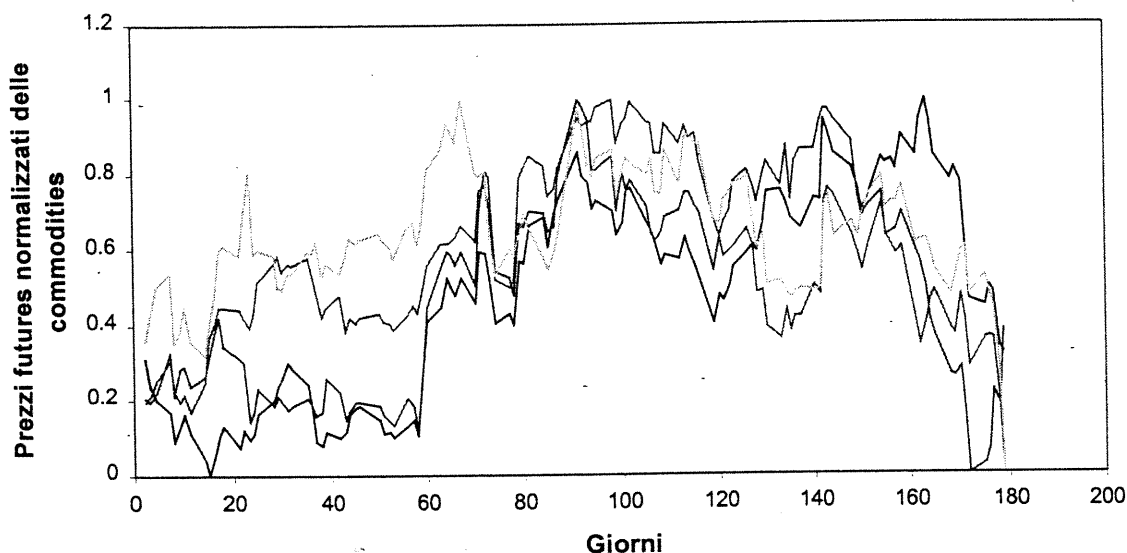


SERIE TEMPORALE DEI PREZZI DELLA SOIA (GENNAIO-GIUGNO 1991)



Investigando numericamente le serie temporali dei prezzi dell'avena e del frumento e del grano e della soia, si è constatato che condizione (8) risulta rispettata per la maggior parte dell'arco di tempo esaminato.

SERIE TEMPORALE DEI PREZZI DELLE COMMODITIES (GENNAIO-GIUGNO 1991)



Questo risultato comporta delle implicazioni di interessante rilevanza pratica:

- innanzitutto, un soggetto che intende acquistare dei contratti *futures* aventi per attività sottostanti delle merci agricole i cui prezzi siano comonotoni (come, ad esempio, il frumento e l'avena), verrà a possedere un portafoglio finanziario con valore massimo; infatti, in questo caso la distribuzione congiunta della somma delle due variabili casuali sarà perfettamente rappresentata dalla versione comonotona Z^C , ovvero dal limite superiore massimo di $P_{F+A}(t)$;
- poi, ricordando che nella precedente sezione abbiamo osservato che la nozione di comonotonicità può considerarsi un'estensione del concetto di correlazione perfetta positiva, ne discende che le "funzioni prezzo", rispettivamente, del frumento e dell'avena e quelle del grano e della soia, poiché comonotone, sono anche correlate tra di loro.

La nozione di comonotonicità è, tuttavia, funzionale anche quando le variabili casuali esaminate non sono comonotone. Infatti, sebbene non si possa conoscere in maniera esauriente l'andamento della distribuzione congiunta è comunque possibile determinare il limite massimo superiore per mezzo della rispettiva versione comonotona. Pertanto, nella nostra sperimentazione abbiamo anche considerato due prodotti le cui "funzioni prezzo" non sono comonotone: il frumento ed il grano.

Per determinare (empiricamente) la versione comonotona della distribuzione congiunta $P_F(t) + P_G(t)$ abbiamo dapprima determinato le frequenze assolute per tutte e due le *commodities* e, successivamente, quelle relative. Quindi, sulla base delle frequenze relative, si sono ricavate delle funzioni di ripartizione “a scalino” dei prezzi *futures* del frumento e del grano. Infine, sulla base delle funzioni di ripartizione “a scalino”, abbiamo ricavato delle funzioni di ripartizione continue dei medesimi prezzi mediante interpolazione.

Note, quindi, le funzioni di ripartizione continue dei prezzi *futures* del frumento e del grano, per conoscere il limite massimo superiore del portafoglio finanziario composto dai due contratti *futures* è bastato determinare la funzione di ripartizione inversa delle due variabili casuali e considerarne la somma. Quindi, indipendentemente dal fatto che le variabili casuali esaminate siano comonotone, questa semplice applicazione numerica del concetto di *comonotonicity* ha confermato la potenza di tale tecnica nel fornire delle informazioni rilevanti sull'andamento di $P_{F+G}(t)$.

Infine, va sottolineato che, sebbene nella nostra trattazione la nozione di comonotonicità sia stata applicata ai prezzi *futures* di alcune merci agricole, essa può essere comunque estesa al caso in cui le attività sottostanti il contratto derivato siano, ad esempio, rappresentate da delle valute o da degli indici azionari.

5. CONCLUSIONI

In questo articolo è stato analizzato il fenomeno dell'interdipendenza tra i prezzi di alcuni contratti *futures*, aventi per attività sottostante dei prodotti agricoli.

Poiché i metodi d'analisi proposti in letteratura non sono molto numerosi e talvolta conducono a risultati contraddittori, in questa trattazione si è preferito affrontare il problema facendo uso del concetto della comonotonicità. Abbiamo quindi verificato se tale tecnica, finora applicata prevalentemente nel campo delle scienze attuariali a portafogli assicurativi costituiti da n oggetti rischiosi, possa in qualche modo essere adattata, nell'ambito della finanza, al caso di un portafoglio finanziario composto da contratti derivati quali i *futures*. In tal senso, date le “funzioni prezzo” dei *futures* su due opportuni prodotti agricoli (quali, ad esempio, l'orzo ed il frumento), e considerata la loro somma, si è dimostrato che la comonotonia è utile per conoscere l'andamento della variabile casuale $P_{O+F}(t) = P_O(t) + P_F(t)$ e per stabilire un limite superiore alla sua distribuzione e, quindi, per

determinare il valore massimo che può assumere il portafoglio composto dai due contratti *futures*.

Ora proponiamo alcune considerazioni finali inerenti all'argomento trattato.

Innanzitutto, è da evidenziare come la funzionalità della comonotonia risieda, in particolare, nell'utilizzo della *funzione quantile*, mediante la quale è possibile semplificare la distribuzione congiunta di $P_{O+F}(t) = P_O(t) + P_F(t)$. Infatti, per la comonotonicità di $P_O(t)$ e $P_F(t)$, data una variabile uniforme $U \sim U[0,1]$, la $P_{O+F}(t) = P_O(t) + P_F(t)$ risulta perfettamente approssimata da $Z = F_{P_O}^{-1}(U) + F_{P_F}^{-1}(U)$. L'impiego di F^{-1} richiede, però, la conoscenza della funzione di ripartizione inversa, che può assumere una forma più o meno complessa. La difficoltà principale consiste, quindi, nel determinare la funzione cumulativa per le "funzioni prezzo" dei due prodotti agricoli, $P_O(t)$ e $P_F(t)$.

Fino a questo momento, abbiamo applicato la comonotonicità a delle variabili casuali, gli n rischi o le "funzioni prezzo" delle *commodities*. Recentemente, Jouini *et al.* ([29]) hanno esteso questo concetto anche ai processi stocastici ed hanno dimostrato che l'ipotesi di comonotonia impone forti limiti sui coefficienti di dispersione di due processi Markoviani.

In questo nostro studio siamo ricorsi al concetto di comonotonia per verificare l'interdipendenza tra i prezzi dei prodotti agricoli. La crescente attenzione rivolta a questa problematica deve farci riflettere sulle utilità considerevoli che possono derivare dalla presenza di relazioni tra i prezzi dei *commodity futures*.

Innanzitutto, supposto che vi sia comovimento tra le quotazioni di alcuni beni agricoli, è evidente che la conoscenza dell'andamento della funzione prezzo di una qualsiasi tra le merci considerate può fornire informazioni importanti anche per le altre materie ad essa collegate.

L'utilità derivante dalla presenza di una relazione tra i prezzi dei beni agricoli non si esaurisce, tuttavia, nel fatto di segnalare informazioni vantaggiose per le altre *commodities*. È necessario, infatti, menzionare una seconda proficua implicazione riguardante la possibilità di effettuare delle coperture o speculazioni incrociate mediante l'impiego dei contratti *futures*. Come esemplificazione assumiamo che due beni come il grano e la soia siano economicamente legati tra loro e che, di conseguenza, sussista comovimento tra i relativi prezzi. Questa condizione ci consente quindi di effettuare delle coperture o delle speculazioni incrociate, ovvero di coprire una posizione "a pronti", lunga o corta sulla soia, mediante una posizione "a termine" nel più liquido mercato *futures* del grano.

Riferimenti bibliografici

- [1] BOOTH G. e CINER C., "Linkages among agricultural commodity futures prices: evidence from Tokyo", *Applied Economics Letters*, 8, 2001, pp. 311-313.
- [2] CAPPELLINA L., "I futures: copertura del rischio finanziario e strumento speculativo", *Greta*, Venezia.
- [3] CAPPUCCIO N. e ORSI R., "Econometria", *Il Mulino*, Bologna, 1991.
- [4] CLARK P. K., "A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices", *Econometrica*, 41, 1973, pp. 135-155.
- [5] CICCHITELLI G., "Probabilità e statistica", *Maggioli*, Rimini, 1984.
- [6] CORAZZA M., "Esponente di Hurst ed analisi rescaled range: alcuni risultati", pubblicato su *Rapporto del Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica dell'Università degli Studi di Venezia*.
- [7] DAWSON P. J. e WHITE B., "Interdependencies between agricultural commodity futures prices on the LIFFE", *The Journal of futures Markets*, Vol. 22, No. 3, 2002, pp. 269-280.
- [8] DENNEBERG D., "Premium calculation: why standard deviation should be replaced by absolute deviation", *Astin Bulletin*, Vol. 20, No. 2, 1999, pp. 181-190
- [9] DENNEBERG D., "Non additive measure and integral", *Kluwer Academic Publishers*, Boston, 1994.
- [10] DENUIT M., GENEST C. e MARCEAU E., "Stochastic bounds on sums of dependent risks", *Insurance: Mathematics and Economics*, 25, 1999, pp. 85-104.
- [11] DHAENE J. e SHAUN W., "Comonotonicity, correlation order and premium principles", *Insurance: Mathematics and Economics*, 22, 1998, pp. 235-242.
- [12] DHAENE J. e GOOVAERTS M. J., "Dependency of risks and stop-loss order", *Astin Bulletin*, 26, 1996, pp. 202-212.
- [13] DHAENE J., WANG S., YOUNG V. e GOOVAERTS M. J., "Comonotonicity and maximal stop-loss premium", *Bulletin of Swiss Association of Actuaries*, 2, 2000, pp. 99-113.
- [14] DHAENE J., DENUIT M., GOOVAERTS M. J., KAAS R. e VYNCKE D., "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Theory", *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 2002, pp.3-33.
- [15] DHAENE J., DENUIT M., GOOVAERTS M. J., KAAS R. e VYNCKE D., "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: application", *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 2002, pp. 133-161.
- [16] DICKEY D. A. e FULLER A., "Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with unit root", *Econometrica*, 49, 1987, pp. 1057-1072.
- [17] ENGLE R. F. e GRANGER C. W. J., "Cointegration and error correction representation, estimation and testing", *Econometrica*, 55, 1987, pp. 251-276.
- [18] GENEST C., MARCEAU E. e MESFIQUI M., "Upper stop-loss bounds for sums of possibly dependent risks with given means and variances", 2001, pp. 1-12.
- [19] GHIRARDATO P., KLIBANOFF P. e MARINACCI M., "Additivity with multiple priors", *Journal of Mathematical Economics*, 30, 1998, pp. 405-420.
- [20] GOOVAERTS M. J., DHAENE J. e DE SCHEPPER A., "Stochastic upper bounds for present value function", *Journal of risk and insurance theory*, 67, 2000, pp. 1-14.

- [21] GOOVAERTS M. J., DHAENE J., VANDEN BORRE E. e REDANT H., "Some remarks on IBNR evaluation techniques", *Belgian Actuarial Bulletin*, Vol. 1, No. 1, 2001, pp. 58-60.
- [22] GOOVAERTS M. J. e KAAS R., "Some problems in actuarial finance involving sums of dependent risks", *Statistica Neerlandica*.
- [23] HOLDER M. E., PACE R. D. e TOMAS III M. J., "Complements or substitutes? Equivalent futures contract markets. The case of corn futures on U. S. and Japanese Exchanges", *The Journal of Futures Markets*, Vol. 22, No. 4, 2002, pp. 355-370.
- [24] HULL J. C., "Opzioni, Futures e altri derivati", *Prentice-Hall e Il Sole 24 Ore libri*, 2000.
- [25] JOHANSEN S., "Statistical analysis of cointegrating vectors", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 1988, pp. 231-254.
- [26] JOHANSEN S., "Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models", *Econometrica*, 59, 1991, pp. 1551-1590.
- [27] JOHANSEN S., "Determination of cointegration rank in the presence of a linear trend", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, 1992, pp. 383-397.
- [28] JOHNSTON J., "Econometrica", *Franco Angeli*, Milano, 1993.
- [29] JOUINI E. e NAPP C., "Comonotonic processes", *Insurance: Mathematics and Economics*, 32, 2003, pp. 255-265.
- [30] KAAS R., DHAENE J. e GOOVAERTS M. J., "Upper and lower bounds for sums of random variables", *Insurance: Mathematics and Economics*, 27, 2000, pp. 151-168.
- [31] KAAS R., DHAENE J., VYNCKE D., GOOVAERTS M. J. e DENUIT M., "A simple geometric proof that comonotonic risks have the convex-largest sum", *Research Report Department of Applied Economics*, K. U. Leuven, 2001, pp. 1-49.
- [32] KANG E. LIU, GEAUN J. e LI-FEN L., "Optimal hedging decisions for Taiwanese corn traders on the way to liberalisation", *Agricultural Economics*, 25, 2001, pp. 303-309.
- [33] KOENKER R., "Memo-random number one on comonotonicity", pp. 1-4.
- [34] LANDENNA G., "Fondamenti di statistica descrittiva", *Il Mulino*, Bologna, 1994.
- [35] MALLIARIS A. G. e URRUTIA J. L., "Linkages between agricultural commodity futures contracts", *The Journal of Futures Markets*, Vol. 16, 1996, pp. 595-609.
- [36] MAZZOCCO G. N. (a cura di), "Gli strumenti finanziari di mercato aperto", *Giappichelli*, Torino, 2000.
- [37] MOOD A. M., GRAYBILL F. A. e BOES D. C., "Introduzione alla statistica", *McGraw-Hill*, Milano, 1991.
- [38] OSTERWALD-LENUM M., "A note with quantiles of the asymptotic distribution of the maximum likelihood cointegration rank test statistics", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, 1992, pp. 461-471.
- [39] PIANCA P., Dispense riguardanti i contratti *futures e forward*.
- [40] PICCOLO D. e VITALE C., "Metodi statistici per l'analisi economica", *Il Mulino*, Bologna, 1984.
- [41] PITACCO E., "Elementi di matematica delle assicurazioni", *LINT*, Trieste, 2000.
- [42] PINDYCK R. S. e ROTEMBERG J., "The excess co-movement of commodity prices", *The Economic Journal*, 100, 1990, pp. 1173-1189.
- [43] ROSS S. A., WESTERNFIELD R. W. e JAFFE R., *Finanza aziendale*, *Il Mulino*, Bologna, 1997.
- [44] SØRENSEN C., "Modelling seasonality in agricultural commodity futures", *The Journal of Futures Markets*, Vol. 22, No. 5, 2002, pp. 393-426.

- [45] STEVENS S. C., "Evidence for a weather persistence effect on the corn, wheat and soybean growing season price dynamics", *The Journal of Futures Markets*, Vol. 11, 1991, pp. 81-88.
- [46] SIMON S., GOOVAERTS M. J. e DHAENE J., "An easy computable upper bound for the price of an arithmetic Asian option", *Insurance: Mathematics and Economics*, 26, 2000, pp. 175-184.
- [47] TURVEY C. G., "Random walks and fractal structures in agricultural commodity futures prices", *Department of Agricultural Economics and Business*, University of Guelph, Guelph, Ontario, 2001.
- [48] VYNCKE D., GOOVAERTS M. J. e DHAENE J., "Convex upper and lower bounds for present value functions", *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 2000.
- [49] WANG S., "Premium calculation by transforming the layer premium density", *Causality Actuaries Reinsurance Seminar in New York*, June 26-27, 1995, pp. 1-25.
- [50] WORKING H., "New concepts concerning futures markets and prices", *American Economic Review*, No. 52, 1962.
- [51] ZIVOT E. e ANDREWS D., "Further evidence on the great crash, the oil price shock and the unit-root hypothesis", *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 1992, pp. 251-270.

Siti web visitati

1. www.agmarketing.com
2. www.borsaitalia.it
3. www.cbot.com
4. www.cme.com
5. www.dailyfutures.com
6. www.elsevier.com
7. www.google.com
8. www.interscience.wiley.com
9. www.marketjournal.com
10. www.msn.com
11. www.tandf.co.uk
12. www.usafutures.com
13. www.unibo.it
14. www.unipd.it

- 104/2002 Fulvio Piccinonno
Un nuovo algoritmo di tipo MAP a basso consumo di memoria per la decodifica di codici a correzione di errore.
- 105/2002 A. Basso, M. Nardon, P. Pianca
Discrete and continuous time approximations of the optimal exercise boundary of American options
- 106/2002 A. Basso, M. Nardon, P. Pianca
Optimal exercise of American options
- 107/2002 A. Basso S. Funari
Measuring the performance of ethical mutual funds: a DEA approach
- 108/2002 T. Bassetto, F. Mason, F. Piccinonno
Il problema del commesso viaggiatore Single-Double
- 109/2002 A. Basso, M. Nardon, P. Pianca
An analysis of the effects of continuous dividends on the exercise of American options
- 110/2002 S. Giove, S. Funari, C. Nardelli
Analisi intervallare per modelli di selezione di portafoglio.
- 111/2002 S. Giove, F. Piccione, F. Beverina, G. Palmas, S. Silvoni
Un ambiente modulare ed integrato per lo sviluppo di una interfaccia uomo-macchina
- 112/2002 M. Cardin, P. Ferretti
Comparing bivariate risks: measures of dependence, concordance diversification
- 113/2002 M. Cardin, P. Ferretti
On multivariate risk aversion