UNIVERSITÀ CA' FOSCARI DI VENEZIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA APPLICATA

Marco CORAZZA

LA REVISIONE STATICA DEL PORTAFOGLIO AZIONARIO: I PRINCIPALI MODELLI CLASSICI

N. 7/2002

UNIVERSITÀ CA' FOSCARI DI VENEZIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA APPLICATA

Marco CORAZZA

LA REVISIONE STATICA DEL PORTAFOGLIO AZIONARIO: I PRINCIPALI MODELLI CLASSICI

N. 7/2002

LA REVISIONE STATICA DEL PORTAFOGLIO AZIONARIO: I PRINCIPALI MODELLI CLASSICI

Marco CORAZZA
E-mail: `corazza@unive.it`

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia

ABSTRACT - La classica selezione di portafoglio alla Markowitz utilizza come parametri i rendimenti attesi dei titoli considerati e le relative varianze e correlazioni. Uno degli approcci classici per stimare questi parametri è quello di utilizzare i rendimenti passati. Sfortunatamente, le serie temporali di tali rendimenti di solito non risultano stazionarie, come hanno anche mostrato alcune ricerche empiriche. Pertanto, se all'istante t selezioniamo un portafoglio $X°$ che giace sulla frontiera efficiente determinata in quello stesso istante, al successivo istante t+1 tale portafoglio potrebbe non giacere più sulla nuova frontiera efficiente. La soluzione di questo problema consiste, se conviene, nel riposizionare opportunamente sulla nuova frontiera efficiente il vecchio portafoglio variandone opportunamente le quote percentuali di ricchezza investita nei vari titoli considerati. Questo processo prende il nome di revisione statica del portafoglio. In particolare, in questo lavoro presentiamo alcuni studi relativi alla revisione statica di portafoglio: quello di Smith, quello di Stone e Hill e quello di Schreiner da un lato, e quello di Pogue e quello di Chen, Jen e Zionts dall'altro. La scelta di raggruppare come specificato i modelli di revisione non è casuale, infatti questo raggruppamento rispecchia due diverse "filosofie" cui è possibile ispirarsi per affrontare il problema medesimo della revisione.

KEYWORDS - Portafoglio azionario, revisione statica, costi di revisione, modello di Smith, modello di Stone e Hill, modello di Schreiner, modello di Pogue e modello di Chen, Jen e Zionts.

1 INTRODUZIONE E MOTIVAZIONI

Come noto, la selezione di portafoglio alla Markowitz (si veda, ad esempio, [Markowitz 1952] e [Markowitz, 1959]) utilizza come parametri i rendimenti attesi dei titoli considerati e le relative varianze e correlazioni. Ai fini di un'"ottimale" applicazione di questo criterio di selezione, tali valori attesi, varianze e correlazioni dovrebbero essere quelli ricavati dai rendimenti futuri dei titoli (ovvero quelli "veri"). Ovviamente, poiché non possiamo conoscere i rendimenti futuri, i parametri di interesse devono necessariamente essere stimati. Uno degli approcci classici per ottenere queste stime è quello di utilizzare i rendimenti passati, metodo che risulta efficace se si considerano serie storiche stazionarie. Sfortunatamente, i rendimenti dei titoli azionari di solito non risultano stazionari, come hanno anche mostrato alcune ricerche empiriche[1]. Tali ricerche hanno infatti rigettato ipotesi di stazionarietà sia in media, sia in varianza, anche se è da puntualizzare che per brevi periodi si può comunque avere una certa "stabilità" delle stime stesse. La non stazionarietà delle serie storiche dei rendimenti azionari crea non pochi problemi ai fini dell'applicazione del modello di Markowitz; infatti, utilizzare una serie storica non stazionaria significa che le stime dei parametri di interesse (valori attesi, varianze e correlazioni) possono non essere attendibili e che tali stime possono cambiare, anche di molto, al fluire del tempo. In altri termini, se all'istante t selezioniamo un portafoglio X^o che giace sulla frontiera efficiente determinata in quello stesso istante, al successivo istante $t+1$ tale portafoglio potrebbe non giacere più sulla nuova frontiera efficiente, ovvero sulla frontiera relativa al nuovo istante temporale.

L'ovvia soluzione a questo problema consiste, se conviene, nel riposizionare sulla nuova frontiera efficiente il vecchio portafoglio variandone opportunamente le quote percentuali di ricchezza investita nei vari titoli considerati. Questo processo prende il nome di revisione statica del portafoglio.

Il seguito di questo lavoro è organizzato come segue. Nella sezione **2** illustriamo qualitativamente le principali tipologie di costi implicate dalla revisione. Nella sezione **3** presentiamo alcuni significativi studi relativi alla revisione statica di portafoglio: quello di Smith [Smith, 1967], quello di Stone e Hill [Stone *et al.*, 1979] e quello di Schreiner [Schreiner, 1980]. Nella sezione **4** presentiamo altri importanti studi sull'argomento: quello di Pogue [Pogue, 1970] e quello di Chen, Jen e Zionts [Chen *et al.*, 1971]. La scelta di raggruppare i modelli di Smith, di Stone e Hill e di Schreiner in una sezione, ed i modelli di Chen, Jen e Zionts e di Pogue in un'altra non è affatto casuale; infatti, come si espliciterà nella sezione **5**, questo raggruppamento rispecchia due diverse "filosofie" cui è possibile ispirarsi per affrontare il problema della revisione. Infine, nella sezione **6** si presentano anche alcune considerazioni ed alcune osservazioni finali.

2 I COSTI DELLA REVISIONE

Il processo di revisione di portafoglio comporta varie tipologie di costi; la precisa determinazione di ognuna di queste è fondamentale al fine di capire se la revisione stessa sia conveniente o meno.

[1] Si vedano, ad esempio, gli studi di [Krizanowski, 1987] sul mercato statunitense.

2.1 I costi di aggiornamento dei dati

Sotto questa denominazione si riconducono tutti quei costi che l'investitore deve sostenere per la raccolta dei dati sui titoli e per l'aggiornamento delle stime dei parametri; in altri termini, sono i costi che si devono sostenere per il reperimento e per l'elaborazione dei dati. Peraltro, questa tipologia di costi spesso non viene esplicitamente considerata nei modelli di revisione poiché si tratta di costi fissi e, pertanto, che non dipendono dalle quote investite. Per questo motivo, il modello di revisione considerato dovrebbe comunque garantire ad ogni sua applicazione un rendimento che, al netto dei costi di aggiornamento dei dati, risultasse almeno uguale al rendimento che si otterrebbe senza revisionare il portafoglio.

2.2 I costi di transazione

I costi di transazione sono relativi alla compravendita vera e propria dei titoli azionari e, a loro volta, si possono suddividere in commissioni ed in costi di illiquidità:

- di norma, le commissioni applicate risultano proporzionali al valore acquistato o venduto. Il loro ammontare può variare da *broker* a *broker*, o da agente di cambio ad agente di cambio, anche se negli ultimi anni si è comunque verificata una loro diminuzione grazie alla possibilità offerta da Internet di gestire personalmente e direttamente gli ordini di acquisto e/o di vendita (la cosiddetta borsa telematica);
- contrariamente a quanto statuito dalle ipotesi sull'efficienza dei mercati dei capitali, in alcuni mercati finanziari i prezzi dei titoli sono anche influenzati dai quantitativi trattati. Esemplificando, se in uno di tali mercati vendiamo una quantità "rilevante" di uno stesso titolo, ciò implicherà una diminuzione dei prezzi. Questa diminuzione rappresenta un costo poiché comporta la vendita di almeno una parte del quantitativo desiderato di azioni ad un prezzo inferiore a quello inizialmente presente nel mercato. Un ragionamento analogo vale anche nel caso di acquisti di quantità "rilevanti" di un medesimo titolo, cosa che implicherà un aumento dei prezzi. Questa tipologia di costi è definita costi di illiquidità.

Come illustreremo nelle sezioni seguenti, più Autori hanno proposto varie formalizzazioni relative ai costi di transazione pervenendo, in generale, a specificarli mediante funzioni non lineari la cui presenza, però, può complicare notevolmente la risoluzione del problema relativo al processo di revisione.

2.3 I costi legati alla tassazione sul *capital gain*

In prima battuta, la tassazione sul *capital gain* non sembrerebbe assimilabile ad un vero e proprio costo di revisione; infatti, prima o poi queste imposte dovranno comunque essere pagate (ovviamente se dovute). Peraltro, ricordando che tali imposte vengono eventualmente riscosse nel momento in cui si realizza il *capital gain* medesimo, poiché il processo di revisione può comportare la vendita di azioni può, dunque, anche comportare il pagamento delle imposte considerate.

Al fine di esemplificare, consideriamo un portafoglio che all'istante t risulti costituito da un numero A_t di azioni del titolo A, e consideriamo le due seguenti possibili strategie di revisione:

- mantenere inalterata la composizione del portafoglio anche per il periodo successivo, cioè fino all'istante $t+1$;
- revisionare in t il portafoglio vendendo tutte le azioni relative al titolo A per acquistare azioni relative al titolo B.

Nel primo dei due casi elencati, il rendimento atteso del portafoglio è dato da:

$$A_t P_{At} \mu_A$$

dove P_{At} indica il valore corrente, cioè all'istante t, di un'azione del titolo A, e μ_A indica il rendimento atteso del titolo A per il periodo successivo.

Nel secondo dei due casi prospettati, il rendimento atteso del portafoglio (trascurando i costi di aggiornamento dei dati e quelli di transazione) è invece dato da:

$$\left[A_t P_{At} - T_c A_t \left(P_{At} - P_{At-1}\right)\right] \mu_B$$

dove T_c indica l'aliquota applicata al *capital gain*, P_{At-1} indica il valore di acquisto (effettuato in $t+1$) di un'azione del titolo A, e μ_B indica il rendimento atteso del titolo B nel periodo successivo.

È agevole verificare come in quest'ultimo caso se $P_A > P_{At-1}$ e, quindi, se $T_c > 0$, si abbia $T_c A_t(P_{At} - P_{At-1}) > 0$, ovvero come in questo secondo caso il valore del portafoglio in t, $A_t P_{At} - T_c A_t(P_{At} - P_{At-1})$, sia inferiore a quello del portafoglio, sempre in t, considerato nel primo caso, $A_t P_A$, ciò a causa della tassazione sul *capital gain*, $T_c A_t(P_{At} - P_{At-1})$.

In questo senso le imposte sul *capital gain* costituiscono un vero e proprio costo di revisione.

3 I MODELLI DI SMITH [Smith, 1967], DI STONE E HILL [Stone *et al.*, 1979] E DI SCHREINER [Schreiner, 1980]

3.1 Il modello di Smith

Uno dei primi lavori che affronta il problema della revisione statica di portafoglio è quello di K.V. Smith [Smith, 1967]. In quel lavoro l'Autore propone un'estensione del metodo di selezione di portafoglio alla Markowitz in modo da renderlo valido su base intertemporale. In particolare, prefissato un determinato scadenzario, Smith suggerisce un metodo uniperiodale da applicare ad ogni scadenza al verificarsi di date condizioni. Il metodo dovrebbe portare ad una efficace revisione del portafoglio tenendo conto dei costi di revisione, fra cui quelli di transazione, e della tassazione sui dividendi e sul *capital gain*.

Semplicemente, ad ogni prefissata scadenza, il metodo prevede inizialmente la determinazione della nuova frontiera efficiente. Però, a questo punto, l'investitore non dovrà scegliere il portafoglio come nel tradizionale modello di Markowitz, e cioè posizionandosi su quel portafoglio della frontiera efficiente che, secondo la sua curva delle preferenze, lo soddisferebbe al meglio; infatti, tale scelta potrebbe portare ad eccessivi livelli di *turn-over* che potrebbero comportare una eccessiva riduzione del rendimento del portafoglio a causa dei costi di transazione (un elevato *turn-over* si potrebbe verificare perché la ricerca del nuovo portafoglio con questa strategia "ingenua" è indipendente dalle quote già detenute nel vecchio portafoglio). Invece, l'investitore dovrà scegliere il nuovo portafoglio come segue. Al fine di esemplificare, consideriamo la Figura 3.1.1 che, nella parte sinistra, rappresenta la frontiera efficiente ed il portafoglio X^o selezionato dall'investitore all'istante iniziale t. Nella successiva prefissata scadenza, e cioè all'istante $t+1$, il vettore delle quote X^o (che, ovviamente, ora rappresenta il vecchio portafoglio) si potrà trovare o sulla frontiera efficiente (Figura 3.1.2, parte sinistra) o all'interno di essa (Figura 3.1.2, parte destra).

Nel primo caso dei due prospettati siamo già in possesso di un portafoglio efficiente e, secondo l'approccio alla Smith, non sarà necessaria alcuna revisione, anche se ora questo vecchio portafoglio potrebbe non rendere più massima l'utilità attesa dell'investitore. Se, invece, X^o si trova a destra della nuova frontiera efficiente, cioè risulta inefficiente, sarà opportuno revisionarlo. Nella parte destra della Figura 3.1.1 indichiamo quattro possibili scelte che l'investitore potrebbe effettuare per spostarsi dal vecchio portafoglio ad uno appartenente alla nuova frontiera efficiente.

Se l'investitore fosse in grado di specificare ad ogni prefissata scadenza la propria nuova utilità attesa, ovviamente la scelta cadrebbe sul portafoglio A, ma poiché secondo Smith tale specificazione in generale non è agevole, scartiamo subito il portafoglio A. Invece, muovendoci da X^o a B abbiamo una riduzione del rischio, mentre il rendimento atteso rimane invariato. Per capire se sia conveniente questo tipo di revisione, i costi di transazione sostenuti per passare da X^o a B andrebbero confrontati con il vantaggio che otteniamo in termini di minor rischio; secondo Smith anche tale confronto non appare agevole, poiché costi e rischio hanno unità di misura diversi; scartiamo dunque anche il portafoglio B. Anche il passaggio da X^o a C presenta analoghi problemi di valutazione e, quindi, anche quest'ultimo portafoglio viene scartato.

Secondo il modello di Smith, il portafoglio rappresentato dalla lettera D è invece l'unico che ci permette di stabilire la convenienza alla revisione. Infatti, sarà sufficiente confrontare il costi di transazione da sopportare per passare da X^o a D con l'aumento del rendimento atteso, ΔE, (entrambi questi valori sono misurati nello stesso numerario). Possiamo quindi concludere che se

$$\Delta E \cdot \text{Capitale investito} - \text{Costi di revisione} > 0,$$

allora la revisione è conveniente.

Figura 3.1.1

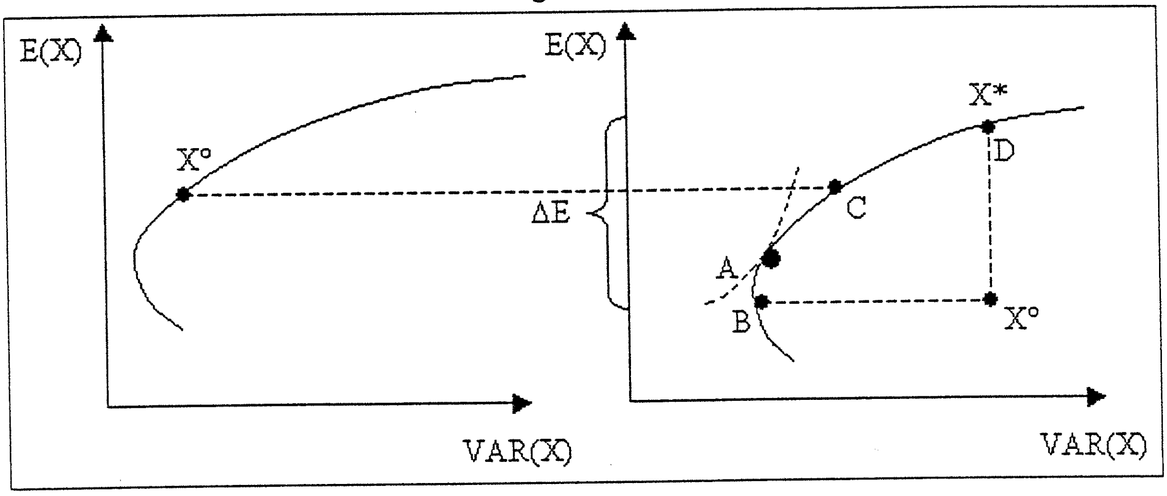
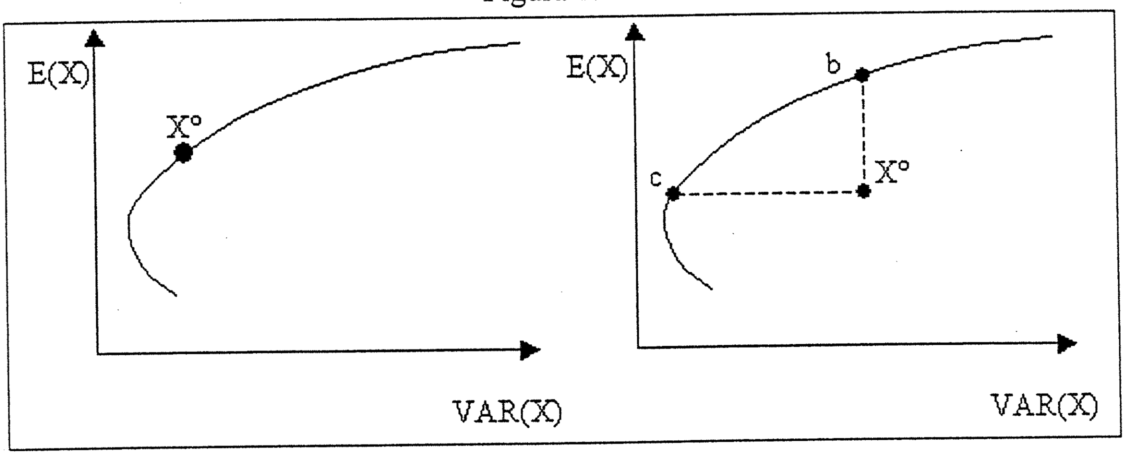


Figura 2.1.2



I costi di revisione

In questo modello i costi di revisione sono costituiti dalle commissioni e dalle imposte sui dividendi e sul *capital gain*.

Vediamo come determinarli partendo da queste ultime. Indicati con Z_j l'ammontare del titolo j-esimo eventualmente disinvestito alla fine del periodo in seguito alla revisione, con s_j la percentuale dell'apprezzamento del titolo j-esimo nel corso del periodo appena trascorso e con $T_g \in [0,1]$ l'aliquota applicata sul *capital gain*, allora il *capital gain* realizzato nel corso del periodo appena trascorso è dato da:

$$Z_j - \frac{Z_j}{s_j + 1} = \frac{Z_j s_j}{s_j + 1};$$

partendo da quest'ultimo possiamo determinare le imposte dovute all'Erario moltiplicando il *capital gain* medesimo per l'aliquota fiscale, cioè:

$$\frac{Z_j s_j}{s_j+1}T_g.$$

Inoltre, possiamo determinare l'importo relativo alla commissioni utilizzando una opportuna funzione di costo C, cioè[2]:

$$C\left[Z_j+\left(Z_j-C\left[Z_j\right]-\frac{Z_j s_j}{s_j+1}T_g\right)\right]$$

in cui, come anticipato, il primo addendo dell'argomento, Z_j, indica l'ammontare del titolo j-esimo eventualmente disinvestito, ed il secondo addendo dell'argomento, quello racchiuso fra le parentesi tonde, indica l'ammontare, al netto delle commissioni e delle imposte sul *capital gain*, destinato al riacquisto di nuovi titoli. Quindi, i costi di revisione associabili ad ogni j-esimo titolo sono dati da:

$$\frac{Z_j s_j}{s_j+1}T_g+C\left[Z_j+\left(Z_j-C\left[Z_j\right]-\frac{Z_j s_j}{s_j+1}T_g\right)\right], \text{ con } j=1, \ldots, n.$$

Pertanto, il costo totale relativo al processo di revisione necessario per spostarsi dal vecchio portafoglio $X°$ a quello nuovo X^*, $CT[X°, X^*]$,è dato da:

$$CT\left[X^{\circ},X^{*}\right]=\sum_{j=1}^{n}\frac{Z_j s_j}{s_j+1}T_g+C\left[Z_j+\left(Z_j-C\left[Z_j\right]-\frac{Z_j s_j}{s_j+1}T_g\right)\right].$$

All'istante t+1 dobbiamo determinare se effettuare, o meno, la revisione; a tal fine, indicati con $P(t)$ il valore del vecchio portafoglio, cioè di quello già detenuto, con $\mu_{X°}$ il rendimento atteso di quest'ultimo per il periodo successivo, con $P(t+1)$ il valore del nuovo portafoglio, quello di quello derivante dall'eventuale processo di revisione, e con μ_{X^*} il rendimento atteso quest'ultimo,

- se $P(t)\mu_{X°} > \{P(t+1) - CT[X°, X^*]\}\mu_{X^*}$, allora non si procede alla revisione;

[2] La funzione utilizzata da Smith per formalizzare le commissioni è la seguente:

$$C\left[Z_j\right]=\begin{cases} a_1+b_1 Z_j & \text{se} \quad Z_j>c_1 \\ a_2+b_2 Z_j & \text{se} \quad c_2<Z_j<c_1 \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n-1}+b_{n-1}Z_j & \text{se} \quad c_{n-1}<Z_j<c_n \\ b_n Z_j & \text{se} \quad Z_j<c_n \end{cases}$$

con $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1}$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ e $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$, per ogni $j = 1, \ldots, n$.

- se $P(t)\mu_{X^o} < \{P(t+1) - CT[X^o, X^*]\}\mu_{X^*}$, allora si procede alla revisione;
- se $P(t)\mu_{X^o} = \{P(t+1) - CT[X^o, X^*]\}\mu_{X^*}$, allora è indifferente se procedere, o meno, alla revisione.

3.2 Il modello di Stone e Hill

Stone e Hill [Stone *et al.*, 1979] affrontano il problema della revisione statica di portafoglio secondo un approccio basato su di un algoritmo tipicamente utilizzato per la risoluzione del ben noto problema dello zaino. Così facendo semplificano il problema da risolvere, ottenendo al contempo risultati interessanti. I due Autori, anziché considerare l'originale problema di selezione alla Markowitz (come fatto da Smith), seguono un approccio semplificato rifacendosi al *Capital Asset Pricing Model* (nel seguito CAPM) proposto da Sharpe [Sharper, 1963], secondo il quale il rischio di ogni titolo si misura mediante il cosiddetto β (si ricorda che il β di un titolo è calcolato come $\beta = \mathrm{Cov}\left(R_m, R_j\right) / \mathrm{Var}\left(R_m\right)$, dove R_m indica il rendimento atteso del portafoglio di mercato e R_j indica il rendimento atteso del titolo j-esimo). Come osservato in [Ross *et al.*, 1997], quando un individuo detiene un portafoglio diversificato, egli considera la varianza (o lo scarto quadratico medio) di tale portafoglio come una misura del rischio di quest'ultimo. Tuttavia, non è più interessato alla varianza del rendimento di ogni singolo titolo ma, piuttosto, è interessato al contributo d ella varianza di ogni singolo titolo a quella del portafoglio. Sotto l'ipotesi di aspettative omogenee, tutti gli individui detengono il portafoglio di mercato e, quindi, misurano il rischio mediante il contributo con il quale ogni singolo titolo contribuisce alla varianza del portafoglio di mercato medesimo. Questo contributo è proprio il β del titolo. Dunque, l'utilizzo del β come misura del rischio del singolo titolo appare appropriata e, come vedremo, consente anche di semplificare i calcoli rispetto al modello di selezione alla Markowitz.

Con l'introduzione del β si può dimostrare che è possibile approssimare l'originario problema di selezione con il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max \sum_{i=1}^{n} CE_i x_i \tag{3.2.1}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ 0 \le x_i \le f_i,\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

dove CE_i indica il rendimento certo equivalente relativo al titolo i-esimo, x_i indica la percentuale di ricchezza investita nel titolo i-esimo, e f_i indica la percentuale massima della ricchezza investibile nel titolo i-esimo; in particolare, in questa modellistica, il certo equivalente è determinata come:

$$CE_i = r_i - \theta\beta_i$$

dove r_i indica il rendimento atteso del titolo i-esimo e θ è un parametro che ha la funzione di penalizzare opportunamente la rischiosità (misurato da β_i) secondo le preferenze dell'investitore.

Lo stesso Stone aveva dimostrato in un suo precedente lavoro [Stone, 1973] come il problema di programmazione lineare (3.1.1) rappresentasse una buona approssimazione del problema di selezione di portafoglio alla Markowitz e, al contempo, come risultasse anche caratterizzato da un minore complessità computazionale.

Al fine di prendere in considerazione i costi di transazione associati al processo di revisione, indichiamo con P_i l'importo del titolo i-esimo eventualmente acquistato alla fine del periodo, con S_i l'importo del titolo i-esimo eventualmente venduto alla fine del periodo, con CP_i il costo di transazione per l'acquisto di un'unità di numerario del titolo i-esimo, con CS_i il costo di transazione per l'acquisto di un'unità di numerario titolo i-esimo e con Q_i l'importo del titolo i-esimo detenuto in portafoglio prima della revisione (ovviamente, il valore del vecchio portafoglio, cioè di quello detenuto, è dato da $V_0 = \sum_{i=1}^{n} Q_i$). Partendo dal problema di selezione di portafoglio (3.2.1), Stone e Hill specificano come segue il problema di revisione (che poi affrontano secondo un approccio basato su di un algoritmo utilizzato per la risoluzione del problema dello zaino):

$$\max \sum_{i=1}^{n} (CE_i - CP_i)P_i - \sum_{i=1}^{n} (CE_i + CS_i)S_i \tag{3.2.2}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P_i(1+CP_i) - S_i(1+CS_i) = 0 & \text{(3.2.2.a)} \\ S_i \le Q_i & \text{(3.2.2.b)} \\ P_i \le F_i V_0 - Q_i & \text{(3.2.2.c)} \\ P_i \ge 0, S_i \ge 0 & \text{(3.2.2.d, e)} \end{cases}$$

Il vincolo (3.2.2.a), quello di bilancio, assicura che l'ammontare monetario totale dei titoli acquistati sia uguale all'ammontare monetario totale dei titoli venduti, importi, ovviamente, al netto dei costi di transazione, il vincolo (3.2.2.b) non consente le vendite allo scoperto, il vincolo (3.2.2.c) assicura che l'importo monetario investito nel titolo i-esimo non ecceda una prefissata percentuale F_i del valore del vecchio portafoglio al netto dell'importo già investito nel medesimo titolo, ed i vincoli (3.2.2.d) e (3.2.2.e) rappresentano gli usuali vincoli di non negatività.

Per quanto riguarda invece la funzione obiettivo, il primo addendo indica la redditività attesa relativa a tutti gli acquisti dovuti alla revisione al netto dei relativi costi di transazione; analogamente il secondo addendo indica la redditività attesa relativa a tutte le vendite dovute alla revisione sempre al netto dei relativi costi di transazione.

Indicando nel seguito questa funzione obiettivo con la scrittura $\sum_{i=1}^{n} PACE_i P_i -$ $-\sum_{i=1}^{n} SACE_i S_i$, dove $PACE_i = CE_i - CP_i$ e $SACE_i = CE_i + CS_i$, e ricordando che essa misura la redditività atteso del portafoglio che si detiene, è agevole verificare che se $PACE_k > SACE_j$, con $k, j \in \{1, \ldots, n\}$, allora il valore di tale funzione obiettivo aumenta se, nel rispetto dei vincoli (3.1.2.a)-(3.1.2.e), si vende l'importo S_j del titolo j-esimo e si acquista il medesimo importo, cioè per $P_k = S_j$, del titolo k-esimo.

Quest'ultima constatazione suggerisce una possibile procedura risolutiva per il problema di revisione considerato in questa sotto-sezione:

<u>Passo 1</u> Si inizializza un contatore l a 0.

<u>Passo 2</u> Si ordinano i titoli candidati all'acquisto (cioè i soli titoli per i quali si verifica che $P_j PACE_j > 0$) in maniera decrescente rispetto a $PACE_k$, con $k \in \{1, \ldots, IMAX - l\}$, dove $IMAX$ indica il numero di titoli che costituiscono il portafoglio da revisionare.

<u>Passo 3</u> Si ordinano gli titoli candidati alla vendita (cioè i titoli per i quali si verifica che $S_j SACE_j < 0$) in maniera decrescente rispetto a a $SACE_i$, con $i \in \{1, \ldots, IMAX - l\}$.

<u>Passo 4</u> Se il numero dei titoli candidati all'acquisto è $K>0$, se il numero dei titoli candidati alla vendita è $I>0$ e se $l \geq \min\{K, I\}$, allora si va al <u>Passo 5</u>, altrimenti si va al <u>Passo 7</u>.

<u>Passo 4</u> Si vende, nel rispetto dei vincoli (3.1.2.a)-(3.1.2.e), l'ultimo dei titoli ordinati in maniera decrescente rispetto a $SACE_j$, con $j \in \{1, \ldots, IMAX - l\}$.

<u>Passo 5</u> Si acquista, nel rispetto dei vincoli (3.1.2.a)-(3.1.2.e), il primo dei titoli ordinati in maniera decrescente rispetto a $PACE_k$, con $k \in \{1, \ldots, IMAX - l\}$.

<u>Passo 6</u> Si aggiorna, nel rispetto dei vincoli (3.1.2.a)-(3.1.2.e), la lista dei titoli candidati all'acquisto estromettendo quello in prima posizione e si aggiorna eventualmente il relativo contatore K a K-1; si aggiorna, nel rispetto dei vincoli (3.1.2.a)-(3.1.2.e), la lista dei titoli candidati alla vendita estromettendo quello in ultima posizione e si aggiorna eventualmente il relativo contatore I a I-1; si aggiorna l a l+1.

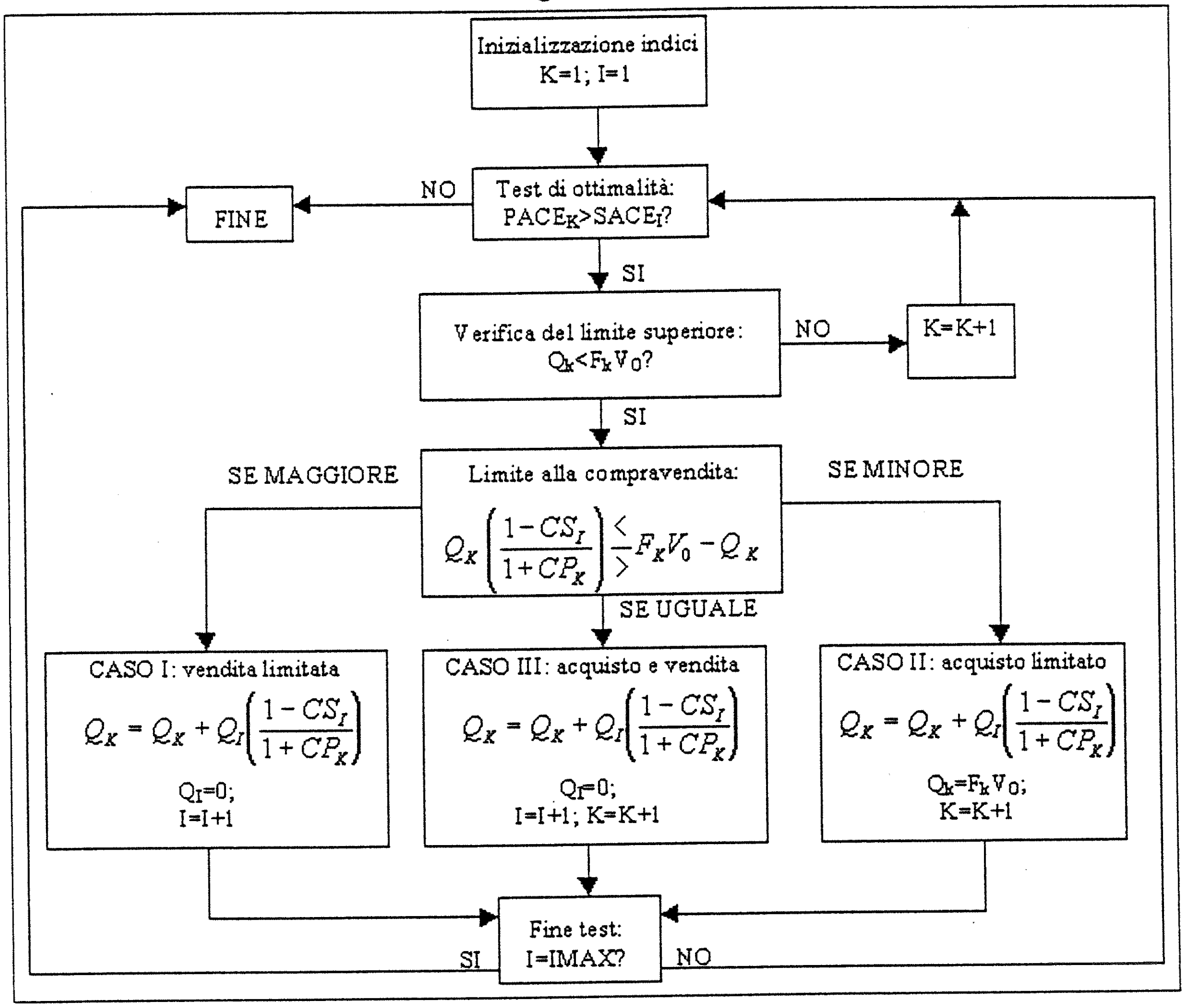
<u>Passo 7</u> Si conclude l'esecuzione della procedura.

Qualitativamente, ad ogni iterazione la procedura presentata acquista il titolo caratterizzato dalla maggiore redditività attesa e, al contempo, vende il titolo caratterizzato dalla minore redditività attesa.

In particolare, l'algoritmo sul quale si basa questa procedura appartiene alla famiglia degli algoritmi utilizzati per la risoluzione del problema dello zaino; infatti, gli Autori equiparano il vecchio portafoglio, quello da revisionare, ad uno zaino già pieno dal quale si debbano opportunamente estrarre ed introdurre titoli azionari al fine di massimizzare la specificata funzione obiettivo, con la complicazione derivante dal fatto che i costi di transazione riducono via via il capitale, ovvero il volume dello zaino, ancora disponibile.

Al fine di dettagliare maggiormente la procedura precedentemente considerata, ne riportiamo la diagrammazione a blocchi riportata in Figura 2.3.1.

Figura 2.3.1



È da porre in evidenza come nell'eventualità in cui $PACE_K > SACE_I$ si possano verificare i tre seguenti possibili casi possibili:

- $Q_I\,(1 - CS_I)/(1 - CP_K) < F_K V_0 - Q_I$, ovvero tutto il quantitativo di azioni del titolo I-esimo detenuto viene venduto al fine di acquistare un quantitativo di azioni del titolo K-esimo (quantitativo comunque minore a quello massimo possibile secondo il vincolo (2.2.2.c));
- $Q_I\,(1 - CS_I)/(1 - CP_K) > F_K V_0 - Q_I$, ovvero solo una opportuna frazione del quantitativo di azioni del titolo I-esimo detenuto viene venduta al fine di acquistare il massimo quantitativo possibile di azioni del titolo K-esimo secondo il vincolo (2.2.2.c);
- $Q_I\,(1 - CS_I)/(1 - CP_K) = F_K V_0 - Q_I$, ovvero tutto il quantitativo di azioni del titolo I-esimo detenuto viene venduto al fine di acquistare il massimo quantitativo possibile di azioni del titolo K-esimo secondo quanto il vincolo.

In conclusione, relativamente a questa procedura di revisione, è da porre in evidenza quanto segue:

- gli Autori non specificano come determinare le quantità F_i, con i=1, ..., n, che compaiono negli n vincoli (2.2.2.c), quantità che giocano ruoli cruciali nell'ambito della procedura considerata;
- in corrispondenza di ogni revisione, il modello proposto non permette di determinare la percentuale di ricchezza da investire in ognuno dei titoli presi in considerazione.

3.3 Il modello di Schreiner

Schreiner premette fin dall'inizio del suo articolo [Schreiner, 1980] che il modello da lui proposto vorrebbe essere una via di mezzo fra i modelli teorici di selezione di portafoglio sviluppati dagli Accademici e quelli utilizzati dai *Portfolio Manager*. Schreiner cerca dunque di venire incontro alle esigenze di chi deve applicare i modelli teorici di selezione di portafoglio, poiché quelli presentati fino a quel momento avevano tutti il limite di essere operativamente inutilizzabili a causa della loro elevata complessità computazionale.

Partendo da questo punto di vista, Schreiner formalizza il processo di revisione di portafoglio come un problema di programmazione matematica nel quale i costi di transazione non vengono considerati esplicitamente ma, piuttosto, vengono presi in considerazione indirettamente mediante l'introduzione nel problema di ottimizzazione associato a quello di revisione di un nuovo vincolo: quello di *turn-over*. In dettaglio, l'originario problema di selezione di portafoglio alla Markowitz viene riformulato come segue[3]:

$$\min \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} \mathbf{x}'\mathbf{r} = p \\ \mathbf{x}'\mathbf{1} = 1 \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - x_i^0\right|}{2} = PTR \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,n \end{cases}$$

dove $\mathbf{x}$ è un vettore colonna di dimensione n relativo alle quote percentuali di ricchezza da investire in ognuno degli n titoli considerati, $\mathbf{V}$ è l'usuale matrice quadrata di ordine n relativa alle varianze e covarianze dei rendimenti dei titoli considerati, $\mathbf{r}$ è un vettore colonna di dimensione n relativo ai rendimenti attesi dei titoli considerati, p indica il rendimento che si desidera che il portafoglio consegua, $\mathbf{1}$ è un vettore colonna di dimen-

[3] Nello stesso articolo Schreiner puntualizza come il vincolo di *turn-over* possa anche essere utilizzato in altri modelli dello stesso ambito disciplinare quali, ad esempio, il CAPM e l'APT.

sione n i cui n elementi sono numeri 1, x_i^0 indica la quota percentuale di ricchezza investita nel titolo i-esimo del vecchio portafoglio, e PTR indica la quota percentuale di ricchezza modificabile nel corso del processo di revisione.

In termini qualitativi, l'introduzione di quest'ultimo vincolo, quello di *turn-over*, esclude la possibilità di specificare come portafogli revisionati tutti quelli che siano caratterizzati da un tasso di *turn-over* (cioè da un PTR) diverso di quello prefissato. È da porre in evidenza come tale vincolo venga anche frequentemente formalizzato come segue:

$$PTR = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \left(x_i - x_i^0\right)}{2}, \text{ dove } c_i = \begin{cases} 1 \text{ se } x_i \geq x_i^0 \\ -1 \text{ se } x_i < x_i^0 \end{cases}.$$

In conclusione, relativamente a questa procedura di revisione, è da porre in evidenza quanto segue:

- la determinazione del valore del tasso di *turn-over* dipende anche dall'eventuale apprezzamento e/o deprezzamento conseguito dai titoli detenuti nel vecchio portafoglio, cioè quello da revisionare;
- alcune ricerche empiriche[4] hanno mostrato come la determinazione del valore del tasso di *turn-over* dipenda anche dalla frequenza con la quale si attua il processo di revisione.

4 I MODELLI DI POGUE [Pogue, 1970] E DI CHEN, JEN E ZIONTS [Chen *et al.*,1971]

4.1 Il modello di Pogue

Come altri Autori, anche Pogue [Pogue, 1970] osserva l'inadeguatezza del modello di Markowitz per quanto riguarda la revisione di portafoglio; ma nell'affrontare tale problema, più che sviluppare uno specifico approccio risolutivo, piuttosto estende l'originario modello di selezione di portafoglio alla Markowitz, nel quale introduce alcuni nuovi vincoli al fine di renderlo operativamente utilizzabile anche nel processo di revisione. In particolare, i nuovi vincoli introdotti sono relativi

- ai costi di transazione,
- alle vendite allo scoperto,
- alla tassazione ed
- all'indebitamento.

[4] Si veda, ad esempio, lo stesso studio di [Schreiner, 1980].

È da porre in evidenza come Pogue, diversamente da quanto usuale, abbia formulato il proprio modello in termini di prezzi e di quantità di azioni, anziché di rendimenti azionari e di quote percentuali di ricchezza, poiché i costi di revisione sono funzione dei primi.

Di particolare interesse in questo modello risultano i costi di transazione, che sono suddivisi da Pogue i costi di transazione in commissioni e costi d'illiquidità. In dettaglio, in relazione ad ogni titolo considerato, suppone che le commissioni siano proporzionali alle relative quantità tradate (ragione per la quale la loro determinazione risulta agevole), mentre suppone che i costi d'illiquidità siano funzione (non lineare) delle medesime quantità. In Figura 4.1.1 diamo una esemplificazione grafica della struttura dei costi di transazione per il generico titolo j-esimo. In particolare, nel proprio modello Pogue approssima tali costi mediante una opportuna funzione lineari a tratti della quale diamo una esemplificazione grafica in Figura 4.1.2.

Figura 4.1.1

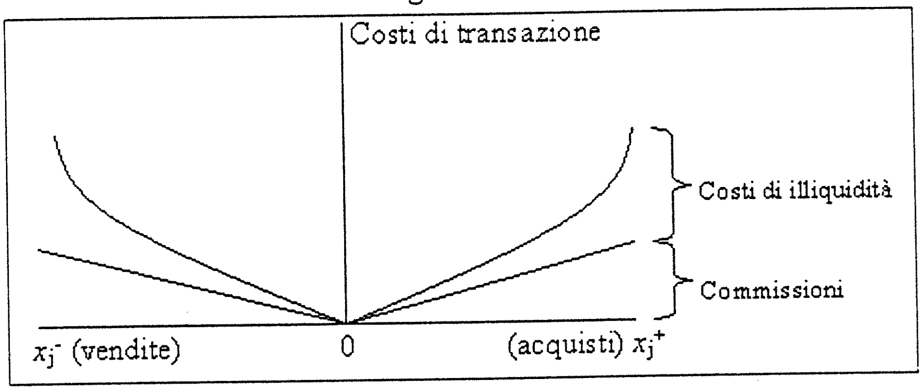
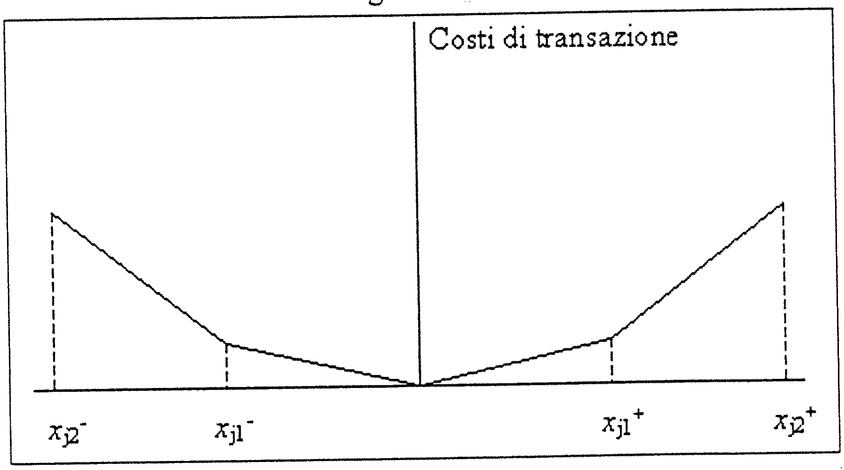


Figura 4.1.2

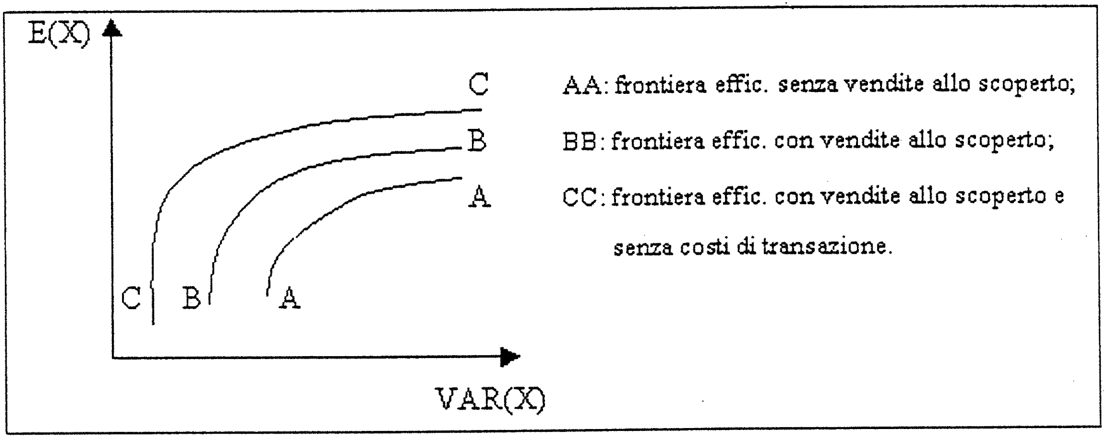


Indicati con $x_j^+ = x_j^0 - x_j$ il numero (non negativo) di azioni del titolo j-esimo da acquistare al fine di revisionare il portafoglio, con r_j^+ l'opportuno costo di transazione per l'acquisto di una di tali azioni, con $x_j^- = x_j - x_j^0$ il numero (non negativo) di azioni del titolo j-esimo da vendere al fine di revisionare il portafoglio e con r_j^- l'opportuno costo di transazione per la vendita di una di tali azioni, allora i costi di transazione da sopportare sono dati da:

$$CT = \sum_{j=1}^{n} r_j^+ x_j^+ + \sum_{j=1}^{n} r_j^- x_j^- .$$

Il problema di programmazione matematica cui perviene Pogue al fine di affrontare la revisione è di tipo Markowitz-*like*. In particolare, i principali vincoli che vi compaiono sono relativi ai costi di transazione, alla tassazione sul *capital gain*, ai debiti garantiti, ai debiti non garantiti, ed ai depositi di garanzia necessari per le vendite allo scoperto. In Figura 4.1.3 diamo una esemplificazione grafica dell'"influenza" esercitata da alcuni di questi vincoli nella determinazione della frontiera efficiente.

Figura 4.1.3



In conclusione, se da un lato questo approccio prende in considerazione tutti gli aspetti che tipicamente caratterizzano il processo di revisione, dall'altro, proprio a causa di questa sua esaustività, risulta non agevolmente trattabile da un punto di vista formale.

4.2 Il modello di Chen, Jen e Zionts

Chen, Jen e Zionts affrontano nello stesso lavoro [Chen *et al.*, 1971] sia il problema della revisione statica del portafoglio (che verrà illustrato in questa sede), sia quello della revisione dinamica (che non verrà considerato in questa sede).

Nel loro modello di revisione statica gli Autori prendono in considerazione i costi di transazione ma non anche la tassazione sull'eventuale *capital gain* (quest'ultimo aspetto viene trascurato a causa della sua complessa formalizzazione). In particolare, indicati con R_0 il rendimento del titolo a rendimento certo, con R_k, con $k = 1, \ldots, n$, il rendimento atteso del k-esimo titolo, con σ_{kl}, con $k, l = 0, \ldots, n$, la covarianza tra il rendimento del titolo k-esimo ed il rendimento del titolo l-esimo (si ricorda che $\sigma_{kk} = \sigma_k^2$ e che $\sigma_0^2 = 0$), con a_k, con $k = 0, \ldots, n$, l'importo monetario investito nel k-esimo titolo del vecchio portafoglio, quello da revisionare, all'inizio del periodo di detenzione, allora si può determinare come segue l'importo monetario β_k, con $k = 0, \ldots, n$, investito k-esimo titolo del vecchio portafoglio, sempre quello da revisionare, ma alla fine del periodo di detenzione:

$$\beta_0 = a_0 + \sum_{k=0}^{n} y_k^c a_k \text{ e } \beta_k = \left(1 + y_k^g\right) a_k,\ k = 1, \ldots, n,$$

dove y_k^c indica la percentuale che specifica l'importo monetario realizzato come dividendi nel corso del periodo considerato e y_k^g indica la percentuale dell'apprezzamento o del deprezzamento del titolo k-esimo nel corso del medesimo periodo.

Partendo da questo punto di vista, gli Autori formalizzano il processo di revisione di portafoglio mediante il seguente problema di programmazione matematica:

$$\max \sum_{k=0}^{n} (1 + R_k)\gamma_k - \lambda \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \gamma_k \gamma_l \sigma_{kl}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \delta_k - \varpi_k = \gamma_k - \beta_k \\ \sum_{k=0}^{n} \gamma_k = \sum_{k=0}^{n} \beta_k - \delta_k B_k + \varpi_k S_k \\ a_k \geq 0,\ \beta_k \geq 0,\ \gamma_k \geq 0,\ \delta_k \geq 0,\ \varpi_k \geq 0,\ k = 1, \ldots, n \end{cases}$$

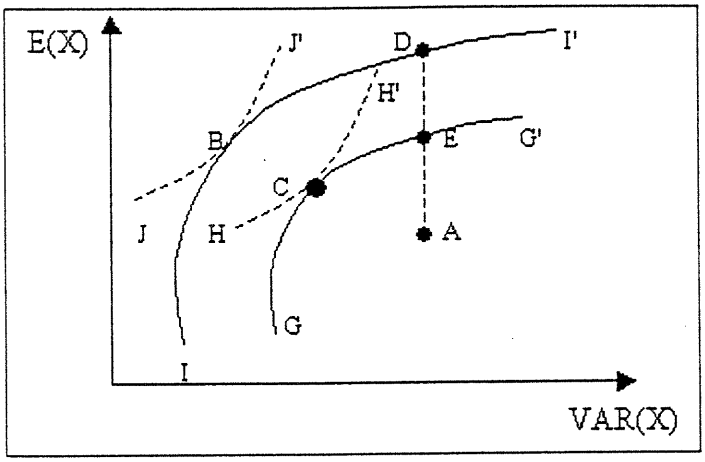
dove γ_k, con $k = 0, \ldots, n$, indica l'importo monetario da investire nel k-esimo titolo del nuovo portafoglio, quello revisionato, δ_k, con $k = 0, \ldots, n$, indica l'incremento che subisce l'importo monetario investito nel k-esimo titolo a causa della revisione, ϖ_k, con $k = 0, \ldots, n$, indica il decremento che subisce l'importo monetario investito nel k-esimo titolo a causa della revisione, B_k, con $k = 0, \ldots, n$ indica il costo da sopportare per l'acquisto di un'unità del titolo k-esimo (poniamo in evidenza che $B_0 = 0$) e S_k, con $k = 0, \ldots, n$, indica il costo da sopportare per la vendita di un'unità del titolo k-esimo (poniamo in evidenza che $S_0 = 0$).

In particolare, è da porre in evidenza

- come i costi di transazione si assumano proporzionali agli importi monetari relativi all'acquisto ed alla vendita dei vari titoli implicati nella revisione, e
- come non siano ammesse le vendite allo scoperto.

In Figura 4.2.1 diamo una esemplificazione grafica delle differenze esistenti tra il criterio di revisione alla Chen, Jen e Zionts e quello alla Smith. Indicati con A il vecchio portafoglio, quello da revisionare, con GG' la nuova frontiera efficiente alla Chen, Jen e Zionts (determinata tenendo conto dei costi di transazione), con II' la nuova frontiera efficiente alla Smith (determinata non tenendo conto dei costi di transazione), con JJ' e HH' opportune curve di livello della funzione di utilità dell'investitore, allora è immediato verificare come quest'ultimo debba individuare in C il nuovo portafoglio, quello revisionato, poiché, per l'appunto, è quell'unico che massimizza la sua utilità e che, al contempo, tiene conto dei costi di transazione.

Figura 4.2.1



5 QUALE MODELLO PER LA REVISIONE?

Nelle sezioni precedenti abbiamo presentato alcuni dei modelli più significativi mediante i quali può essere realizzata la revisione statica di portafoglio. A questo punto dobbiamo affrontare una questione cruciale: qual è, se esiste, il modello di revisione preferibile? La risposta non è semplice poiché non esiste un modello di revisione universalmente riconosciuto e accettato come il "migliore", nemmeno fra quelli che abbiamo presentato (che, ricordiamo, possono essere considerati i più importanti). In ogni caso, un "buon" modello di revisione dovrebbe comunque possedere (almeno) le seguenti caratteristiche:

- ridotta complessità: uno degli elementi su cui deve basarsi la scelta di un modello di revisione è che il modello stesso risulti utilizzabile nella pratica e con i mezzi a disposizione; il modello deve quindi essere "opportunamente" semplice. Una sua eventuale eccessiva complessità lo renderebbe inutilizzabile (anche se potrebbe risultare interessante da un punto di vista teorico);
- realisticità: il modello deve essere "sufficientemente" coerente con la realtà, cioè con i regolamenti del mercato che disciplinano la negoziazione delle attività finanziari; non può dunque tralasciare elementi caratterizzanti il funzionamento del mercato stesso quali, ad esempio, l'impossibilità di vendite allo scoperto, l'esistenza di costi di transazione, la presenza di lotti minimi di contrattazione, ... Infatti, tralasciando questi fattori che incidono sul modello di revisione si potrebbe pervenire a soluzioni che non possono essere utilizzate operativamente; si pensi, ad esempio, ad un modello senza vincoli di non negatività che prospetti come soluzione un portafo-

glio con titoli venduti allo scoperto in un mercato in cui invece siano vietate tali vendite;

- efficacia: il modello di revisione deve necessariamente portare qualche vantaggio in termini di rendimento rispetto alla semplice applicazione iterata dell'originale modello di selezione. Come abbiamo precedentemente illustrato, il modello di revisione comporta dei costi di applicazione; dunque, ci attendiamo dal suo utilizzo un risultato che, oltre a coprire questi costi, produca anche un incremento aggiuntivo dei rendimenti.

Alla luce di quanto da ultimo premesso, andiamo a riconsiderare sinteticamente i vari modelli di revisione presentati per verificare se ed in che grado soddisfino le caratteristiche di: ridotta complessità, realisticità ed efficacia.

5.1 I modelli di Smith, di Stone e Hill e di Schreiner

Questi modelli, a differenza di quelli presentati nella sezione **3**, affrontano la revisione di portafoglio senza introdurre nel relativo problema di ottimizzazione i costi di transazione, ma tenendone comunque conto. Si può quindi affermare che il problema di revisione non viene affrontato direttamente ma, piuttosto, "aggirato"; in generale, ciò permette di formulare modelli non troppo complessi che consentono di giungere abbastanza agevolmente ad una soluzione.

In particolare, Smith dapprima determina la nuova frontiera efficiente risolvendo il tradizionale problema di selezione alla Markowitz e poi verifica la convenienza, o meno, di effettuare la revisione valutando i costi che si dovrebbero eventualmente sostenere. Possiamo quindi concludere che questo modello risulta mediocremente realistico, potenzialmente efficace e semplice da un punto di vista operativo.

Stone e Hill propongono invece una procedura per la revisione di portafoglio che valuta per ogni titolo l'eventuale convenienza a sostituirlo con un altro. Questo approccio può essere considerato uno dei più semplici fra quelli presentati in letteratura, anche se l'algoritmo risolutivo proposto non determina il vettore delle quote da detenere in corrispondenza di ogni titolo prescelto.

Infine, Schreiner introduce nell'originario modello di selezione alla Markowitz un nuovo vincolo relativo al *turn-over* mediante il quale è possibile limitare il volume delle transazioni e, conseguentemente, limitare i costi legati alla revisione. Anche questo modello risulta "sufficientemente" semplice da un punto di vista operativo.

5.2 I modelli di Pogue e di Chen, Jen e Zionts

In questi modelli la revisione viene affrontata generalizzando opportunamente l'originario problema di selezione alla Markowitz. Questo tipo di approccio consente di formulare modelli particolarmente aderenti alla realtà. In particolare, proprio nel modello di Pogue non viene tralasciato alcun elemento significativo che possa influenzare la revisione. Il modello che ne risulta è particolarmente coerente con il mercato reale; tale precisione si ottiene però a scapito della semplicità d'uso. Infatti, Pogue nel suo articolo non fornisce una soluzione in forma chiusa per questo. Possiamo quindi concludere che questo modello risulta estremamente realistico, potenzialmente efficace ma non sufficientemente semplice da un punto di vista operativo.

Chen, Jen e Zionts si ispirano alla stessa "filosofia" risolutiva seguita da Pogue, anche se cercano di ridurre la complessità del modello di revisione tralasciando di considerare molti degli aspetti trattati da Pogue. In questo modo, gli Autori riescono ad ottenere una soluzione del problema nel caso si considerino due soli titoli. Ma, ricordando che anche in questo caso elementare si devono affrontare tre sotto-problemi, è evidente che se consideriamo un numero "ragionevolmente" elevato di titoli questo approccio risolutivo diventa operativamente inutilizzabile.

In buona sostanza, possiamo dunque affermare che i primi tre modelli presentati fanno della "ridotta complessità" il loro punto di forza, mentre i rimanenti modelli risultano prevalentemente interessanti per la loro "realisticità". Ciò, congiuntamente alle critiche che sono state puntualmente mosse ai vari modelli, rende palese il fatto che non esiste un approccio alla revisione che soddisfi sempre-e-comunque tutte le caratteristiche elencate all'inizio di questa sezione. Pertanto, di volta in volta dovremo scegliere quel modello che, pur non soddisfando contemporaneamente e/o completamente tutte tali caratteristiche, ne rappresenti comunque un accettabile compromesso in relazione al processo di revisione da attuare.

6 CONSIDERAZIONI ED OSSERVAZIONI FINALI

In conclusione di questo lavoro presentiamo sinteticamente le considerazioni e le osservazioni che seguono:

- in generale, la trattazione del problema di revisione statica del portafoglio azionario è resa poco agevole a causa dell'esistenza di varie tipologie di costi e della imposizione fiscale sul *capital gain*;
- gli approcci risolutivi relativi ad ognuno dei modelli presentati possono essere fra di loro raggruppati secondo due distinte "filosofie" cui è possibile ispirarsi per affrontare il problema considerato: la prima (alla quale si rifanno il modello di Smith, quello di Stone e Hill ed il modello di Schreiner) tende a privilegiare una determinazione sufficientemente agevole della soluzione del problema mediante l'"imposizione" di una formulazione opportunamente semplificata del problema medesimo; la seconda filosofia (alla quale si rifanno i modelli di Pogue e quello di Chen, Jen e

Zionts) tende a privilegiare una formulazione del problema particolarmente realistica (a potenziale scapito della semplicità di determinazione della soluzione del problema medesimo);

- non esiste un approccio alla revisione che soddisfi sempre-e-comunque tutte le caratteristiche reputate desiderabili per quest'ultima (ridotta complessità, realisticità ed efficacia).

BIBLIOGRAFIA

[1] CHEN A.H.Y., JEN F.C. e ZIONTS S., The Optimal Portfolio Revision Policy, *Journal of Businnes*, 34, 51-61, 1971.

[2] KRYZANOWSKI L. e TO M.C., The E-V Stationarity of Secure Returns, *Journal of Banking and Finance*, 11, 117-135, 1987.

[3] MARKOWITZ H.M., Portfolio Selection, *Journal of finance*, 7, 77-91, 1952.

[4] MARKOWITZ H.M., *Portfolio Selection: the Efficient Diversification of Investments*, J. Wiley & S., 1959.

[5] MOSSIN J., Alternative Procedures for Revising Investment Portfolios, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 3, 371-403, 1968.

[6] PEROLD A.F., Large Scale Portfolio Optimization, *Management Science*, 30, 1143-1160, 1984.

[7] POGUE G.A., An Extension of the Markowitz Portfolio Selection Model to Include Variable Transactions Costs, Short Sales, Leverage Policies, and Taxes, *Journal of Finance*, 25, 1005-1028, 1970.

[8] ROSS S.A., WESTERNFIELD R.W. e JAFFE J., *Finanza Aziendale*, Il Mulino, 1997.

[9] SCHREINER J., Portfolio Revision: A Turn-Over Constrained Approach, *Financial Management*, 9, 67-75, 1980.

[10] SHARPE W.F., A Simplified Model for Portfolio Analysis, *Management Science*, 9, 277-293, 1963.

[11] SMITH K.V., A Transaction Model for Portfolio Revision, *Journal of Finance*, 3, 425-439, 1967.

[12] STONE B.K., A Linear Programming Formulation of the General Portfolio Selection Problem, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 8, 621-636, 1973.

[13] STONE B.K. e HILL N.C., Portfolio Management and the Shrinking Knapsack Algorithm, *Journal ol Financial and Quantitative Analysis*, 14, 1071-1083, 1979.

[14] SZEGÖ G.P., *Portfolio Theory with Application to Bank Asset Management*, Academic Press, 1980.