1993 Volumi trentesimo e trentunesimo

RENDICONTI

del Comitato per gli studi economici

VOL. XXX/XXXI

Cafoscarina

Titolo della rivista e ISSN

RENDICONTI DEL COMITATO PER GLI STUDI ECONOMICI [illegible]

Recapito
Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica
Università di Venezia
Dorsoduro 3825/E
30123 Venezia
Tel 041 5242706–5298266
Fax 041 5221756

Il presente volume è stato composto con TEX

Edizione Libreria Editrice Cafoscarina
Società Cooperativa a r.l.
Ca' Foscari, Dorsoduro, 3246, 30123 Venezia

Stampato in Italia presso Stamperia Cetid s.r.l., via Ca' Rossa, 129, 30174 Mestre.
Novembre 1993

DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI DI UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE PARETO-LÉVY STABILE*

ELIO CANESTRELLI

MARIA CRISTINA CIPRIANI

Dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica, Università degli Studi di Venezia

MARCO CORAZZA**

Dipartimento di Metodi Quantitativi, Università degli Studi di Brescia

ABSTRACT In this paper a procedure to estimate the four parameters of a Pareto-Lévy stable probability distribution is developed. This procedure makes use of techniques already proposed in literature that have been worked out, improved and coordinated to eliminate the restrictions present in the same techniques. In this paper some propositions concerning the estimate method and some asymptotic t-tests to check the estimations goodness are also proposed. Finally it is presented the results of the application of the estimation procedure to some Pareto-Lévy stable simulated time series.

KEYWORDS Pareto-Lévy stable distribution, stock returns, characteristic function, regression-type estimator, asymptotic t-test.

1. INTRODUZIONE

Risultati empirici relativi all'analisi delle serie temporali economico-finanziarie hanno evidenziato un crescente interesse nei confronti delle distribuzioni di probabilità

* Ricerca finanziata dal C.N.R.

** Le proposizioni 3.A.1.1, 3.A.1.3, 3.A.2.1 e 3.A.3.1 ed i corollari 3.A.1.2 e 3.A.2.2 sono dovuti a Marco Corazza.

Pareto-Lévy stabili ([1], [3], [4], [7], [8], [12], [15], [16], [22], [23], [27], [28] e [29]) dovuto alla loro capacità di rappresentare distribuzioni di probabilità leptocurtiche, asimmetriche, con momenti del primo e/o del secondo ordine non esistenti in quanto infiniti.
Questo lavoro si propone di definire una procedura per la stima dei parametri di una funzione di probabilità Pareto-Lévy stabile mediante l'utilizzo coordinato di tecniche (già presenti in letteratura) che sono state autonomamente sviluppate ([10], [13], [17], [18], [22], [24] e [26]) e per ognuna delle quali si è effettuato un previo ed originale affinamento al fine di ridurre gli effetti indesiderati derivanti dai limiti insiti in queste ultime.
In particolare, nel seguito si illustreranno gli aspetti teorici necessari all'impostazione ed allo sviluppo della procedura per la stima dei parametri (sezione 2.), si proporrà in dettaglio la procedura stessa (sezione 3.), si proporranno dei tests asintotici di tipo t per verificare la significatività delle stime dei parametri ottenute mediante l'utilizzo di questa ultima (sezione 4.), si presenteranno i risultati dell'applicazione della procedura di stima a serie temporali Pareto-Lévy stabili simulate (sezione 5.) e si presenteranno delle osservazioni e considerazioni finali (sezione 6.).

2. ASPETTI TEORICI

Gli aspetti teorici necessari all'impostazione ed allo sviluppo della procedura per la stima dei parametri riguardano il concetto di quantile di ordine p di una variabile casuale continua e la conoscenza della funzione caratteristica, ovvero della trasformata di Fourier della funzione di densità, di una variabile casuale Pareto-Lévy stabile, sia nella sua versione teorica canonica che in quella campionaria.

(2.A) Quantile di ordine p: data una variabile casuale continua X, data la sua funzione di ripartizione $F(x)$ e dato un prefissato valore reale $p \in [0, 1]$, si definisce quantile di ordine p un valore x_p, assumibile dalla variabile casuale, in corrispondenza del quale la sua funzione di ripartizione ha valore p. Formalmente, in base alla usuale notazione statistica, si ha:

$$F(x_p) = \Pr(X \leq x_p) = 1 - \Pr(X > x_p) = p, \quad p \in [0, 1]. \tag{2.1}$$

(2.B) Funzione caratteristica di una variabile casuale Pareto-Lévy stabile: data una variabile casuale X avente funzione di distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile (per le usuali definizioni di stabilità nei vari sensi e per ulteriori approfondimenti sull'argomento si rinvia a [12], [14] e [23]), si ha la seguente funzione caratteristica teorica espressa in forma canonica:

$$\Phi(t) = \exp\{i\delta t - |ct|^{\alpha}[1 + i\,\beta\,\mathrm{sgn}(t)\,w(t,\alpha)]\} \tag{2.2}$$

dove

$\alpha \in]0,2]$: esponente caratteristico, fornisce una misura della probabilità totalmente contenuta nelle parti estreme delle code della funzione di distribuzione di probabilità (in particolare se $\alpha = 2$ allora la funzione di distribuzione risulta essere una Normale; è da notare come la varianza della variabile casuale X esista, in quanto finita, solo in corrispondenza di questo ultimo valore di α, mentre la media della stessa esista, in quanto finita, solo in corrispondenza dei valori di $\alpha \in]1,2]$);

$\beta \in [-1,1]$: parametro di asimmetria, fornisce una misura dell'asimmetria della funzione di distribuzione di probabilità (in particolare se $\beta = 0$ la funzione di distribuzione è simmetrica, se $\beta < (>) 0$ la funzione di distribuzione è asimmetrica verso sinistra (destra), cioè ha la coda sinistra (destra) più allungata);

$c \in]0,+\infty[$: parametro di scala, risulta legato alla varianza, quando esiste finita; è da notare come alcuni autori ([15], [16] e [26]) riformulino la funzione caratteristica considerando la seguente trasformazione del parametro di scala: $\gamma = c^{\alpha}$;

$\delta \in]-\infty,+\infty[$: parametro di localizzazione, risulta legato agli indici di posizione, quando esistono finiti, (in particolare se $\alpha \in]1,2]$ la variabile casuale X ha media uguale a δ e se $\beta = 0$ la variabile casuale X ha mediana uguale a δ);

$\omega(t,\alpha) = \begin{cases} \tan(\alpha\pi/2) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ (2/\pi)\log|t| & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$;

$|\cdot|$: indica la funzione valore assoluto;

$\mathrm{sgn}(\cdot)$: indica la funzione segno.

Dato l'insieme finito di variabili casuali $\underline{X} = \{X_j, j = 1,\dots,N\}$ la cui realizzazione $\underline{x} = \{x_j, j = 1,\dots,N\}$ specifica una data serie temporale, si ha la seguente funzione caratteristica campionaria:

$$\Phi_N(t,\underline{X}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\exp\{itX_j\} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}[\cos(tX_j) + i\sin(tX_j)]. \tag{2.3}$$

3. ASPETTI ALGORITMICI

Al fine di stimare i valori dei quattro parametri α, β, c e δ sono state previamente affinate e successivamente coordinate a sistema distinte tecniche (come già ricordato nella sezione 1.); la procedura di stima così approntata si articola, sinteticamente, nelle tre seguenti fasi:

(3.A) nella prima fase si ottengono le stime consistenti[1] $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\beta}_0$, $\hat{c}_0$ e $\hat{\delta}_0$ dei parametri mediante l'utilizzo di cinque predeterminati quantili campionari e di quattro predeterminate tabelle funzioni dei corrispondenti cinque quantili teorici;

(3.B) nella seconda fase, in un primo momento si utilizzano le stime ottenute come descritto nella fase precedente per trasformare la serie temporale analizzata $\underline{x}$ nella seguente serie temporale standardizzata[2]:

$$\underline{x}' = \left\{ x_j' = \frac{x_j - \hat{\delta}_0}{\hat{c}_0}; \quad j = 1, \ldots, N \right\}. \tag{3.1}$$

In un successivo momento, si utilizzano le funzioni caratteristiche teorica e campionaria (relative alle variabili casuali standardizzate) per ottenere due distinte relazioni funzioni di α e di c la prima, di β e di δ la seconda. In un terzo ed ultimo momento, si ottengono le stime $\hat{\alpha}_{0,1}$ e $\hat{c}_{0,1}$ dei parametri mediante una regressione lineare sulla prima relazione e si ottengono le stime $\hat{\beta}_{0,2}$ e $\hat{\delta}_{0,2}$ dei parametri mediante una opportuna iterazione di una regressione lineare sulla seconda relazione.

(3.C) nella terza ed ultima fase si ottengono le stime finali $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{c}$ e $\hat{\delta}$ asintoticamente corrette[3], consistenti ed efficienti[4] dei parametri della funzione di distribuzione di probabilità associata alle variabili casuali non standardizzate, in sostanza mediante l'applicazione iterata di quanto descritto nel punto precedente

---

[1] Uno stimatore $S_N(X)$ del parametro ϑ, dove N indica l'ampiezza del campione, si dice che è consistente se $\lim_{N \to +\infty} P\{|S_N(X) - \vartheta| > \varepsilon\} = 0$.

[2] È possibile verificare che, se la variabile casuale X ha una funzione di distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile di parametri α, β, c e δ allora la variabile casuale standardizzata X' avrà ancora una funzione di distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile ma di parametri α, β, 1 e 0.

[3] Uno stimatore $S_N(X)$ del parametro ϑ si dice che è asintoticamente corretto se $\lim_{N \to +\infty} E\,[S_N(X)] = \vartheta$.

[4] Uno stimatore $S_{1,N}(X)$ del parametro ϑ si dice che è efficiente, relativamente allo stimatore $S_{2,N}(X)$ dello stesso parametro, se $\frac{E\{[S_{2,N}(X)-\vartheta]^2\}}{E\{[S_{1,N}(X)-\vartheta]^2\}} > 1$.

e mediante una opportuna operazione di de-standardizzazione. In particolare, per determinare l'iterazione i^*-esima in corrispondenza della quale si ottengono le stime finali, in un primo momento si definisce la seguente quantità:

$$E_i = (\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_{i-1})^2 + (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{i-1})^2 + (\hat{c}_i - \hat{c}_{i-1})^2 + (\hat{\delta}_i - \hat{\delta}_{i-1})^2 \tag{3.2}$$

dove

E_i: somma dei quadrati delle differenze fra le stime finali dei parametri ottenute, rispettivamente, alla iterazione $(i-1)$-esima ed alla iterazione i-esima;

$\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$, $\hat{c}_i$, $\hat{\delta}_i$: stime finali dei parametri della funzione di distribuzione di probabilità associata alle variabili casuali non standardizzate ottenute alla iterazione i-esima;

ed in un secondo momento si determina l'iterazione i^*-esima come quella che soddisfa il seguente criterio di scelta:

$$C_i = \begin{cases} E_i < \varepsilon & \text{se } i \leq M \\ \min_{1 \leq i \leq M} E_i & \text{se } i = M+1 \end{cases} \tag{3.3}$$

dove

ε: prefissato valore di soglia;

M: prefissato massimo numero di iterazioni[5].

Nel prosieguo della seguente sezione si illustreranno in dettaglio gli aspetti tecnici relativi all'impostazione ed allo sviluppo della procedura di stima.

3.A. *Fase* I

In questa fase in un primo momento si determinano come segue i valori dei cinque quantili campionari $\hat{X}_{0.05}$, $\hat{X}_{0.25}$, $\hat{X}_{0.50}$, $\hat{X}_{0.75}$ e $\hat{X}_{0.95}$ a partire dalla serie temporale analizzata $\underline{x}$:

<u>Passo 1</u>: si ordinano in senso crescente gli elementi della realizzazione $\{x_j, j = 1, \ldots, N\}$, ottenendo la successione $\underline{\tilde{x}}$;

---

[5] La presenza in tale criterio di scelta di un secondo "ramo" così definito dipende dal fatto che, nel primo "ramo", la convergenza della sequenza $\{E_i, i = 1, \ldots\}$ al prefissato valore ε non è assicurata.

Passo 2: si determina il valore del generico quantile campionario $\hat{X}_p$, $p \in [0, 1]$ mediante l'utilizzo del seguente stimatore consistente:

$$\hat{X}_p = \begin{cases} \tilde{x}_1 & \text{se } p = 0 \\ \tilde{x}_{\tilde{N}} & \text{se } p \in]0, 1[\quad \wedge \quad \tilde{N} \in \mathbf{N} \\ \tilde{x}_* & \text{se } p \in]0, 1[\quad \wedge \quad \tilde{N} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N} \\ \tilde{x}_N & \text{se } p = 1 \end{cases} \qquad (3.A.1)$$

dove

$\tilde{N} = N\,p + \frac{1}{2}$;

$\tilde{x}_* = [\tilde{N} - \mathrm{Int}(\tilde{N})][\tilde{x}_{\mathrm{Int}(\tilde{N})+1} - \tilde{x}_{\mathrm{Int}(\tilde{N})}] + \tilde{x}_{\mathrm{Int}(\tilde{N})+1}$, con $\mathrm{Int}(\cdot)$ che indica la funzione parte intera.

In un secondo momento si determinano come segue le stime dei parametri a partire dai cinque quantili campionari (ottenuti precedentemente) e da quattro predeterminate tabelle funzioni dei cinque corrispondenti quantili teorici.

3.A.1. *Stime dei parametri α e β*

Al fine di ottenere le stime dei parametri α e β, si definiscono inizialmente le due seguenti quantità teoriche:

$$\nu_\alpha = \frac{X_{0.95} - X_{0.05}}{X_{0.75} - X_{0.25}} \qquad (3.A.1.1)$$

e

$$\nu_\beta = \frac{X_{0.95} + X_{0.05} - 2X_{0.50}}{X_{0.95} - X_{0.05}}, \qquad (3.A.1.2)$$

ognuna delle quali può essere espressa in funzione dei soli parametri α e β e, dunque, indipendentemente sia dal parametro c che dal parametro δ, relazioni che, dunque, possono essere indicate come segue:

$$\begin{cases} \nu_\alpha = \Phi_1(\alpha; \beta) \\ \nu_\beta = \Phi_2(\alpha; \beta) \end{cases}. \qquad (3.A.1.3)$$

I parametri α e β si ottengono dalla risoluzione del sistema (3.A.1.3) mediante opportune interpolazioni lineari dei valori di ν_α e di ν_β tabulati in [24], soluzione formalmente indicabile come segue:

$$\begin{cases} \alpha = \Psi_1(\nu_\alpha; \nu_\beta) \\ \beta = \Psi_2(\nu_\alpha; \nu_\beta) \end{cases}. \qquad (3.A.1.4)$$

Evidentemente, al fine di ottenere dalla (3.A.1.4.) le stime consistenti $\hat{\alpha}_0$ e $\hat{\beta}_0$, è necessario predeterminare i valori campionari delle quantità (3.A.1.1) e (3.A.1.2) mediante l'utilizzo dei seguenti stimatori consistenti:

$$\hat{\nu}_\alpha = \frac{\hat{X}_{0.95} - \hat{X}_{0.05}}{\hat{X}_{0.75} - \hat{X}_{0.25}} \tag{3.A.1.5}$$

e

$$\hat{\nu}_\beta = \frac{\hat{X}_{0.95} + \hat{X}_{0.05} - 2\hat{X}_{0.50}}{\hat{X}_{0.95} - \hat{X}_{0.05}}. \tag{3.A.1.6}$$

Infine, relativamente alle quantità (3.A.1.1) e (3.A.1.2), si danno le seguenti proposizioni ed il seguente corollario:

Proposizione 3.A.1.1. Sia data una variabile casuale avente distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica. Allora per questa si ha:

$$\nu_\alpha = \frac{\delta - X_{0.05}}{\delta - X_{0.25}} = \frac{\delta - X_{0.05}}{X_{0.75} - \delta} = \frac{X_{0.95} - \delta}{\delta - X_{0.25}} = \frac{X_{0.95} - \delta}{X_{0.75} - \delta}. \tag{3.A.1.7}$$

Dimostrazione. Nell'ipotesi di una variabile casuale avente una generica distribuzione di probabilità simmetrica si ha:

$$X_p = 2X_{0.50} - X_{(1-p)}; \quad p \in [0, 1] \tag{3.A.1.8}$$

dove

$X_{0.50}$: mediana della generica distribuzione di probabilità simmetrica.

In particolare, dalla (3.A.1.8), nell'ipotesi di una variabile casuale avente una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica e, dunque, per la quale si verifica che la mediana $X_{0.50}$ è uguale a δ, si ha che:

$$X_p = 2\delta - X_{(1-p)}, \quad p \in [0, 1]. \tag{3.A.1.9}$$

Dalla (3.A.1.9) è possibile ottenere, fra le altre, le seguenti relazioni:

$$X_{0.05} = 2\delta - X_{0.95}, \tag{3.A.1.10.A}$$

$$X_{0.25} = 2\delta - X_{0.75}, \tag{3.A.1.10.B}$$

$$X_{0.75} = 2\delta - X_{0.25}; \qquad (3.A.1.10.C)$$

$$X_{0.95} = 2\delta - X_{0.05}. \qquad (3.A.1.10.D)$$

Sostituendo, alternativamente, la $(3.A.1.10.A)$ e la $(3.A.1.10.D)$ nel numeratore della $(3.A.1.1)$ è possibile dare di questo ultimo le due seguenti formulazioni alternative:

$$X_{0.95} - X_{0.05} = \begin{cases} 2(\delta - X_{0.05}) \\ 2(X_{0.95} - \delta) \end{cases}. \qquad (3.A.1.11)$$

In maniera analoga, sostituendo, alternativamente, la $(3.A.1.10.B)$ e la $(3.A.\ 1.10.C)$ nel denominatore della $(3.A.1.1)$ è possibile dare di questo ultimo le due seguenti formulazioni alternative:

$$X_{0.75} - X_{0.25} = \begin{cases} 2(\delta - X_{0.25}) \\ 2(X_{0.75} - \delta) \end{cases}. \qquad (3.A.1.12)$$

Ora, costruendo tutti i possibili rapporti fra le due formulazioni alternative del numeratore $(3.A.1.11)$ e le due del denominatore $(3.A.1.12)$, si ottengono le quattro uguaglianze della $(3.A.1.7)$. ■

Corollario 3.A.1.2. Sia data una variabile casuale avente distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica con mediana appartenente all'asse delle ordinate del sistema cartesiano di riferimento. Allora per questa si ha:

$$\nu_\alpha = \frac{X_{0.05}}{X_{0.25}} = -\frac{X_{0.05}}{X_{0.75}} = -\frac{X_{0.95}}{X_{0.25}} = \frac{X_{0.95}}{X_{0.75}}. \qquad (3.A.1.13)$$

Dimostrazione. Nell'ipotesi di una variabile casuale avente una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica con mediana appartenente all'asse delle ordinate del sistema cartesiano di riferimento si ha:

$$\delta = 0. \qquad (3.A.1.14)$$

Ora, sostituendo la $(3.A.1.14)$ nelle quattro uguaglianze della $(3.A.1.7)$, mediante elementari passaggi algebrici si ottengono le quattro uguaglianze della $(3.A.1.13)$. ■

Proposizione 3.A.1.3. Sia data una variabile casuale avente una generica distribuzione di probabilità simmetrica. Allora per questa si ha:

$$\nu_\beta = 0. \qquad (3.A.1.15)$$

Dimostrazione. Dalla (3.A.1.8) si ha:

$$2X_{0.50} = X_p + X_{(1-p)}; \quad p \in [0, 1]. \tag{3.A.1.16}$$

Ora, sostituendo la (3.A.1.16) nella (3.A.1.2), mediante elementari passaggi algebrici si ha:

$$\nu_\beta = \frac{X_{0.95} + X_{0.05} - (X_{0.95} + X_{0.05})}{X_{0.95} - X_{0.05}} = \frac{0}{X_{0.95} - X_{0.05}} = 0. \tag{3.A.1.17}$$

■

3.A.2. *Stima del parametro c*

Al fine di ottenere la stima del parametro c si definisce inizialmente la quantità teorica:

$$\nu_c = \frac{X_{0.75} - X_{0.25}}{c} \tag{3.A.2.1}$$

da cui

$$c = \frac{X_{0.75} - X_{0.25}}{\nu_c}; \tag{3.A.2.2}$$

dove i valori di ν_c sono ottenuti in funzione di opportune interpolazioni lineari dei valori di α e di β tabulati in [24]. Evidentemente, al fine di ottenere dalla (3.A.2.2) la stima consistente $\hat{c}_0$, è necessario predeterminare i valori campionari delle quantità $X_{0.75}$, $X_{0.25}$, α e β mediante i loro corrispondenti stimatori consistenti. È da notare come la stima di ν_c possa risultare distorta in funzione delle distorsioni delle stime di α e di β ed in particolare è da notare come gli specifici percentili utilizzati nella definizione della quantità (3.A.2.1) non garantiscano[6] anche l'efficienza della stima $\hat{c}_0$. A quest'ultimo fine risulta più opportuna la definizione della seguente generica quantità teorica:

$$\nu_c^* = \frac{X_f - X_{(1-f)}}{c} \tag{3.A.2.3}$$

dove
$f = f(\alpha, \beta) \in [0, 1]$.

[6] Ciò potrebbe riflettersi negativamente sui valori della stima finale di c e di δ ottenute nella terza fase che, come si illustrerà nel seguito, sono anche funzione del valore assunto dalla stima di c in questa prima fase.

Tale quantità sarà oggetto di studio in un prossimo lavoro.
Infine, relativamente alla quantità (3.A.2.2), si danno la seguente proposizione ed il seguente corollario:

Proposizione 3.A.2.1. Sia data una variabile casuale avente distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica. Allora per questa si ha:

$$c = \frac{2(\delta - X_{0.25})}{\nu_c} = \frac{2(X_{0.75} - \delta)}{\nu_c}. \tag{3.A.2.4}$$

Dimostrazione. Dalla (3.A.1.9) è possibile ottenere, fra le altre, le relazioni (3.A.1.10.B) e (3.A.1.10.C) che, sostituite, alternativamente, nel numeratore della (3.A.2.2), danno di questo ultimo le due seguenti formulazioni alternative:

$$X_{0.75} - X_{0.25} = \begin{cases} 2(\delta - X_{0.25}) \\ 2(X_{0.75} - \delta) \end{cases}. \tag{3.A.2.5}$$

Ora, costruendo tutti i possibili rapporti fra le due formulazioni alternative del numeratore (3.A.2.5) ed il denominatore della (3.A.2.2), si ottengono le due uguaglianze della (3.A.2.4). ∎

Corollario 3.A.1.2. Sia data una variabile casuale avente distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica con mediana appartenente all'asse delle ascisse del sistema cartesiano di riferimento. Allora per questa si ha:

$$c = -\frac{2X_{0.25}}{\nu_c} = \frac{2X_{0.75}}{\nu_c}. \tag{3.A.2.7}$$

Dimostrazione. Nell'ipotesi di una variabile casuale avente una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica con mediana appartenente all'asse delle ascisse del sistema cartesiano di riferimento vale la (3.A.1.14).

Ora, sostituendo la (3.A.1.14) nelle due uguaglianze della (3.A.2.4), mediante elementari passaggi algebrici si ottengono le due uguaglianze della (3.A.2.7). ∎

3.A.3. *Stima del parametro δ*

Al fine di ottenere la stima del parametro δ si definisce inizialmente la quantità teorica

$$\nu_\delta = \frac{\xi - X_{0.50}}{c} \tag{3.A.3.1}$$

dove i valori di ν_δ sono tabulati in [24] in funzione di α e di β e dove

$$\xi = \begin{cases} \delta + \beta\, c \tan(\pi\alpha/2) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \delta & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} ; \tag{3.A.3.2}$$

da cui, sostituendo la (3.A.3.2) nella (3.A.3.1), mediante elementari passaggi algebrici si ha:

$$\delta = \begin{cases} c\,[\nu_\delta - \beta \tan(\pi\alpha/2)] + X_{0.50} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ c\,\nu_\delta + X_{0.50} & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} . \tag{3.A.3.3}$$

Evidentemente è ancora necessario predeterminare i valori campionari delle quantità α, β, c e $X_{0.50}$ mediante i loro stimatori consistenti, al fine di ottenere dalla (3.A.3.3) la stima consistente $\hat{\delta}_0$.
Un tale approccio alla stima del parametro δ è reso necessario dalla "sensibilità" di quest'ultimo alla discontinuità ammessa dalla funzione caratteristica (2.2) in corrispondenza del valore di α uguale a 1. In particolare è da notare come lo stimatore proposto per δ possa risultare distorto sia in funzione della distorsione della stima di ν_δ (a sua volta funzione delle distorsioni di α e di β) sia in funzione delle distorsioni di α, β e c che compaiono nella definizione funzionale (3.A.3.3)[7]. In particolare date N variabili casuali X_i, $i = 1, \cdots, N$, indipendenti e identicamente distribuite secondo la stessa funzione di distribuzione Pareto-Lévy stabile di parametri α, β, c e δ è possibile dimostrare che la seguente variabile casuale

$$X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{3.A.3.4}$$

si distribuisce ancora secondo una funzione di distribuzione Pareto-Lévy stabile i cui soli parametri α e β sono uguali a quelli delle identiche funzioni di distribuzione associate alle variabili casuali X_i, $i = 1, \cdots, N$. È ancora possibile dimostrare che, se $\alpha \neq 1$, il parametro δ delle identiche funzioni di distribuzione associate alle variabili casuali X_i, $i = 1, \cdots, N$, coincide con il valore di quel quantile delle stesse variabili che risulta invariante sotto la trasformazione (3.A.3.4). Il

[7] Ciò potrebbe riflettersi negativamente sui valori della stima finale di δ, quella ottenuta nella terza fase, che, come si illustrerà meglio nel seguito, è anche funzione del valore assunto dalla stima di δ in questa prima fase.

suindicato approccio alternativo alla stima di δ si fonda su quanto da ultimo premesso.
Infine, relativamente alla quantità (3.A.3.3), si dà la seguente proposizione:

Proposizione 3.A.3.1. Sia data una variabile casuale avente distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica. Allora per questa si ha:

$$\nu_\delta = 0. \tag{3.A.3.5}$$

Dimostrazione. Nell'ipotesi di una variabile casuale avente una distribuzione di probabilità Pareto-Lévy stabile simmetrica si ha:

$$\beta = 0; \tag{3.A.3.6}$$

$$X_{0.50} = \delta. \tag{3.A.3.7}$$

Sostituendo la (3.A.3.6) e la (3.A.3.7) nella (3.A.3.3) si ha:

$$\delta = \begin{cases} c\,[\nu_\delta - 0\,\tan(\pi\alpha/2)] + \delta & \text{se } \alpha \neq 1 \\ c\,\nu_\delta + \delta & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}; \tag{3.A.3.8}$$

da cui, mediante elementari passaggi algebrici, si ha:

$$0 = \begin{cases} c\,\nu_\delta & \text{se } \alpha \neq 1 \\ c\,\nu_\delta & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}. \tag{3.A.3.9}$$

Ora, poiché il parametro di scala $c \in]0, +\infty[$, la uguaglianza (3.A.3.9) si ottiene quando $\nu_\delta = 0$. ■

3.B. *Fase* II

In questa fase in un primo momento, utilizzando le stime ottenute nella fase precedente, si determina la realizzazione standardizzata (3.1).
In un secondo momento, utilizzando le funzioni caratteristiche teorica e campionaria si determinano due distinte relazioni, funzione dell'esponente caratteristico e del parametro di scala la prima e del parametro di asimmetria e del parametro di localizzazione la seconda. Al fine di determinare queste due relazioni si riformula

come segue la generica funzione caratteristica teorica associata alle variabili casuali standardizzate:

$$\Phi(t) = \exp(-|ct|^{\alpha})\{\cos[f(\alpha;\beta;c;\delta)] + i\,\sin[f(\alpha;\beta;c;\delta)]\} \tag{3.B.1}$$

dove[8]
$f(\alpha;\beta;c;\delta) = \delta t - |ct|^{\alpha}\beta\,\mathrm{sgn}(t)\,\omega(t;\alpha)$.
Relativamente alla determinazione della prima relazione, dalla (3.B.1), mediante elementari passaggi, si ottiene la seguente trasformazione del suo modulo

$$\log(-\log(|\Phi(t)|^2)) = \log(2\,c^{\alpha}) + \alpha\log(|t|); \tag{3.B.2}$$

che è funzione dei soli parametri α e c.
Ora, utilizzando la funzione caratteristica campionaria (2.3), dalla (3.B.2) si ottiene la seguente relazione, lineare in α, su cui effettuare la regressione:

$$y'_k = \mu + \alpha w_k + \varepsilon_k; \quad k = 1;\ldots;K \tag{3.B.3}$$

dove
$y'_k = \log(-\log(|\Phi_N(t_k;\underline{x}'_K)|^2))$, con t_k quantità reale opportunamente definita in [17] come $\pi k/25$ e con $\underline{x}'_K = \{x'_j; j = 1;\ldots;K \leq N\}$;
$\mu = \log(2\,c^{\alpha})$;
$w_k = \log|t_k| = \log|\pi k/25|$;
ε_k: variabili casuali che rappresentano il termine di errore, per le quali è possibile verificare ([18] e [19]) che si distribuiscono indipendentemente ed identicamente con media uguale a 0;
K: valore intero determinato mediante una opportuna interpolazione lineare dei valori tabulati in [17] in funzione della stima di α ottenuta nella fase precedente e dell'ampiezza N della realizzazione.

[8] Relativamente ai parametri della generica funzione caratteristica teorica, al fine di evitare inutili appesantimenti formali, si è utilizzata la stessa notazione utilizzata per i parametri relativi alla funzione di distribuzione di probabilità associata alle variabili casuali non standardizzate.

Relativamente alla determinazione della seconda relazione, nel caso in cui α sia diverso[9] da 1, dalla (3.B.1), mediante elementari passaggi, si ottiene la seguente trasformazione delle sue parti reale ed immaginaria:

$$\arctan^*\left(\frac{\Im(\Phi(t))}{\Re(\Phi(t))}\right) = -\beta\,|ct|^\alpha\,\mathrm{sgn}(t)\,\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)+\delta t \qquad (3.B.4)$$

dove

$\arctan^*(\cdot)$: quantità reale opportunamente definita in [17] in funzione di $\arctan(\cdot)$;

$\Im(\cdot)$: indica la parte immaginaria di un numero complesso;

$\Re(\cdot)$: indica la parte reale di un numero complesso.

Ora, utilizzando la funzione caratteristica campionaria (2.3) e ricordando che il valore teorico di c è uguale a 1 (questo per la standardizzazione della realizzazione $\underline{x}$), dalla (3.B.4) si ottiene la seguente relazione, lineare in δ ed in β, su cui effettuare la regressione:

$$z_l' = -\beta\,|u_l|^\alpha \mathrm{sgn}(u_l)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \delta u_l + \eta_l; \quad l = 1, \cdots, L \qquad (3.B.5)$$

dove

$z_l' = \arctan(\Im(\Phi_N(u_l;\underline{x}_L'))/\Re(\Phi_N(u_l;\underline{x}_L'))) - \pi\,k_N(u_l;\underline{x}_L')$, con u_l quantità reale opportunamente definita in [17] come $\pi\,l/50$, con $\underline{x}_L' = \{x_j';\, i = 1, \ldots, L \leq N\}$ e con $k_N(u_l;\underline{x}_L')$ quantità intera opportunamente definita la quale rende possibile che z_l' sia uguale ad $\arctan^*(\Im(\Phi_N(u_l;\underline{x}_L'))/\Re(\Phi_N(u_l;\underline{x}_L')))$;

η_l: variabili casuali che rappresentano il termine di errore, per le quali è possibile verificare ([18] e [19]) che si distribuiscono indipendentemente ed identicamente con media uguale a 0;

L: valore intero determinato mediante una opportuna interpolazione lineare dei valori tabulati in [17] in funzione della stima di α ottenuta nella fase precedente e dell'ampiezza N della realizzazione.

In un terzo momento, mediante una prima regressione lineare sulla (3.B.3) e una seconda regressione lineare sulla (3.B.5), si ottengono, rispettivamente, le stime

[9] È da notare come una tale limitazione sui valori assumibili da α non sia anche presente nella determinazione della prima relazione. In particolare è possibile verificare che se l'esponente caratteristico è uguale a 1 il parametro di asimmetria è uguale a 0. Relativamente alla determinazione delle stime dei parametri c e δ di una tale funzione di distribuzione Pareto-Lévy stabile (nella fattispecie detta funzione di distribuzione di Cauchy) in [20] è stata opportunamente sviluppata e definita una procedura di stima.

$\hat{\alpha}_{0,1}$ e $\hat{c}_{0,1}$ e le stime $\hat{\beta}_{0,2}$ e $\hat{\delta}_{0,2}$ dei parametri. Relativamente alla regressione lineare sulla (3.B.3), in un primo momento si ottengono le stime $\hat{\alpha}_{0,1}$ e $\hat{\mu}$. In un secondo momento, ricordando la posizione $\mu = \log(2\, c^{\alpha})$, si determina la stima $\hat{c}_{0,1}$ in funzione della stima di α secondo la seguente relazione:

$$\hat{c}_{0,1} = \hat{c}_{0,1}(\hat{\mu}; \hat{\alpha}_{0,1}) = \left[\frac{\exp(\hat{\mu})}{2}\right]^{(1/\hat{\alpha}_{0,1})}. \qquad (3.B.6)$$

È da notare come la stima $\hat{c}_{0,1}$ possa risultare distorta in funzione della distorsione della stima di α.

Relativamente alla regressione lineare sulla (3.B.5), si ottengono come segue le stime $\hat{\beta}_{0,2}$ e $\hat{\delta}_{0,2}$:

Passo 1: si utilizza la stima $\hat{c}_{0,1}$, ottenuta come descritto dalla (3.B.3), per definire la seguente trasformazione della realizzazione standardizzata (3.1):

$$\underline{x}''_s = \left\{ x''_{j,s} = \frac{x'_j}{\hat{c}_{0,1}} - \lambda_{0,s} = \frac{x_j - \hat{\delta}_0}{\hat{c}_0\, \hat{c}_{0,1}} - \lambda_{0,s};\quad j = 1, \ldots, N \right\} \qquad (3.B.7)$$

dove

$\lambda_{0,s}$: quantità reale opportunamente definita la quale rende possibile, in maniera computazionalmente più facile rispetto all'utilizzo di $k_N(u_l; \underline{x}'_L)$, che $z''_{l,s}$ sia uguale ad $\arctan^*(\Im(\Phi_N(u_l; \underline{x}'_L))/\Re(\Phi_N(u_l; \underline{x}'_L)))$, con $z''_{l,s} = \arctan(\Im(\Phi_N(u_l; \underline{x}''_{L,s}))/\Re(\Phi_N(u_l; \underline{x}''_{L,s})))$ e con $\underline{x}''_{L,s} = \{x''_{j,s}; j = 1, \ldots, L \leq N\}$;

Passo 2: si utilizza la stima $\hat{\alpha}_{0,1}$, ottenuta come descritto dalla (3.B.3), e si utilizza la quantità $z''_{l,s}$ per definire la seguente riformulazione della (3.B.5) su cui effettuare la regressione:

$$z''_{l,s} = -\beta\left[|u_l|^{\hat{\alpha}_{0,1}} sgn(u_l)\tan\left(\frac{\pi\hat{\alpha}_{0,1}}{2}\right)\right] + \delta u_l + \eta_l;\quad l = 1, \cdots, L; \qquad (3.B.8)$$

Passo 3: si inizializza l'indice s a 0;

Passo 4: si inizializza la quantità reale $\lambda_{0,s}$ a 0;

Passo 5: si determina la trasformazione (3.B.7) della realizzazione standardizzata (3.1);

Passo 6: si determinano le quantità $z''_{l,s}$, $l = 1, \ldots, L$ e si determinano le quantità $\arctan^*(\Im(\Phi_N(u_l; \underline{x}'_L))/\Re(\Phi_N(u_l; \underline{x}'_L)))$, $l = 1, \ldots, L$;

Passo 7: se si verifica che $z''_{l,s} \neq \arctan^*(\Im(\Phi_N(u_l; \underline{x}'_L))/\Re(\Phi_n(u_l; \underline{x}'_L)))$ per qualche $l = 1, \ldots, L$ si va al Passo 8, altrimenti si va al Passo 11;

Passo 8: si incrementa il valore dell'indice s di una unità;

Passo 9: si aggiorna opportunamente il valore della quantità reale $\lambda_{s,0}$;

Passo 10: si torna al Passo 5;

Passo 11: si ottengono le stime $\hat{\beta}_{0,2}$ e $\hat{\delta}_{0,2}$ mediante una regressione lineare sulla (3.B.8).

È da notare come le stime $\hat{\beta}_{0,2}$ e $\hat{\delta}_{0,2}$ siano funzione della stima di α, per cui possano risultare distorte in funzione della distorsione di quest'ultima.

3.C. *Fase* III

In questa fase si ottengono le stime finali dei parametri in sostanza mediante l'applicazione iterata di quanto descritto nella fase precedente. In particolare in un primo momento della generica i-esima iterazione, si determinano due distinte relazioni, funzione dell'esponente caratteristico e del parametro di scala la prima e del parametro di asimmetria e del parametro di localizzazione la seconda, analogamente a quanto fatto nel secondo momento della fase precedente. In un secondo momento della generica i-esima iterazione, si ottengono le stime $\hat{\alpha}_{i,1}$ e $\hat{c}_{i,1}$ mediante l'effettuazione di una regressione lineare sulla prima relazione e si ottengono le stime $\hat{\beta}_{i,2}$ e $\hat{\delta}_{i,2}$ in funzione di una quantità reale $\lambda_{i,s}$ opportunamente definita mediante l'effettuazione di una regressione lineare sulla seconda relazione, analogamente a quanto fatto nel terzo momento della fase precedente. In un terzo momento della generica i-iterazione, si ottengono le stime $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$, $\hat{c}_i$ e $\hat{\delta}_i$ asintoticamente corrette, consistenti ed efficienti dei parametri della funzione di distribuzione di probabilità associata alle variabili casuali non standardizzate mediante la seguente operazione di de-standardizzazione:

$$\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_{i,1}; \tag{3.C.A}$$

$$\hat{\beta}_i = \hat{\beta}_{i,2}; \tag{3.C.B}$$

$$\hat{c}_i = \hat{c}_0 \prod_{h=0}^{i} \hat{c}_{h,1}; \tag{3.C.C}$$

$$\hat{\delta}_i = \hat{\delta}_0 + \hat{c}_0 \sum_{h=0}^{i} \lambda_{s,h} \prod_{r=0}^{h} \hat{c}_{r,1} + \hat{c}_i\, \hat{\delta}_{i,2}. \tag{3.C.D}$$

È da notare come le stime $\hat{c}_i$ e $\hat{\delta}_i$ siano funzione, rispettivamente, delle stime di c e delle stime di c e di δ ottenute nelle fasi precedenti e nelle iterazioni di questa ultima, per cui possano risultare distorte in funzione delle distorsioni di queste ultime. In un quarto ed ultimo momento, mediante l'utilizzo del criterio di scelta (3.3), si determina l'iterazione i^*-esima in corrispondenza della quale si ottengono le stime finali $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_{i^*}$, $\hat{\beta} = \hat{\beta}_{i^*}$, $\hat{c} = \hat{c}_{i^*}$ e $\hat{\delta} = \hat{\delta}_{i^*}$.

4. SIGNIFICATIVITÀ DELLE STIME DEI PARAMETRI

Al fine di verificare la significatività delle stime dei parametri ottenute nella sezione precedente, in questa si propongono dei tests asintotici di tipo t. Gli aspetti teorici necessari per la definizione di questi tests riguardano la individuazione delle funzioni di distribuzione di probabilità associate ai vari stimatori descritti nella sezione 3.. In particolare in [19] è stata verificata l'evidenza empirica secondo la quale gli stimatori $\hat{\alpha}_{i,1}$ e $\hat{c}_{i,1}$ si distribuiscono asintoticamente come una variabile casuale Normale e secondo la quale, se la funzione di distribuzione di probabilità è simmetrica (cioè se $\beta = 0$), anche lo stimatore $\hat{\delta}_{i,2}$ si distribuisce asintoticamente come una variabile casuale Normale. Formalmente, in base alla usuale notazione statistica, si ha:

$$\sqrt{2N}\left[\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_{i,1}\\ \hat{c}_{i,1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha\\ c\end{pmatrix}\right] \xrightarrow{d} N(\underline{0}; S_{\hat{\alpha}_{i,1},\hat{c}_{i,1}}) \qquad (4.1)$$

dove

$\underline{0}$: vettore (2×1) i cui elementi sono numeri 0;

$S_{\hat{\alpha}_{i,1},\hat{c}_{i,1}}$: matrice (2×2) delle varianze e delle covarianze campionarie asintotiche opportunamente definita in [19];

e si ha:

$$\sqrt{2N}(\hat{\delta}_{i,2} - \delta) \xrightarrow{d} N(0; \sigma^2_{\hat{\delta}_{i,2}}) \quad \text{se} \quad \beta = 0 \qquad (4.2)$$

dove[10]

$\sigma^2_{\hat{\delta}_{i,2}}$: varianza campionaria asintotica opportunamente definita in [19].

[10] La presenza, o meno, di simmetria nella indagata funzione di distribuzione di probabilità è determinata in funzione del valore assunto dalla stima puntuale $\hat{\beta}_{i,2}$.

In base a quanto da ultimo premesso è, dunque, possibile definire i seguenti tests asintotici di tipo t associati, rispettivamente agli stimatori $\hat{\alpha}_{i,1}$, $\hat{c}_{i,1}$ e, se $\hat{\beta}_{i,1} = 0$, $\hat{\delta}_{i,2}$:

$$t_{c,+\infty}(\hat{\alpha}_{i,1}) = \sqrt{\frac{N-2}{S(1,1)_{\hat{\alpha}_{i,1},\hat{c}_{i,1}}}}(\hat{\alpha}_{i,1} - \alpha), \tag{4.3}$$

$$t_{c,+\infty}(\hat{c}_{i,1}) = \sqrt{\frac{N-2}{S(2,2)_{\hat{\alpha}_{i,1},\hat{c}_{i,1}}}}(\hat{c}_{i,1} - c), \tag{4.4}$$

$$t_{c,+\infty}(\hat{\delta}_{i,2}) = \sqrt{\frac{N-1}{\sigma^2_{\hat{\delta}_{i,2}}}}(\hat{\delta}_{i,2} - \delta) \quad \text{se} \quad \hat{\beta}_{i,2} = 0 \tag{4.5}$$

dove

$t_{c,+\infty}(\cdot)$: valore campionario assunto dal test asintotico di tipo t da confrontare con il valore teorico assunto dal test di tipo t in corrispondenza di un prefissato valore del livello di significatività.

È da notare come la (4.3), in corrispondenza della i^*-esima iterazione, fornisca un test asintotico di tipo t per la stessa stima finale dell'esponente caratteristico relativo alla distribuzione di probabilità associata alle variabili casuali non standardizzate poiché $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_{i^*} = \hat{\alpha}_{i^*,1}$.

Tali tests saranno oggetto di studio in un prossimo lavoro.

5. ASPETTI APPLICATIVI E RISULTATI

In questa sezione si presentano gli aspetti applicativi ed i risultati dell'applicazione della procedura di stima proposta nella sezione 3. a serie temporali Pareto-Lévy stabili standardizzate simulate. In un primo momento si è puntualizzato il criterio di scelta (3.3) fissando i valori delle quantità ε e M rispettivamente a $1E-8$ ed a 20. In un secondo momento si sono generate, mediante l'utilizzo di procedure proposte in [6] ed in [25], delle serie temporali Pareto-Lévy stabili standardizzate $\underline{x}_m$, $m = 1, \dots, 13$ di ampiezza $N = 5000$, una in corrispondenza di ognuna delle coppie (α, β) di valori dei parametri appartenenti all'insieme $\{(0.5, 0.999, 1.001, 1.5) \times (-0.5, 0, +0.5)\} \cup \{(2, 0)\}$. È da notare come, per il parametro α, la scelta dei valori 0.999 e 1.001 sia stata effettuata per poter osservare il comportamento della procedura di stima nelle "vicinanze" del valore di α in corrispondenza del quale la funzione caratteristica teorica (2.2) ammette una discontinuità. In un terzo ed ultimo momento si è applicata la procedura di stima ad ognuna delle seguenti sotto-serie temporali estratte da ogni serie temporale $\underline{x}_m$:

$$\underline{x}_{m,p} = \{x_{m,q};\quad q = 1, \ldots, N_p\} \tag{5.1}$$

dove

$$N_p = \begin{cases} 1000 & \text{se } p = 1 \\ 2500 & \text{se } p = 2, \\ 5000 & \text{se } p = 3 \end{cases}$$

ciò al fine di osservare il comportamento della procedura di stima all'aumentare dell'ampiezza campionaria.

I risultati dell'applicazione della procedura di stima alle serie temporali $\underline{x}_{m,p}$ sono riportati nella seguente tabella.

Tab. 5.1

N_p	$\hat{\alpha}$	$R^2_{\hat{\alpha}}$	$\overline{R}^2_{\hat{\alpha}}$	$\hat{\beta}$	$R^2_{\hat{\beta}}$	$\overline{R}^2_{\hat{\beta}}$	$\hat{c}$	$\hat{\delta}$	i^*	$\lambda_{i^*,s}$
–	**0.500**	–	–	**-0.500**	–	–	**1.000**	**0.000**	–	–
1000	0.512	0.981	0.980	-0.530	0.981	0.980	1.079	0.538	8	-0.500
2500	0.540	0.996	0.996	-0.473	0.995	0.995	1.014	0.533	3	-0.400
5000	0.518	0.996	0.996	-0.571	0.997	0.997	0.977	0.594	6	-0.450
–	**0.500**	–	–	**0.000**	–	–	**1.000**	**0.000**	–	–
1000	0.439	0.950	0.950	0.164	0.688	0.681	1.084	-0.094	13	-0.050
2500	0.454	0.983	0.983	0.002	0.912	0.910	1.008	-0.008	10	-0.050
5000	0.467	0.991	0.991	0.013	0.987	0.987	1.019	-0.009	12	-0.100
–	**0.500**	–	–	**0.500**	–	–	**1.000**	**0.000**	–	–
1000	0.457	0.975	0.975	0.334	0.893	0.890	1.154	-0.307	10	0.000
2500	0.488	0.989	0.989	0.466	0.831	0.827	1.052	-0.448	19	0.000
5000	0.494	0.996	0.996	0.423	0.931	0.929	0.992	-0.429	6	0.000
–	**0.999**	–	–	**-0.500**	–	–	**1.000**	**0.000**	–	–
1000	1.006	0.998	0.998	-0.405	0.997	0.997	1.012	-0.021	18	-0.800
2500	1.008	0.999	0.999	-0.416	0.999	0.999	1.002	0.001	11	-1.000
5000	1.003	1.000	0.999	-0.479	0.999	0.999	1.021	-0.004	4	-0.900
–	**0.999**	–	–	**0.000**	–	–	**1.000**	**0.000**	–	–
1000	0.942	0.996	0.996	-0.025	0.858	0.847	1.033	0.019	17	-0.100
2500	0.980	1.000	1.000	-0.018	0.961	0.958	0.986	0.005	18	-0.100
5000	0.989	1.000	1.000	-0.031	0.961	0.958	0.980	0.002	3	-0.100

–	**0.999**	–	–	**0.500**	–	–	**1.000**	**0.000**	–	–
1000	0.984	0.988	0.988	0.584	0.784	0.768	0.953	-0.109	3	-0.050
2500	0.971	0.999	0.999	0.502	0.891	0.882	0.949	-0.067	7	-0.050
5000	0.974	0.999	0.999	0.509	0.984	0.983	0.983	-0.055	10	-0.050
–	**1.001**	–	–	**-0.500**	–	–	**1.000**	**0.000**	–	–
1000	0.944	0.999	0.999	-0.562	0.999	0.999	0.977	-0.033	6	-1.000
2500	0.953	0.999	0.999	-0.600	0.999	0.999	0.995	0.015	9	-0.850
5000	0.962	1.000	1.000	-0.512	1.000	1.000	0.999	-0.014	11	-0.800
–	**1.001**	–	–	**0.000**	–	–	**1.000**	**0.000**	–	–
1000	1.001	0.998	0.998	-0.026	0.935	0.930	0.936	0.032	4	-0.100
2500	1.034	0.999	0.999	-0.040	0.963	0.960	0.995	0.094	2	-0.100
5000	1.032	0.999	0.999	-0.005	0.931	0.926	1.017	0.021	4	-0.100
–	**1.001**	–	–	**0.500**	–	–	**1.000**	**0.000**	–	–
1000	1.011	0.997	0.997	0.436	0.931	0.926	0.965	0.008	7	0.000
2500	0.999	0.999	0.999	0.399	0.862	0.852	0.952	-0.002	19	0.000
5000	1.009	1.000	1.000	0.437	0.950	0.946	0.970	-0.005	3	0.000
–	**1.500**	–	–	**-0.500**	–	–	**1.000**	**0.000**	–	–
1000	1.563	1.000	0.999	-0.391	0.998	0.998	1.006	-0.419	4	-0.350
2500	1.485	1.000	1.000	-0.506	0.998	0.998	0.971	-0.517	2	-0.350
5000	1.514	1.000	1.000	-0.497	1.000	1.000	0.999	-0.486	3	-0.400
–	**1.500**	–	–	**0.000**	–	–	**1.000**	**0.000**	–	–
1000	1.450	0.999	0.999	0.007	0.930	0.925	1.031	-0.067	1	-0.150
2500	1.532	1.000	1.000	-0.052	0.913	0.907	1.073	-0.066	2	-0.050
5000	1.500	1.000	1.000	-0.029	0.959	0.956	1.036	-0.023	2	-0.050
–	**1.500**	–	–	**0.500**	–	–	**1.000**	**0.000**	–	–
1000	1.463	0.997	0.997	0.597	0.982	0.980	1.021	0.670	1	-0.050
2500	1.480	1.000	1.000	0.590	0.975	0.973	1.026	0.611	2	0.000
5000	1.480	1.000	1.000	0.514	0.998	0.997	0.996	0.569	2	0.000
–	**2.000**	–	–	**0.000**	–	–	**1.000**	**0.000**	–	–
1000	1.982	1.000	1.000	-0.357	0.965	0.960	1.015	0.071	2	-0.050
2500	1.994	1.000	1.000	-0.100	0.816	0.796	1.005	0.058	1	0.000
5000	1.992	1.000	1.000	0.041	0.999	0.999	1.004	0.029	2	-0.050

6. OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI FINALI

Dai risultati presentati nella Tabella 5.1 si hanno le seguenti osservazioni e considerazioni finali relative sia ai valori assunti dalle stime puntuali dei quattro parametri che alla procedura di stima:

(6.1) il valore assunto da $\hat{\alpha}$ in corrispondenza di ogni $\underline{x}_{m,p}$ risulta sempre "vicino" al valore vero del parametro α. Ad ognuno di questi valori della stima risultano associati valori elevati sia di $R^2_{\hat{\alpha}}$ che di $\overline{R}^2_{\hat{\alpha}}$, il cui intervallo di variazione è, per entrambi, $[0.950; 1.000]$;

(6.2) il comportamento del valore assunto da $\hat{\beta}$ in corrispondenza di ogni $\underline{x}_{m,p}$ risulta analogo a quello del valore assunto da $\hat{\alpha}$, anche nelle "vicinanze" del valore di α ($\alpha = 0.999$ e $\alpha = 1.001$) in corrispondenza del quale la funzione caratteristica teorica (2.2) ammette una discontinuità. Ad ognuno di questi valori della stima risultano associati valori elevati sia di $R^2_{\hat{\beta}}$ che di $\overline{R}^2_{\hat{\beta}}$ (anche se, in media, leggermente inferiori rispetto a quelli assunti da $R^2_{\hat{\alpha}}$ e da $\overline{R}^2_{\hat{\alpha}}$), il cui intervallo di variazione è, rispettivamente, $[0.688; 1.000]$ e $[0.681; 1.000]$;

(6.3) il comportamento del valore assunto da $\hat{c}$ in corrispondenza di ogni $\underline{x}_{m,p}$ risulta analogo a quello del valore assunto da $\hat{\alpha}$. Ad ognuno di questi valori assunti dalla stima non è possibile associare una misura della bontà di accostamento al valore vero del parametro poiché questi non si ottengono direttamente da una regressione lineare;

(6.4) il comportamento del valore assunto da $\hat{\delta}$ in corrispondenza di ogni $\underline{x}_{m,p}$ risulta analogo a quello del valore assunto da $\hat{\alpha}$ nel 70%, circa, dei casi, risultando "evidentemente lontano" dal valore vero del parametro nel 30%, circa, dei casi. Ciò si può reputare come conseguenza del fatto che $\hat{\delta}$ è funzione delle stime $\hat{c}_0$, $\hat{c}_{i,1}$, $\hat{\delta}_0$ e $\hat{\delta}_{i,1}$, $i = 1, \dots, i^*$, per cui, talvolta, può risultare distorto in funzione delle distorsioni di queste ultime. Analogamente a quanto si verifica per i valori assunti da $\hat{c}$ anche ad ognuno di quelli assunti da $\hat{\delta}$ non è possibile associare una misura della bontà di accostamento al valore vero del parametro;

(6.5) all'aumentare dell'ampiezza campionaria i valori assunti da $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{c}$ e $\hat{\delta}$ mostrano, in media, un lento "avvicinamento" ai valori veri dei quattro parametri, evidenziando un comportamento "asintotico" già in corrispondenza di una ampiezza campionaria $N = 1000$;

(6.6) il valore assunto dalla quantità $\lambda_{i^*,s}$ in corrispondenza di ogni $\underline{x}_{m,p}$ risulta diverso da 0 nel 75%, circa, dei casi, evidenziando la necessità di questa procedura di stima di disporre di dati opportunamente pre-trattati.

BIBLIOGRAFIA

[1] AKGIRAY V., BOOTH G., "The Stable-Law Model of Stock Returns", *Journal of Business & Economic Statistics*, 6, 1988, pp. 51-57.

[2] BALMER D. W., BOULTON M., SACK R. A., "Optimal Solutions in Parameters Estimation Problems for the Cauchy Distribution", *Journal of the American Statistical Association*, 69 (345), 1974, pp. 238-245.

[3] BRASOLIN A., CORAZZA M., NARDELLI C., "Autosimilarità e Comportamento Non Lineare di un Indice Azionario nel Mercato Italiano", *Atti del XVI Convegno A.M.A.S.E.S.*, Treviso, 1992, pp. 155-170.

[4] CANESTRELLI E., NARDELLI C., "Distribuzioni Stabili di Lévy dei rendimenti nel mercato azionario italiano", *Atti del XV Convegno A.M.A.S.E.S.*, Grado, 1991, pp. 145-158.

[5] CAPPUCCIO N., ORSI R., *Econometria*, Il Mulino, Bologna, 1991.

[6] CHAMBERS J. M., MALLOWS C. L., STUCK B. W., "A method for simulating stable random variables", *Journal of the American Statistical Association*, 71, 1976, 354, pp. 340-344.

[7] COOTNER P., "Comments on the Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, in COOTNER P. H. (ed.), 1964, *The Random Character of Stock Market Prices*, 333-337, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1963.

[8] CORAZZA M., NARDELLI C., "Analisi della Struttura Frattale del Mercato Finanziario Italiano". In questo stesso volume, 1993.

[9] DABONI L., *Calcolo delle Probabilità ed Elementi di Statistica*, U.T.E.T., Torino, 1980.

[10] DuMOUCHEL W. H., "Stable Distribution in Statistical Inference: 2. Information from Stably Distributed Samples", *Journal of the American Statistical Association*, 70 (350), 1975, pp. 386-393.

[11] DuMOUCHEL W. H., "Estimating the Stable Index α in order to Measure Tail Thickness: a Critique", *The Annals of Statistics*, 11, 1983, pp. 1019-1031.

[12] FAMA E. F., "Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis", *Journal of Business*, in COOTNER P. H. (ed.), 1964, *The Random Character of Stock Market Prices*, 297-306, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1963.

[13] FAMA E. F., ROLL R., "Parameter Estimates for Symmetric Stable Distribution", *Journal of the American Statistical Association*, 66 (334), 1971, pp. 331-338.

[14] FELLER W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 1-2, J. Wiley & Sons, New York, 1971.

[15] FIELITZ B. D., SMITH E. W., "Asymmetric Stable Distributions of Stock Price Changes", *Journal of the American Statistical Association*, 67 (340), 1972, pp. 813-814.

[16] FIELITZ B. D., ROZELLE J. P., "Stable Distributions and the Mixtures of Distributions Hypotheses for Common Stock Returns", *Journal of the American Statistical Association*, 78 (381), 1983, pp. 28-36.

[17] KOUTROUVELIS I. A., "Regression-type Estimation of the Parameters of Stable Laws", *Journal of the American Statistical Association*, 75 (37), 1980, pp. 918-928.

[18] KOUTROUVELIS I. A., "An Iterative Procedure for the Estimation of the Parameters of Stable Laws", *Comm. Statist. - Simula. Computa.*, B10(1), 1981, pp. 29-39.

[19] KOUTROUVELIS I. A., BAUER D. F., "Asymptotic Distribution of Regression-type Estimators of Parameters of Stable Laws", *Commun. Statist. - Theor. Meth.*, 11(23), 1982, pp. 2715-2730.

[20] KOUTROUVELIS I. A., "Estimation of Stable Location and Scale in Cauchy Distributions using the Empirical Characteristic Function", *Biometrika*, 69 (1), 1982, pp. 205-213.

[21] LANDENNA G., *Fondamenti di Statistica Descrittiva*, Il Mulino, Bologna, 1980.

[22] LEITCH R. A., PAULSON A. S., "Estimation of Stable Law Parameters: Stock Price Behavior Application", *Journal of the American Statistical Association*, 70 (351), 1975, pp. 690-697.

[23] MANDELBROT B. B., "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, in COOTNER P. H. (ed.), 1964, *The Random Character of Stock Market Prices*, 307-332, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusets, 1963.

[24] McCULLOCH H. J., "Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters", *Commun. Statist. - Simula.*, 15 (4), 1986, pp. 1109-1136.

[25] PANTON D. B., "A Pascal Program for Simulating Stable Random Variates", *Commun. Statist. - Simula.*, 17 (3), 1988, pp. 837-842.

[26] PAULSON A. S., HOLCOMB E. W., LEITCH R. A., "The Estimation of the Parameters of the Stable Laws", *Biometrika*, 62 (1), 1975, pp. 163-169.

[27] ROZELLE J., FIELITZ B., "Skewness in Common Stock Returns", *The Financial Review*, 15 (1), 1980, pp. 1-23.

[28] SIMKOWITZ M., BEEDLES W., "Asymmetric Stable Distribuited Security Returns", *Journal of the American Statistical Association*, 75, 1980, pp. 306-312.

[29] WALTER C., "Lévy Stable Distributions and Fractal Structure on the Paris Market", *1st A.F.I.R. International Colloquium*, Paris, 3, 1990, pp. 242-259.